Ausfüllung und Überdeckung eines konvexen sphärischen Gebietes durch Kreise. II.

Von J. MOLNÁR in Budapest.

Das Hauptergebnis des vorliegenden zweiten Teiles unserer Arbeit[1]) ist folgender

Satz. *Ist ein im engeren Sinne konvexes sphärisches Gebiet durch wenigstens drei kongruenten Kugelkappen bedeckt, so ist die Überdeckungsdichte:*

$$D > \frac{2\pi}{\sqrt{27}} = 1{,}2091\ldots . \tag{1}$$

Die Vermutung, daß dieser Satz ihre Gültigkeit auch für beliebige konvexe sphärische Gebiete behält, werden wir nur unter der Beschränkung beweisen, daß jeder Kreis die Begrenzungskurve des Bereiches in höchstens zwei Punkten durchsetzt.

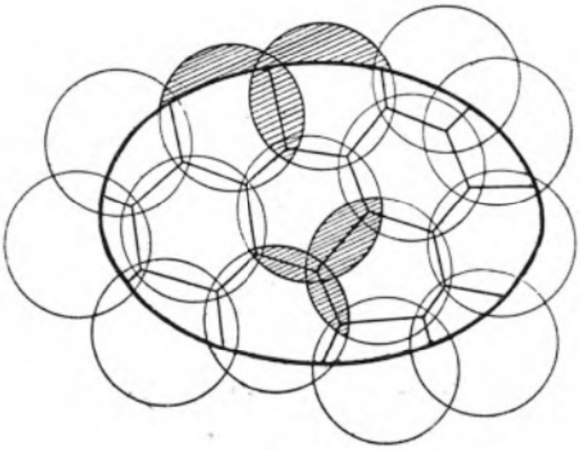

Fig. 1

Zerlegen wir das im engeren Sinne konvexe sphärische Gebiet G durch die im ersten Teil benützte Konstruktion in die Zellen $Z_1, \ldots, Z_n$ und betrachten

[1]) Der erste Teil ist im vorigen Band dieser Zeitschrift erschienen: ***Publicationes Math. (Debrecen),*** **2** (1952), 266—275.

das durch diese Zerlegung entstehende Netz N, wobei auch der Rand von G zu N mitgerechnet werden soll (Fig. 1). Wir können annehmen, das in jedem Punkt von N genau drei Kanten von N zusammentreffen, weil z. B. eine vierkantige Ecke als Grenzlage von zwei zusammenfallenden dreikantigen Ecken aufgefaßt werden kann. Betrachten wir eine innere Ecke von N, in der die Zellen Z_i, Z_j, Z_k zusammenkommen und setzen

$$S_{ijk} = K_i K_j + K_j K_k + K_k K_i - 2 K_i K_j K_k .$$

S_{ijk} bedeutet den von den Kreisen K_i, K_j, K_k wenigstens zweifach bedeckten Teil der Kugel. Es verifiziert sich leicht[2]) folgende Beziehung:

$$G = nK - \frac{1}{2} \sum S_{ijk}, \quad K = K_i . \tag{2}$$

Hierbei ist die Summation über sämtliche Ecken von N zu erstrecken mit der Vereinbarung, daß bei den zu den Rand von G gehörigen Eckpunkte der dritte fehlende Kreis stets durch den Komplement $\overline{G} = K_0$ von G zu ersetzen ist.

Es handelt sich um die Frage, wann der Flächeninhalt desjenigen Gebietes, das von drei Kreisen K_i, K_j, K_k bzw. von zwei Kreisen K_i, K_j und durch das Äußere K_0 eines im engeren Sinne konvexen Gebietes wenigstens zweifach bedeckt ist, sein Minimum erreicht. Dabei sollen in beiden Fällen die drei Gebiete einen gemeinsamen Punkt besitzen und im zweiten Fall sei auch K_0 ganz frei veränderlich.

