Grundriß einer allgemeinen Behandlung von einigen Funktionalgleichungstypen.

Von J. ACZÉL in Debrecen.

Die Theorie der Funktionalgleichungen zeigt einen wesentlichen Unterschied gegenüber der Theorie der Differentialgleichungen: es mangelt bei den Funktionalgleichungen an allgemeinen Existenz- und Unizitätssätzen, ja auch an allgemeinen Lösungsmethoden.

Das Ziel dieser Arbeit ist eine gewissermaßen allgemeine Behandlung einiger Typen von Funktionalgleichungen, die sich auf Funktionen einer Veränderlichen beziehen, zu geben. Diese Typen sind meist mehr oder weniger unmittelbare, manchmal aber ziemlich weitgehende Verallgemeinerungen bekannter Funktionalgleichungen. Wir geben überall *allgemeine Lösungsmethoden* und meistens auch *Existenz- und Unizitätssätze.*

Die behandelten Typen sind:

$$f(x+y)=F[f(x),f(y)]; \tag{1}$$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=F[f(x),f(y)]; \tag{2}$$

$$f(ax+by+c)=F[f(x),f(y)]; \tag{2'}$$

$$G[f(x+y),f(x-y),f(x),x,y]=0; \tag{3}$$

$$f(x+y)=H[f(x),y]; \tag{4}$$

$$F[f(x+y),f(x-y),f(x),f(y),x,y]=0. \tag{5}$$

Es werden auch Lösungsmethoden für noch allgemeinere Funktionalgleichungen

$$f(ax+by+c)=F[f(x),f(y),x,y]$$
$$f[G(x,y)]=H[f(x),y] \qquad \text{usw.}$$

skizziert bzw. auf die oben stehenden zurückgeführt.

§ 1.

Als Verallgemeinerung der CAUCHYschen Funktionalgleichung [2] [1])

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

[1]) Eckige Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

behandeln wir die Gleichung

$$(1) \qquad f(x+y)=F[f(x),f(y)].$$

Lösungsmethode: Aus (1) wird

$$f(2x)=F[f(x),f(x)]=F_2[f(x)]$$

und

$$f(nx)=F\{f(x),f[(n-1)x]\}=F\{f(x),F_{n-1}[f(x)]\}=F_n[f(x)].$$

Setzt man hier $x=1$, bzw. $x=\frac{m}{n}$ und bezeichnet man $f(1)$ mit c, so erhält man

$$f(n)=F_n(c),$$

bzw.

$$F_n\left[f\left(\frac{m}{n}\right)\right]=f(m)=F_m(c),$$

d. h.

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=F_n^{-1}F_m(x),$$

wo F_n^{-1} die inverse Funktion von F_n ist.

Für irrationale x wird $f(x)$ durch einen Grenzübergang definiert:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(r_n)$$

wo $\{r_n\}$ eine zu x konvergierende Folge von rationalen Zahlen ist.

$f(0)$ kann aus der Gleichung (1)

$$f(0)=F[f(0),f(0)]$$

bestimmt werden, die keine Identität ist, da aus (1)

$$f^{-1}[F(u,v)]=f^{-1}(u)+f^{-1}(v)$$

folgt, und falls

$$F(u,u)\equiv u$$

wäre, so würde

$$f^{-1}(u)\equiv 2f^{-1}(u)$$

folgen, was unmöglich ist.

Endlich wird $f(-x)$ aus der Gleichung

$$F[f(-x),f(x)]=f(0)$$

bestimmt.

Aus [9] folgt der

Satz 1. *Die Funktionalgleichung* (1) *hat dann und nur dann eine streng monotone und stetige Lösung, falls $F(x,y)$ (in beiden Veränderlichen) streng monoton und stetig ist und der Bedingung*

$$F[F(x,y),z]=F[x,F(y,z)]$$

genüge leistet (Assoziativität).

Es kann durch einen Punkt der Ebene nur eine Lösungskurve der Gleichung (1) *gehen: Hat* (1) *eine Lösung* $f(x)$, *so sind auch alle Funktionen*

$$g(x) = f(ax)$$

Lösungen der Gleichung, und nur diese. — (Vgl. auch [6].)

