Bemerkungen zur Realisierung der Hausdorffschen Axiome in abstrakten Mengen.

Von J. ACZÉL in Debrecen.

§ 1.

Der wesentliche Inhalt der hier folgenden kleinen Bemerkung kann durch folgende Analogie beleuchtet werden:

Die Wohlordnung ist eine Relation in einer Menge, die durch gewisse Axiome definiert ist. Man kann sich fragen, ob eine *gegebene* Relation diesen Axiomen genüge leistet. Man kann aber auch fragen, ob in einer beliebigen Menge eine Ordnung so *definiert* werden kann, daß sie den Wohlordnungsaxiomen genüge leistet. Auf die letztere Frage gibt der Wohlordnungssatz eine gewisse Antwort.

Ähnlich kann die Frage gestellt werden, ob die HAUSDORFFschen Umgebungsaxiome[1]) — bezüglich denen man *gegebene* Umgebungssysteme zu prüfen pflegt, ob sie ihnen genüge leisten — in jeder beliebigen Menge realisiert werden können, d. h. ob zu beliebigen Mengen Umgebungssysteme so *konstruiert* werden können, daß sie den HAUSSORFFschen Axiomen genüge leisten.

Die *Existenz* solcher Umgebungssysteme kann durch Einführung einer *Ordnung* in die Menge oder durch ihre *Abbildung* auf eine Menge mit einer bekannten Topologie leicht bewiesen werden. Die folgende kleine Bemerkung setzt sich aber das Ziel, solche Umgebungssysteme womöglich „effektiv" zu *konstruieren*.

Auf diese Frage habe ich in 1944 die folgende (§§ 1, 2) Antwort gefunden, die etwas abgerundet (§§ 3, 4) hier kurz mitgeteilt werden soll.

Triviale solche Umgebungssysteme sind diejenigen, in denen jedem Element auch das Element selbst als Umgebung zugeordnet wird, z. B. kann als Umgebung eines Elementes jede ihn enthaltende Teilmenge betrachtet werden. Man sieht gleich ein, daß dieses und jedes triviale Umgebungssystem den HAUSDORFFschen Axiomen genüge leistet.

[1]) F. HAUSDORFF: Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914.

Nichttrivial (im schwächeren Sinne) werden wir ein Umgebungssystem nennen, falls es *wenigsteins ein* Element gibt, dem das Element selbst nicht als Umgebung zugeordnet ist. Die Umgebungssysteme, deren Konstruktion hier folgen wird, sind sogar *im stärkeren Sinne* nichttrivial, d. h. es ist zu *keinem* Element das Element selbst als Umgebung zugeordnet. Ferner wollte ich mich nicht mit der Konstruktion eines einziges Umgebungssystems in einer beliebigen abstrakten Menge begnügen (was zum Beweise der Existenz genügte), viel mehr eine nicht allzu enge Mannigfaltigkeit solcher Umgebungssysteme gleichzeitig angeben.

§ 2.

Für *unendliche* Mengen kann ich die folgende *im stärkeren Sinne nichttriviale* Methode zur Bildung der Umgebungen angeben, das die HAUSDORFFschen Axiome in der folgenden schwächeren (3_1) Form elfüllt:

1. Der Durchschnitt zweier Umgebungen eines Elementes („Punktes") enthält eine Umgebung dieses Punktes.

2. Enthält eine Umgebung eines Punktes einen anderen Punkt, so enthält es auch eine Umgebung dieses Punktes.

3_1. Von zwei verschiedenen Punkten haben beide je eine Umgebung die den anderen Punkt nicht enthält. (T_1-Axiom[2]).)

In den Folgenden nennen wir *unendliche Klasseneinteilung* einer unendlichen Menge eine Einteilung dieser Menge in Teilmengen (Klassen) derart, daß

a) jedes Element der Menge zu genau einer Klasse gehört,

b_1) jede Klasse unendlich viele Elemente enthält.

Z. B. kann die ganze Menge selbst als eine einzige unendliche Klasse betrachtet werden.

Nun nennen wir Umgebungen eines Elementes

I. die Klasse, die dieses Element enthält,

II. eventuell die Vereinigung dieser Klasse mit anderen Klassen (derselben Einteilung),

III_1. die aus den bisherigen durch Weglassen von endlich vielen Elementen entstehende Mengen.

Es läßt sich unmittelbar nachweisen, daß diese Umgebungen den (schwächeren) Hausdorffschen Axiomen genüge leisten. Auch das ohne der Hinzunahme der unter II vorgeführten Umgebungen entstehende Umgebungssystem erfüllt diese Axiome.

Denn

---

[2]) П. С. Александров: Введение в общую теорию множеств и функции, Москва—Ленинград, 1948, S. 300—302.