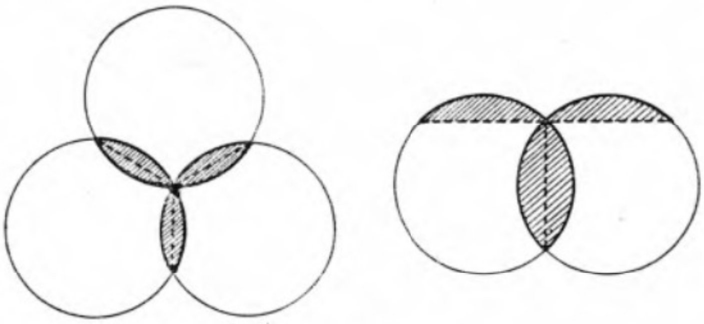

Fig. 2

Es ist leicht einzusehen, daß im ersten Fall das Extremale Gebiet sich aus sechs, im zweiten aus vier kongruenten Kreisabschnitten zusammensetzt (Fig. 2). Dies bedeutet, daß für einen inneren bzw. zum Rand gehörigen Eckpunkt von N

$$S_{ijk} \geqq 2[\pi - 6 \cos r \operatorname{arc\,cotg} (\sqrt{3} \cos r)] \tag{3}$$

bzw.

$$S_{ij0} \geqq 2[\pi - 4 \cos r \operatorname{arc\,cotg} (\cos r)]$$

---

[2]) L. Fejes Tóth, Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. *(Berlin—Göttingen—Heidelberg,* 1953), S, 68—69.

gilt, wobei r den spärischen Radius eines Kreises bedeutet. Da die Gesammteckpunktzahl von N nach dem Eulersschen Polyedersatz $2n-2$ ist, haben wir

$$G \leqq 2n\pi(1-\cos r)-(2n-2-g)[\pi-6\cos r \operatorname{arc\,cotg}(\sqrt{3}\cos r)]- \\ -g[\pi-4\cos r \operatorname{arc\,cotg}(\cos r)],$$

wobei g die Anzahl der an der Grenze von G liegenden Eckpunkte bedeutet. Mit Rücksicht auf $g \geqq 2$ und die leicht zu beweisende Tatsache, daß an der rechten Seite der Koeffizient von g, d. h.

$$[4 \operatorname{arc\,cotg} \cos r-6 \operatorname{arc\,cotg}(\sqrt{3}\cos r)]\cos r$$

nicht positiv ist, wird die rechte Seite nicht verkleinert, wenn g durch 2 ersetzt wird. Dadurch erhalten wir

$$G \leqq 2n\cos r[6 \operatorname{arc\,cotg}(\sqrt{3}\cos r)-\pi]+2\pi-24\cos r \operatorname{arc\,cotg}(\sqrt{3}\cos r)+ \\ +8\cos r \operatorname{arc\,cotg}(\cos r).$$

Hieraus ergibt sich für die Überdeckungsdichte

$$D \geqq \frac{\pi(1-\cos r)}{[6 \operatorname{arc\,cotg}(\sqrt{3}\cos r)-\pi]\cos r+\frac{1}{n}\Phi(r)}, \tag{4}$$

$$\Phi(r)=\pi-12\cos r \operatorname{arc\,cotg}(\sqrt{3}\cos r)+4\cos r \operatorname{arc\,cotg}(\cos r)$$