Die letzte Behauptung kann folgenderweise bewiesen werden:

Man erhält aus (1)

$$f[f^{-1}(x) + f^{-1}(y)] = g\,[g^{-1}(x) + g^{-1}(y)]$$

und mit der Substitution

$$u = g^{-1}(x), \quad v = g^{-1}(y)$$
$$x = g(u), \quad y = g(v)$$
$$f^{-1}g(u) = h(n)$$

die Gleichung

$$h(u+v) = h(u) + h(v).$$

Die allgemeine stetige, (oder streng monotone oder messbare) Lösung dieser Gleichung ist [2]

$$h(u) = au$$

deshalb muß

$$g(u) = f(au)$$

sein, w. z. B. w.

Beispiele.

Gleichung: $f(x+y) = f(x)f(y)$. Lösung: $f(x) = a^x$. [2].

Gleichung: $f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$. Lösung: $f(x) = \operatorname{tg} ax$. [6], [12].

Gleichung: $f(x+y) = f(x)^{\ln f(y)}$. Lösung: $f(x) = e^{a^x}$.

Mit derselben Methode können auch die Funktionalgleichungen vom Typ

$$f(x+y) = F[f(x), f(y), x, y]$$

ja auch die vom Typ

$$f(x+y) = F[f(x-y), f(x), f(y), x, y]$$

gelöst werden, auf die wir in dem § 5. noch zurückkehren wollen.

§ 2.

Als Verallgemeinerung der JENSENschen Funktionalgleichung [4]

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

untersuchen wir die Gleichung

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = F[f(x), f(y)]. \tag{2}$$

Lösungsmethoden: 1. Die Gleichung kann auf (1) zurückgeführt werden (und umgekehrt):

Setzt man nämlich in (2) $x = t, y = 0$ ein, so wird

$$f\left(\frac{t}{2}\right) = F[f(t), f(0)].$$

Wählen wir jetzt $t = x + y$, und bezeichnen wir $f(0) = a$,[2]) so erhalten wir:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = F[f(x+y), a].$$

Wir vergleichen diese Gleichung mit der Gleichung (2):

$$F[f(x+y), a] = F[f(x)f(y)]$$

und lösen nach $f(x+y)$ auf:

$$f(x+y) = G[f(x), f(y)],$$

womit wir schon eine Gleichung des Typs (1) erhalten haben.

2. Man setze $f(0) = a, f(1) = b$, so ergibt (2):

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = F[f(0), f(1)];$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = F\left[f(0), f\left(\frac{1}{2}\right)\right]; \quad f\left(\frac{3}{4}\right) = F\left[f\left(\frac{1}{2}\right), f(1)\right];$$

$$f\left(\frac{2k+1}{2^{n-1}}\right) = F\left[f\left(\frac{k}{2^n}\right), f\left(\frac{k+1}{2^n}\right)\right].$$

Oder durch einen anderen Prozeß:

$$f(0) = a, f(1) = b,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = F(a, b);$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = F\left[a, f\left(\frac{1}{2}\right)\right]; \quad f\left(\frac{3}{4}\right) = F\left[f\left(\frac{1}{2}\right), b\right];$$

$$f\left(\frac{u}{2}\right) = F[a, f(u)], \quad f\left(\frac{u+1}{2}\right) = F[f(u), b].$$

Damit wurde $f(x)$ für dyadische Brüche schon bestimmt. Für nicht-dyadische x-Werte wird $f(x)$ wieder durch

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f(d_n)$$

bestimmt wo $\{d_n\}$ hier eine zu x konvergierende Folge von dyadischen Brüchen ist, usw.

Aus [10] folgt der

---

[2]) Hier kann $f(0) = a$ aus dem Spezialfall

$$f(0) = F[f(0), f(0)]$$

von (2) nicht bestimmt werden, da hier $F(u, u) \equiv u$ ist, wie aus (2) mit $y = x. f(x) = u$ folgt.

Satz 2. *Die Funktionalgleichung* (2) *hat dann und nur dann eine stetige und streng monotone Lösung, falls* $F(x, y)$ *stetig und streng monoton ist und der Bedingung*

$$F[F(x, y), z] = F[F(x, z), F(z, y)] \tag{6}$$

genügt. (Schiefe Autodistributivität).

Es gibt durch jedes Punktpaar nur eine Lösungskurve der Gleichung (2): *Ist* $f(x)$ *eine Lösung der Gleichung* (2), *so sind auch alle Funktionen*

$$g(x) = f(cx + k)$$

Lösungen, und nur diese.