1. der Durchschnitt zweier Umgebungen eines Elementes enthält immer die Klasse, zu der dieses Element gehört, höchstens mit Ausnahme endlich vieler Elemente, die ja auch selbst eine Umgebung ist;

2. enthält eine Umgebung eines Punktes einen anderen Punkt, so enthält sie auch die Klasse, zu der dieses Element gehört, höchstens mit Ausnahme endlich vieler Elemente;

3_1. auch falls die zwei Punkte zu derselben Klasse gehören (bei fremden Klassen ist 3_1. trivialerweise erfüllt), so ist laut III_1 auch die durch Weglassen des zweiten Punktes aus der Klasse entstehende Menge Umgebung des ersten Punktes, und umgekehrt.

§. 3.

Auch die ursprünglichen HAUSDORFFschen Axiome, d. h. 1., 2. und das folgende Axiom 3_2. können in abstrakten Mengen realisiert werden, falls man vom Auswahlaxiom Gebrauch macht:

3_2. Zu zwei verschiedenen Punkten gibt es immer zwei elementenfremde Umgebungen.

Jetzt werden wir eine derartige Klasseneinteilung unternehmen, daß

a) jedes Element zu genau einer Klasse angehöre, und

b_2) in jeder Klasse genau abzählbar viele Elemente enthalten sein sollen.

Wir ordnen diese *abzählbaren Klassen* nach dem Ordnungstypus $\omega^* + \omega$, d. h. nach der natürlichen (Größen-) Ordnung der ganzen Zahlen.

Umgebungen eines Elements werden jetzt sein

I. die Klasse, die dieses Element enthält;

II. eventuell die Vereinigung dieser Klasse mit anderen Klassen, und

III_2. die aus diesen Klassen so ausgewählte Teilmengen, daß von dem betrachteten Element ausgehend in beiden Richtungen jedes zweite, bzw. dritte, ... bzw. n-te Element der Umgebung angehört.

Diese letzteren werden wir n-Umgebungen nennen.

(Es können auch die aus I, II, III_2, durch Weglassen von endlich vielen Elementen enstehende Umgebungen hinzugenommen werden.)

Dieses Umgebungssystem erfüllt die Bedingungen 1., 2., 3_2.

1. Der Durchschnitt zweier Umgebungen eines Elementes, die den Typen I, II angehören, enthält eine Klasse. Der Durchschnitt einer n-Umgebung mit einer m-Umgebung enhält eine nm-Umgebung.

2. Enthält eine Umgebung (I, II) eines Punktes einen Punkt, so enthält sie auch seine Klasse. Enthält eine n Umgebung einen Punkt, so enthält sie auch die n-Umgebung dieses Punktes.

3_2. Gehören die zwei Punkte fremden Klassen an, so ist 3_2. trivialerweise erfüllt. Gehören sie derselben Klasse und sind zwischen ihnen in der $\omega^* + \omega$-Ordnung dieser Klasse n-Elemente, so sind die $(n+2)$-Umgebungen der beiden Punkte fremd.

Die Möglichkeit einer *abzählbaren* Klasseneinteilung war es wo das Auswahlaxiom vorausgesetzt wurde. — Es würde interessant sein auch hier ein nicht-triviales Umgebungssystem, das den HAUSDORFFschen Axiomen 1., 2., 3_2. genüge leistet, ohne Benutzung des Auswahlaxioms anzugeben.

§ 4.

Man sieht auch gleich ein, daß bei *endlichen* Mengen ein in dem obigen (schwächeren) Sinne nichttriviales Umgebungssystem, das auch nur dem schwächeren Axiomensystem 1., 3_1. genüge leistet, nicht angegeben werden kann, da es dann wenigstens einen Punkt gibt, der nicht seine eigene Umgebung ist, und wegen 1. müssen alle Umgebungen dieses Elementes eine Umgebung gemein enthalten, die laut der Definition der Nichttrivialität wenigstens noch ein Element enthalten muß. Für diese beiden „Punkte" ist aber das Axiom 3_1. nicht erfüllt.

Es gibt auch kein *im stärkeren Sinne* nichttriviales Umgebungssytem in endlichen Mengen, das den HAUSDORFFschen Axiomen 1., 2. und dem noch schwächeren Axiom 3_0 genüge leistet:

3_0. von zwei verschiedenen Punkten hat *wenigstens das eine* eine Umgebung die das andere nicht enthält.

Denn alle Umgebungen eines beliebigen Punktes a haben wieder eine, wenigstens noch ein Element b enthaltende Umgebung gemein. Bezeichne n die Zahl der Elemente in dieser Umgebung. Laut 2., der Nichttrivialität im stärkeren Sinne und 1. müssen wenigstens zwei Elemente dieser Umgebung auch in jeder Umgebung des Punktes b enthalten sein. Enthält der Durchschnitt aller Umgebungen des Punktes b den Punkt a nicht, so hat dieser Durchschnitt höchstens $(n-1)$ Elemente. Setzen wir dieses Verfahren fort, so erlangen wir in höchstens $(n-2)$ Schritten zu zwei Punkten von denen keiner eine Umgebung hat, die den anderen nicht enthält, im Widerspruch mit der Forderung 3_0.

Nichttriviale Umgebungssysteme im *schwächeren* Sinne, die 1., 2. und 3_0. erfüllen, kann man in endlichen Mengen leicht konstruieren; vgl. [2]).

(Eingegangen am 1. Oktober, 1953.)