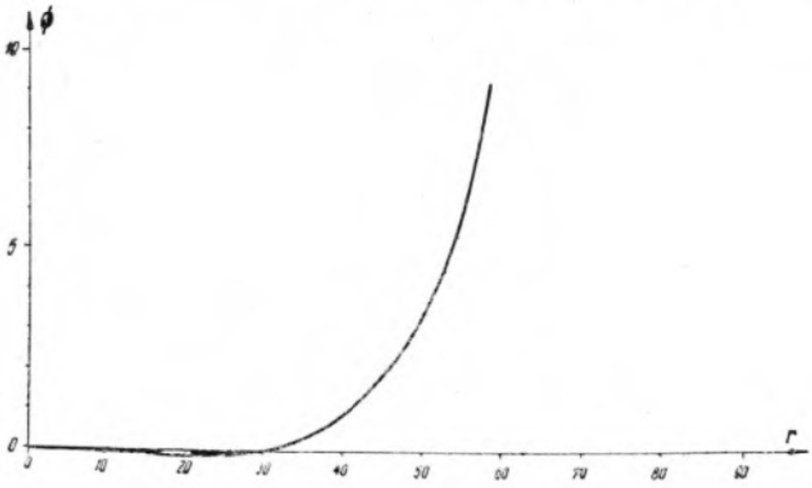

Fig. 3

Es läßt sich zeigen, daß der Ausdruck $\Phi(r)$ für $0<r<90^\circ$ eine einzige Nullstelle $r_0 \approx 30^\circ$ besitzt: $\Phi(r_0)=0$. Für $0<r<r_0$ ist $\Phi(r)<0$, für $r_0<r\leqq 90^\circ$ dagegen $\Phi(r)>0$ (Fig. 3). Dementsprechend haben wir für $r<r_0$

$$D \geqq \frac{\pi(1-\cos r)}{[6 \operatorname{arc\,cotg}(\sqrt{3}\cos r)-\pi]\cos r}=U(r),$$

und für $r_0 \leqq r \leqq 90°$ — indem wir in (4) n durch 3 ersetzen, —

$$D \geqq \frac{3\pi(1-\cos r)}{[6 \operatorname{arc\,cotg}(\sqrt{3}\cos r)+4 \operatorname{arc\,cotg}(\cos r)]\cos r+\pi(1-3\cos r)} = V(r).$$

$U(r)$ und $V(r)$ sind im Intervall $(0, 90°)$ zunehmende Funktionen, für die

$$\lim_{r\to 0} U(r) = \lim_{r\to 0} V(r) = \frac{2\pi}{\sqrt{27}}$$

ausfällt (Fig. 4, 5). Folglich sind beide Funktionen und zugleich auch D im Einklang mit (1) $> \frac{2\pi}{\sqrt{27}}$.