Letzteres gilt, weil aus

$$g\left(\frac{g^{-1}(x) + g^{-1}(y)}{2}\right) = f\left(\frac{f^{-1}(x) + f^{-1}(y)}{2}\right)$$

mit $g^{-1}(x) = u, g^{-1}(y) = v;\ x = g(u), y = g(v), f^{-1}g(u) = h(u)$

$$h\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{h(u) + h(v)}{2}$$

folgt, d. h. [4]

$$h(u) = cu + k, \quad g(u) = f(cu + k).$$

Als *Beispiel* kann die Gleichung

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)\, f(y)}$$

dienen, die N. I. Lobacsevszkij [3] zur Bestimmung des Paralellenwinkels benutzte.

Die Lősung ist

$$f(x) = ac^x = ae^{\frac{x}{k}}.$$

Aus [7] folgt noch der alternative

Satz 2'. *Die Behauptungen des Satzes 2. bleiben gültig, wenn die Bedingung* (6) *durch den drei Bedingungen*

$$\begin{aligned} &(7) \qquad & F[F(x, y), F(u, v)] &= F[F(x, u), F(y, v)] \qquad & \textit{(Bisymmetrie)} \\ && F(x, x) &= x & \textit{(Reflexivität)} \\ && F(x, y) &= F(y, x) & \textit{(Symmetrie)} \end{aligned}$$

ersetzt wird.

Mit dem Gleichungstyp

$$f(ax + by + c) = F[f(x), f(y)] \tag{2'}$$

wollen wir uns nicht eingehend befassen, da er in [8] schon behandelt wurde. Der wesentliche Inhalt des dort bewiesenen Satzes ist, dass (2') lösbar ist, falls F der Bedingung (7) genüge leistet. Es wurde dort auch die Eindeutigkeit der Lösung diskutiert.

Wir ergänzen aber die Untersuchung dieser Gleichung (2′) mit der Angabe von *Lösungsmethoden:*

Setzt man in der Gleichung

$$f(ax+by+c)=F[f(x),f(y)] \tag{2′}$$

$$x=y=\frac{ax+by}{a+b}=px+qy, \quad (p+q=1)$$

und vergleicht die so erhaltene Gleichung

$$f(ax+by+c)=F[f(px+qy),f(px+qy)]=F_2[f(px+qy)]$$

mit (2′) so wird

$$f(px+qy)=F_2^{-1}\{F[f(x),f(y)]\}=G[f(x),f(y)], \quad (p+q=1).$$

Jetzt kann man auf zweierlei Arten weiter folgern:

1. Man setzt $f(0)=k$ und $x=\frac{u}{p}$, $y=0$, bzw. $x=0$, $y=\frac{v}{q}$, bzw. $x=\frac{u}{p}$, $y=\frac{v}{q}$ und erhält die Gleichungen:

$$f(u)=G\left[f\left(\frac{u}{p}\right),k\right],$$

bzw.

$$f(v)=G\left[k,f\left(\frac{v}{q}\right)\right],$$

bzw.

$$f(u+v)=G\left[f\left(\frac{u}{p}\right),f\left(\frac{v}{p}\right)\right].$$

Wenn wir aus diesen drei Gleichungen $f\left(\frac{u}{p}\right)$ und $f\left(\frac{v}{q}\right)$ eliminieren, so finden wir eine Gleichung

$$f(u+v)=H[f(u),f(v)]$$

des Typs (1).

2. Setzen wir in die Gleichung

$$f(px+qy)=G[f(x),f(y)] \qquad (p+q=1)$$

erst $x=\frac{u+v}{2}$, $y=u$, dann $x=v$, $y=\frac{u+v}{2}$ und schließlich $x=p\frac{u+v}{2}+qu$, $y=pv+q\frac{u+v}{2}$, so wird

$$G\left[f\left(\frac{u+v}{2}\right),f(u)\right]=f\left(p\frac{u+v}{2}+qu\right)$$

bzw.

$$G\left[f(v),f\left(\frac{u+v}{2}\right)\right]=f\left(pv+q\frac{u+v}{2}\right)$$

bzw.

$$G\left[f\left(p\frac{u+v}{2}+qu\right), f\left(pv+q\frac{u+v}{2}\right)\right]=f\left[(p^2+q^2+2pq)\frac{u+v}{2}\right]=f\left(\frac{u+v}{2}\right).$$

Aus diesen Gleichungen kann $f\left(p\frac{u+v}{2}+qu\right)$ und $f\left(pv+q\frac{u+v}{2}\right)$ wieder eliminiert werden, womit wir einen Zusammenhang

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right)=H[f(u), f(v)]$$

des Typs (2) erhalten.