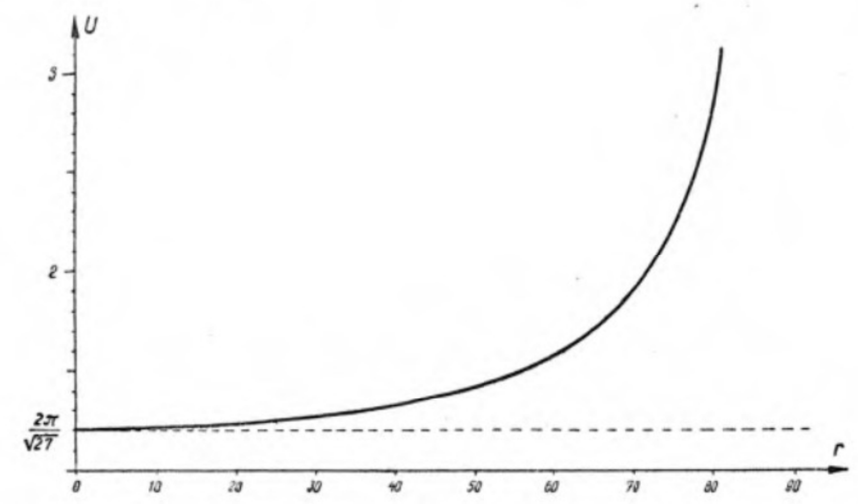

Fig. 4

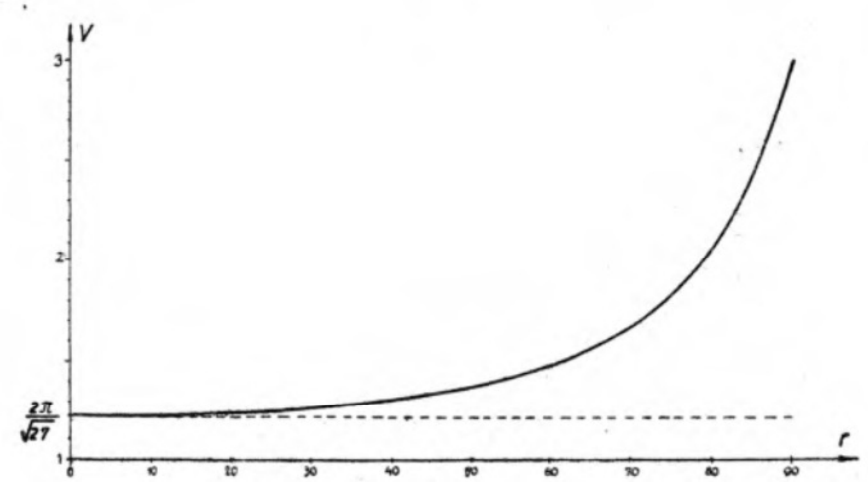

Fig. 5

Wir wenden uns nun dem Fall $G \geqq 2\pi$ zu.

Es bedeute Z_i wie vorher, die Menge derjenigen Punkte von G, deren Abstand vom Mittelpunkt des Kreises K_i kleiner ist als der Abstand von jedem anderen Kreismittelpunkt. Zufolge der Voraussetzung, daß die Kreise höchstens zwei Schnittpunkte mit der G begrenzenden Eilinie aufweisen, sind alle Zellen einfach zusammenhängende „Polygone" (Fig. 6). Bezeichnen wir die Eckenzahl von Z_i mit ν_i, so gilt die Ungleichung

$$\frac{\nu_1+\ldots+\nu_n}{n} \leqq 6-\frac{6+\nu_{n+1}}{n} \leqq 6-\frac{9}{n}$$

wobei ν_{n+1} die Anzahl der auf der Grenze von G liegenden Ecken bedeutet. Da ferner der Inhalt eines in einem Kreis enthaltenen ν-Ecks für das einbeschriebene reguläre ν-Eck sein Maximum erreicht, haben wir

$$Z_i \leqq 2\left[\pi-\nu_i \operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\cos r \operatorname{tg}\frac{\pi}{\nu_i}\right)\right]=\psi(\nu_i).$$

$\psi(\nu)$ ist eine zunehmende, und wegen

$$\psi''=-\frac{\pi^2 \sin 2r \sin\dfrac{2\pi}{\nu}\sin r}{\nu^3\left(\cos r \sin^2\dfrac{\pi}{\nu}+\cos^2\dfrac{\pi}{\nu}\right)^2}<0$$

eine konkave Funktion von ν. Folglich haben wir

$$G=\sum_{i=1}^{n} Z_i \leqq \sum_{i=1}^{n}\psi(\nu_i) \leqq n\psi\left(6-\frac{9}{n}\right)=$$
$$=2n\left[\pi-\left(6-\frac{9}{n}\right)\operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\cos r \operatorname{tg}\frac{\pi n}{6n-9}\right)\right].$$

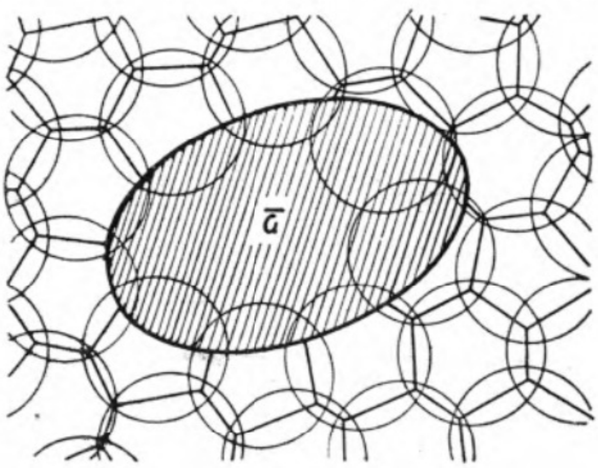

Fig. 6

Ist z. B. G und n vorgegeben, so ergibt die letzte Ungleichung eine Abschätzung von r, und damit der Überdeckungsdichte D, nach unten. Wir haben in Fig. 7