Alle in diesem Paragraphe mitgeteilten Lösungsmethoden können auch für die Gleichungen der Typen

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=F[f(x), f(y), x, y] \tag{8}$$

bzw.

$$f(ax+by+c)=F[f(x), f(y), x, y]$$

verallgemeinert werden.

Die Gleichung (8) und damit auch die Gleichung (2) läßt sich außerdem noch durch die Substitution $u=\frac{x+y}{2}$, $v=\frac{x-y}{2}$, $x=u+v$, $y=u-v$ auf die Gleichung

$$f(u)=F[f(u+v), f(u-v), u+v, u-v]$$

des Typs

$$G[f(u+v), f(u-v), f(u), u, v]=0 \tag{3}$$

zurückführen, die wir in dem nächsten Paragraphen untersuchen werden.

§ 3.

Wir geben *Lösungsmethoden* und entsprechende Sätze für die Funktionalgleichung (3) bzw.

$$G[f(x+y), f(x-y), x]=H[f(x), y]. \tag{3}$$

1. Gibt es einen $y=y_0$ Wert derart, daß

$$H(u, y_0)\equiv 0.$$

so führt die folgende Methode meist zum Ziel:

Wir setzen $x=0$, $y=t$ bzw. $x=y_0+t$, $y=y_0$ bzw. $x=y_0$, $y=y_0+t$ und erhalten mit der Bezeichnung $f(0)=a$, $f(y_0)=b$:

$$G[f(t), f(-t), 0]=H(a, t),$$

bzw.

$$G[f(2y_0+t), f(t), y_0+t]=0,$$

(da $H(u, y_0)\equiv 0$ ist),

bzw.

$$G[f(2y_0+t), f(-t), y_0] = H(b, y_0+t),$$

und eliminieren $f(2y_0+t)$ und $f(-t)$. Das Einsetzen der so gewonnenen Funktion $f(x)$ zeigt ob sie wirklich Lösung der Funktionalgleichung ist oder noch spezialisiert werden muß, oder ob etwa (3) gar keine (nichttriviale) Lösung hat.

Dies gibt den

Satz 3$_1$. *Ist*

$$H(u, y_0) \equiv 0$$

und sind die Gleichungen

$$G(z, u, 0) = H(a, t)$$
$$G(v, z, y_0 + t) = 0$$
$$G(v, u, y_0) = H(b, y_0+t)$$

von einander unabhängig (und keine von ihnen identisch erfüllt), so kann nur die aus ihnen gewonnene Funktion

$$z = f(t)$$

Lösung der Funktionalgleichung (3) *sein, und diese allgemeine Lösung enthält (höchstens) zwei wilkürliche Konstanten a, b.*

Beispiel:

$$f(x+y)+f(x-y) = 2f(x) \cos y$$

[5]. Hier wird $y_0 = \frac{\pi}{2}$ sein, und $f(x)$ wird aus dem Gleichungsystem

$$f(t)+f(-t) = 2a \cos t$$
$$f(\pi+t)+f(t) = 0$$
$$f(\pi+t)+f(-t) = 2b \cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right) = -2b \sin t$$

bestimmt:

$$f(t) = a \cos t + b \sin t,$$

und diese Funktion erfüllt auch tatsächlich unsere Gleichung.

2. Falls H für kein y identisch verschwindet, so ist es oft zweckmäßig folgenderweise zu verfahren:

Man setze in (3) sukzessiv $x = 0, y = t$; bzw. $x = t, y = 2t$; bzw. $x = t, y = -2t$, dann wird

$$G[f(t), f(-t), 0] = H(a, t),$$

bzw.

$$G[f(3t), f(-t), t] = H[f(t), 2t],$$

bzw.

$$G[f(-t), f(3t), t] = H[f(t), -2t],$$

woraus durch Elimination von $f(-t)$ und $f(3t)$ die Funktion $f(t)$ gewonnen werden kann.

Dies liefert den

Satz 3_2. *Sind die Gleichungen*

$$G(z, u, 0) = H(a, t)$$
$$G(v, u, t) = H(z, 2t)$$
$$G(u, v, t) = H(z, -2t)$$

unabhängig, so kann nur die aus ihnen gewonnene Funktion

$$z = f(t)$$

Lösung der Funktionalgleichung (3′) *sein, und diese allgemeine Lösung enthält höchstens eine Konstante* a.

Beispiele:

1. $$f(x+y) + 2f(x-y) = 3f(x) - y.$$

Lösung: Aus

$$f(t) + 2f(-t) = 3a - t$$
$$f(3t) + 2f(-t) = 3f(t) - 2t$$
$$f(-t) + 2f(3t) = 3f(t) + 2t$$

folgt

$$f(t) = t + a$$

und diese Funktion ist tatsächlich die Lösung unserer Funktionalgleichung.

2. $$2f(x+y) + f(x-y) = f(x)\,(2e^{y} + e^{-y}).$$

Lösung:

$$2f(t) + f(-t) = a(2e^{t} + e^{-t})$$
$$2f(3t) + f(-t) = f(t)(2e^{2t} + e^{-2t})$$
$$2f(-t) + f(3t) = f(t)(2e^{-2t} + e^{2t})$$

woraus sich

$$f(t) = a\,\frac{2e^{t} + e^{-t}}{2 + e^{-2t}} = ae^{t}$$

als Lösungsfunktion ergibt, die die angegebene Funktionalgleichung auch wirklich erfüllt.

Es können offenbar auch die Gleichungen des etwas allgemeineren Typs

(3) $$G[f(x+y), f(x-y), f(x), x, y] = 0.$$

ähnlich behandelt werden.

Natürlich können auch alle Lösungsmethoden der allgemeineren Gleichung (5) die wir in dem § 5. besprechen werden, auch zur Lösung der Gleichungen des Typs (3) verwendet werden.

§ 4.

Als Verallgemeinerung der Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x) + y$$

— die durch die Substitution $x = 0$ sofort lösbar ist und die allgemeine

Lösung

$$f(t)=t+a$$

hat, wo a eine beliebige Konstante ist, — betrachten wir die Gleichung

(4) $$f(x+y)=H[f(x),y]$$

die ein Spezialfall der in den §§ 3,5 und am Ende des § 1. behandelten Gleichungen ist, aber gegenüber diesen besonders einfach lösbar ist.

Lösungsmethode: Wir setzen $x=0$ und bezeichnen $f(0)=a$, dann wird

$$f(t)=H(a,t)$$

Dies ist die allgemeine Lösung der Gleichung (1) falls eine solche existiert. Durch Einsetzen dieses Resultates in die ursprüngliche Gleichung überzeugen wir uns ob dies wirklich Lösung von (1) ist, oder ob etwa (1) überhaupt keine (nichttriviale) Lösung hat.

Dieses Einsetzen gibt:

(9) $$H(a,x+y)=H[H(a,x)y].$$

Falls also H diese Gleichung für *ein* a und für *beliebige* x,y erfüllt, so ist $f(t)=H(a,t)$ Lösung der Gleichung (1).

Wir haben also (Vgl. auch [11]) den

Satz 4. *Erfüllt die Funktion H die Gleichung* (9) *so hat die Funktionalgleichung* (1) *eine Lösung der Gestalt*

$$f(t)=H(a,t)$$

die durch den Punkt $(0,a)$ *geht.*

$$[f(t)=H(d,t-c)$$

ist eine durch den Punkt (c,d) *gehende Lösung*].

Ist $H(x,t)$ auch noch streng monoton (bzw. stetig), so ist $f(t)$ stetig und streng monoton, und es gibt ausser den Funktionen $g(t)=f(t+A)$ keine weiteren Lösungen der Gleichung (4).

Letzteres kann folgenderweise bewiesen werden: Gilt gleichzeitig

$$f(x+y)=H[f(x),y]$$

und

$$g(x+y)=H[g(x),y],$$

ist ferner f streng monoton und stetig, und bezeichnet $f^{-1}(x)$ die inverse Funktion von $f(x)$, so wird

$$H(x,y)=f[f^{-1}(x)+y]$$

und

$$g(x+y)=H[g(x),y]=f[f^{-1}g(x)+y]$$

d. h.

$$f^{-1}g(x+y)=f^{-1}g(x)+y.$$

Bezeichnet man

$$h(t)=f^{-1}g(t),$$

so wird

$$h(x+y) = h(x)+y.$$

Daraus folgt, wie eingangs erwähnt wurde

$$h(t) = t+A$$

d. h.

$$g(t) = f(t+A).$$

Beispiel: Die Lösung der Funktionalgleichung

$$f(xy) = f(x)y$$

ist

$$f(x) = ax.$$

Auch die allgemeineren Gleichungen der Gestalt

$$f[G(x, y)] = H[f(x), y]$$

können so gelöst werden.