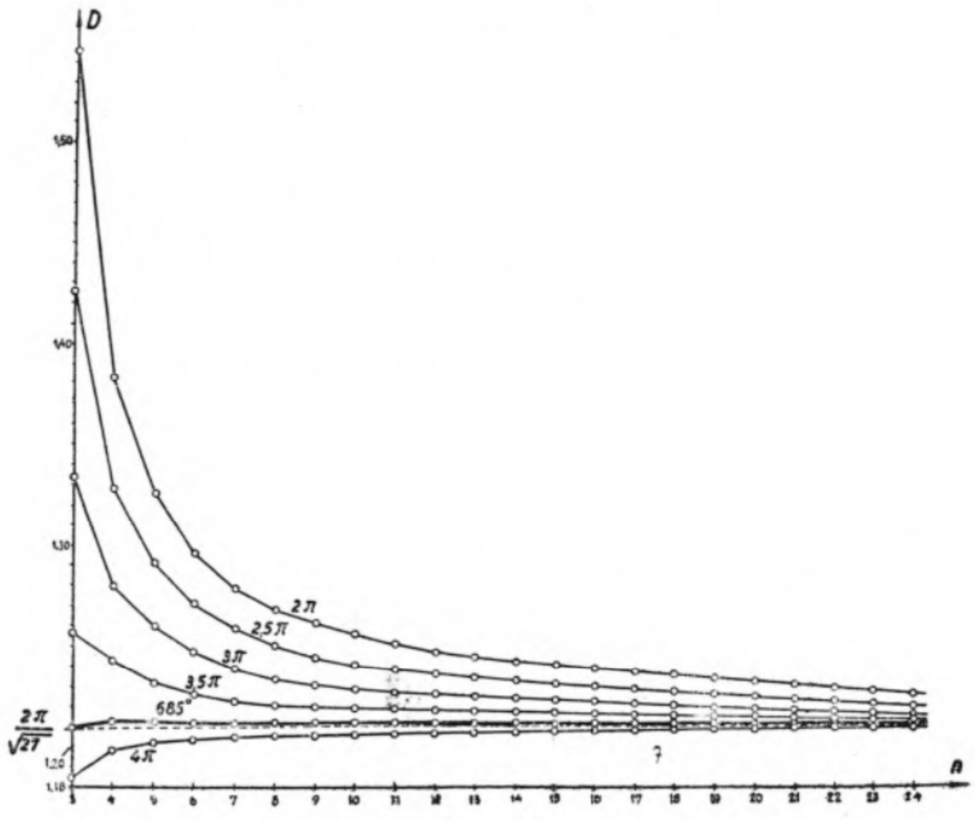
D
1,50
1,40
1,30
1,20
1,18
2π
$2{,}5\pi$
3π
$3{,}5\pi$
685°
4π
$\frac{2\pi}{\sqrt{27}}$
n

Fig 7.

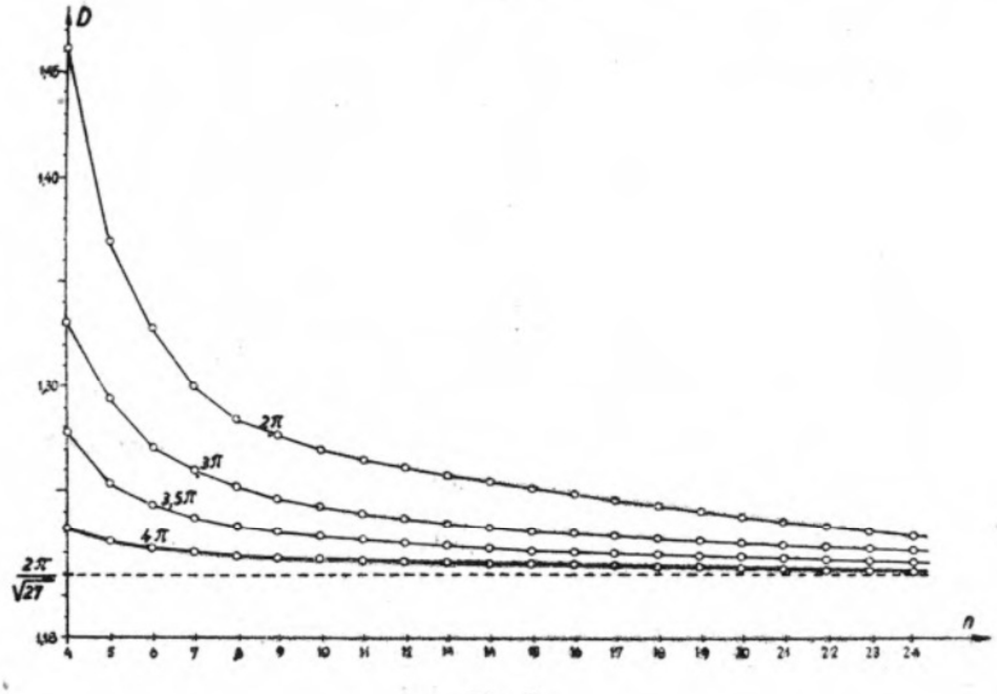
D
1,45
1,40
1,30
1,18
2π
3π
$3{,}5\pi$
4π
$\frac{2\pi}{\sqrt{27}}$
n

Fig. 8

die sich so ergebende Schranken von D dargestellt. Es stellt sich heraus, dass es eine wohlbestimmte Grösse $G_0 \approx 685°$ gibt, so daß für $G < G_0$ die Werte von D oberhalb $\frac{2\pi}{\sqrt{27}}$ bleiben. Dagegen ergibt unsere Ungleichung für $G > G_0$ im allgemeinen nicht die Ungleichung (2). In diesem Fall müssen daher andere Überlegungen benützt werden.

Bemerken wir zunächst, dass wir im Fall $\nu_{n+1} \geqq 4$, durch dieselbe Überlegungen wie oben, die Ungleichung

$$G \leqq 2n\left[\pi - \left(6 - \frac{10}{n}\right)\text{arc tg}\left(\cos r \,\text{tg}\,\frac{\pi n}{6n-10}\right)\right]$$

erhalten, aus der sich schon für jedem Wert von G die gewünschte Ungleichung (2) ergibt (Fig. 8). Wir können uns daher auf den Fall beschränken, dass $\nu_{n+1} = 3$ ist, dass also die Grenze von G durch genau drei Kreisen geschnitten wird.