Beizeichnen wir nämlich $G(c, y) = G(y)$ und $G^{-1}(t) = g(t)$, so sehen wir, daß die Lösungen nur der Gestalt

$$f(t) = H[d, g(t)]$$

sein können.

Das Einsetzen dieses Resultates in die Funktionalgleichung zeigt dann ob dies wirklich eine Lösung ist, order noch spezialisiert werden muß, oder etwa die Gleichung keine (nichttriviale) Lösung besitzt.

Beispiel. Die Lösung der Funktionalgleichung

$$f(xy) = f(x)^y$$

ist

$$f(x) = a^x.$$

§ 5.

Wir befassen uns endlich mit der ganz allgemeinen Gleichung:

(5) $$F[f(x+y), f(x-y), f(x), f(y), x, y] = 0$$

Ausser der am Ende des § 1 angegebenen Methode geben wir noch drei *Lösungsmethoden.*

1. Wir setzen in (5) $y = 0$, $f(0) = a$, dann wird

$$F[f(x), f(x), f(x), a, x, 0] = 0.$$

Ist diese Gleichung keine Identität, so kann aus ihr $f(x)$ als Funktion von x bestimmt werden. Also gilt der

Satz 5_1. *Falls es ein a gibt, für das die Gleichung*

$$F(z, z, z, a, x, 0) = 0$$

keine Identität ist, so kann nur die aus ihr gewonnene Funktion

$$z = f(x)$$

Lösung der Funktionalgleichung (5) *sein. Diese Lösung enthält höchstens eine willkürliche Konstante a.*

Beispiel:

$$f(x+y)+2f(x-y)+f(x)+2f(y)=4x+y.$$

Für $x=y=0$ wird

$$4f(0)=0 \qquad \text{d. h. } a=0.$$

Ist $y=0, x\neq 0$ so haben wir

$$4f(x)=4x \qquad \text{d. h. } f(x)=x$$

und $f(x)=x$ erfüllt auch wirklich die angegebene Gleichung.

2. Wir setzen in (5) sukzessiv $x=0, y=t$; bzw. $x=t, y=2t$; bzw. $x=2t, y=t$; bzw. $x=t, y=t$ ein:

$$F[f(t), f(-t), a, f(t), 0, t]=0$$
$$F[f(3t), f(-t), f(t), f(2t), t, 2t]=0$$
$$F[f(3t), f(t), f(2t), f(t), 2t, t]=0$$
$$F[f(2t), a, f(t), f(t), t, t]=0$$

und bestimmen $f(t)$ durch Elimination von $f(-t), f(2t)$ und $f(3t)$.

Das gibt den

Satz 5_2. *Sind die Gleichungen*

$$F(z, u, a, z, 0, t)=0$$
$$F(w, u, z, v, t, 2t)=0$$
$$F(w, z, v, z, 2t, t)=0$$
$$F(v, a, z, z, t, t)=0$$

unabhängig und nicht identisch erfüllt, so kann nur die aus ihnen gewonnene Funktion

$$z=f(t)$$

der Gleichung (5) *genüge leisten und diese allgemeine Lösung enthält höchstens eine willkürliche Konstante a.*

Beispiel. Die Lösung der Gleichung

$$f(x+y)-2f(x-y)+f(x)-2f(y)=y-2$$

wird aus dem Gleichungssystem

$$-f(t)-2f(-t)+a-t=-2$$
$$f(3t)-2f(-t)+f(t)-2f(2t)-2t=-2$$
$$f(3t)-4f(t)+f(2t)-t=-2$$
$$f(2t)-2a-f(t)-t=-2$$

durch Elimination von $f(-t), f(2t)$ und $f(3t)$ erhalten:

$$3f(t)-3t-7a=-4$$

$$f(t)=t+\frac{7a-4}{3}$$

und da

$$f(0)=a$$

ist, muß

$$a=\frac{7a-4}{3}, \qquad \text{d. h. } a=1,$$

$$f(t)=t+1$$

sein, und dies erfüllt unsere Gleichung tatsächlich.

3. Sind weder die Bedingungen des Satzes 5_1, noch die von 5_2 erfüllt so kann man meist so verfahren:

Aus (5) wird mit $x=y=t$

$$F[f(2t), a, f(t), f(t), t, t]=0, \qquad f(t)=G[f(2t), t]$$

d. h.

$$f\left(\frac{t}{2}\right)=G\left[f(t), \frac{t}{2}\right]$$

Durch diese Formel kann $f\left(\frac{1}{2^n}\right)$ aus $f(1)=b$ sukzessiv bestimmt werden. Weiter kann dann $f\left(\frac{2k+1}{2^n}\right)$ $(k=0, 1, 2\ldots)$ aus $f\left(\frac{k}{2^n}\right)$ und $f\left(\frac{k+1}{2^n}\right)$ rekursiv bestimmt werden, da wir $f(0)=a$ und $f\left(\frac{1}{2^n}\right)$ schon kennen. Setzen wir nämlich in (5) $x=\frac{k+1}{2^n}$, $y=\frac{k}{2^n}$, so wird

$$F\left[f\left(\frac{2k+1}{2^n}\right), f\left(\frac{1}{2^n}\right), f\left(\frac{k+1}{2^n}\right), f\left(\frac{k}{2^n}\right), \frac{k+1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]=0.$$

Damit ist $f(x)$ für alle dyadische Brüche bestimmt.

Für nicht dyadische x wird $f(x)$ wieder durch Grenzübergang berechnet, usw.

Als *Beispiel* kann hier unter anderen, der übliche Lösungsprozess der bekannten [1] Gleichung

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

dienen, deren Lösungen $f(x)=\cos cx$ und $f(x)=\operatorname{ch} cx$ sind.

Literaturverzeichnis.

[1] J. d' ALEMBERT, Hist. Acad. sci. Paris, (1769), M. p. 278.

[2] A. L. CAUCHY, Cours d'Analyse de l'École polyt. 1, Analyse algébrique, (Paris, 1821), p. 103. Oeuvres **2**, 3, (Paris 1897), pp. 98, 220.

[3] N. I. LOBACSEVSZKIJ, Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Paralellinien, (Berlin, 1840), § 36.

[4] J. L. W. V. JENSEN, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, *Acta Math.*, **30** (1906), 175—193.

[5] St. KACZMARZ: Sur l'équation fonctionelle $f(x)+f(x+y)=\varphi(y)f\left(x+\frac{y}{2}\right)$, *Fund. Math.*, **6** (1924), 122—129. — Vgl. auch J. ACZÉL, Bemerkungen über die Multiplikation von Vektoren und Quaternionen, *Acta Math. Hung. 3* (1952), 309—316.

[6] R. CACCIOPOLI, L'equazione funzionale $F(x+y)=F[f(x),f(y)]$, *Giornale di Battagliani*, (3) **66** (1928), 1—6.

[7] J. ACZÉL, On mean values, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **54** (1948), 392—400.

[8] J. ACZÉL, Sur une équation fonctionelle, *Publ. Inst. Math. Acad. Serbe*, **2** (1948), 257—262. — Vgl. auch J. ACZÉL, Über eine Klasse von Funktionalgleichungen, *Comm. Math. Helv.*, **21** (1948), 247—256.

[9] J. ACZÉL, Sur les opérations définies pour nombres réels, *Bulletin de la Soc. Math. de France* **76** (1949), 59—64.

[10] C. RYLL—NARDZEWSKI, Sur les moyennes, *Studia Math.*, **11** (1949), 31—37. — Vgl. auch B. KNASTER, Sur une équivalence pour les fonctions, *Colloquium Math.*, **2** (1949), 1—4.

[11] J. ACZÉL, L. KALMÁR, J. G. MIKUSINSKI, Sur l'équation de translation, *Studia Math.*, **12** (1951), 112—116. — Vgl. auch J. ACZÉL, Über einparametrige Transformationen, *Publ. Math. (Debrecen)*, **1** (1950), 243—247.

[12] P. SZÁSZ, Neue Bestimmung des Paralellenwinkels in der hyperbolischen Ebene mit den klassischen Hilfsmitteln, *Acta Sci. Math. Szeged*, **14** (1952), 247—251.

(Eingegangen am 10. April 1953.)