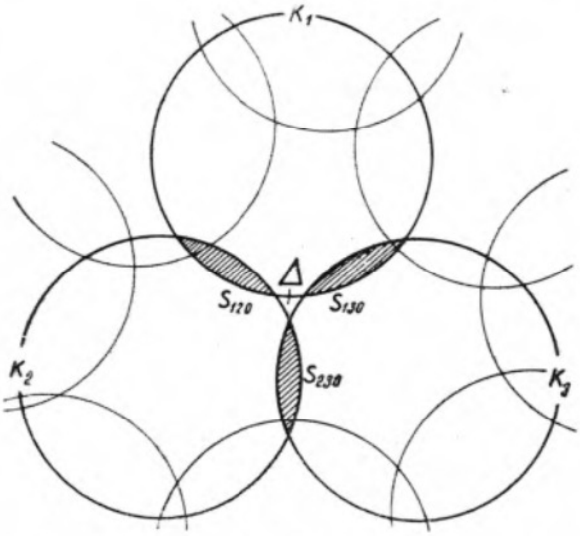

Fig. 9

Wir lassen die Konvexität von G fallen und betrachten den ungünstigsten Fall wobei $\overline{G} = \varDelta$ von den betrachteten drei Kreisen begrenztes Kreisbogendreieck ist. Wir wenden den im Fall $G \leqq 2\pi$ benützten Beweis an. Wir wollen zunächst die Summe $S_{120} + S_{230} + S_{310}$ abschätzen, wobei 1, 2 und 3 die Indexe der $\varDelta$ begrenzenden Kreise sind (Fig. 9). Es läßt sich leicht einsehen, daß bei einem festen Wert von $\varDelta$ die Summe $S_{120} + S_{230} + S_{310}$ sein Minimum im Fall $S_{120} = S_{230} = S_{310}$ erreicht. Bezeichnen wir dieses Minimum mit $S(\varDelta)$, so haben wir mit Rücksicht auf (2) und (3)

$$4\pi - \varDelta = G \leqq 2n\pi(1 - \cos r) -$$

$$-(2n-5)[\pi - 6\cos r \,\text{arc cotg}\,(\sqrt{3}\cos r)] - \frac{1}{2}S(\varDelta).$$

Die durch diese Ungleichung gelieferten unteren Schranken für D sind in Fig. 10 dargestellt. Die an die Kurven hingeschriebene Zahlen bedeuten die Inhalte des zum Kreisbogendreieck Δ gehörigen regulären sphärischen Dreiecks. Wollen wir z. B die Dichte bei $r=50^\circ$, $\Delta=15^\circ 32'$ abschätzen, so betrachten wir ein „konkaves" reguläres Kreisbogendreieck vom Inhalt $15^\circ 32'$, das von Kreisen vom Radius 50° begrenzt ist. Der Inhalt des von den Ecken dieses Dreiecks aufgespannten sphärischen Dreiecks beträgt angenähert 35°. Wir haben daher auf der Kurve 35° den zu $r=50^\circ$ gehörigen Wert abzulesen. Dieser Wert ist $>1{,}216$.

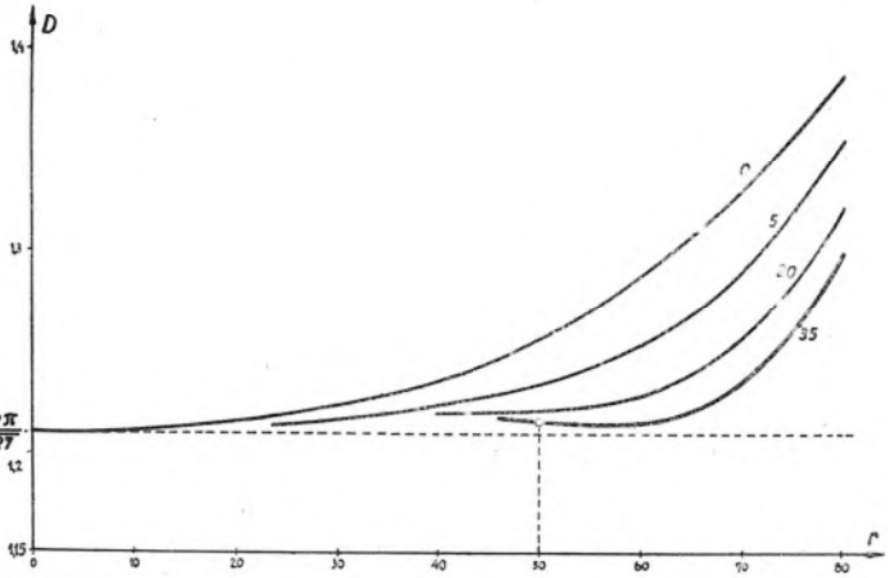

Fig. 10

Da unsere Kurven alle oberhalb der Gerade $D=\dfrac{2\pi}{\sqrt{27}}$ verlaufen und der Fall $4\pi - G > 35^\circ$ durch den vorigen Beweis erledigt wurde ist der Beweis von (1), unter der genannten Voraussetzung, für beliebige konvexe sphärische Gebiete dargetan.

(Eingegangen am 31. Juli 1953.)