Über Grundeinheitssysteme der irregulären Kreiskörper von besonderen Kongruenzeigenschaften.

Von PÉTER DÉNES in Budapest.

Im folgenden bezeichnen p eine ungerade Primzahl, r eine primitive Wurzel modulo p, $q=\frac{p-3}{2}$, ζ eine primitive p-te Einheitswurzel, $\Omega(\zeta)$ den Kreiskörper der p-ten Einheitswurzeln, $\lambda=1-\zeta$, $\mathfrak{l}=(\lambda)$.

§ 1.

In einer früheren Arbeit [1][1]) wurde der folgende Satz bewiesen: *Im Körper $\Omega(\zeta)$ gibt es ein unabhängiges Einheitssystem $\eta_1,\dots,\eta_q$, welches die Kongruenzen*

(1) $$\eta_i \equiv 1+\lambda^{2e_i} \pmod{\mathfrak{l}^{2e_i+1}} \qquad (i=1,\dots,q)$$

erfüllt, wobei $2e_i=u_i(p-1)+2i$ gilt, und $u_1,\dots,u_q$ das p-Charakter der Bernoullischen Zahlen bezeichnen.

Es ist möglich nicht nur unabhängige Einheitssysteme, sondern auch solche Grundeinheitssysteme in $\Omega(\zeta)$ aufzufinden, welche gleichartige Kongruenzen erfüllen; die in diesen Kongruenzen auftretenden Exponenten $e'_1,\dots,e'_q$ müssen allerdings nicht mit den Zahlen $e_1,\dots,e_q$ identisch sein. Wir können diese Tatsache im folgenden Satz formulieren:

Satz 1. *In dem zu der ungeraden Primzahl p gehörigen Kreiskörper $\Omega(\zeta)$ gibt es ein Grundeinheitssystem, welches die Kongruenzen*

(2) $$\delta_i \equiv a_i+b_i\lambda^{2e'_i} \pmod{\mathfrak{l}^{2e'_i+1}} \qquad (i=1,\dots,q)$$

erfüllt, wobei a_i und b_i $(i=1,\dots,q)$ ganze rationale, zu p prime Zahlen sind und $2e'_i=u'_i(p-1)+2i$ $(i=1,\dots,q)$ gilt. Hier sind $u'_1,\dots,u'_q$ nichtnegative ganze Zahlen, welche im folgenden „das p-Charakter der Kreiskörpergrundeinheiten“ gennant werden.

---

[1]) Die Nummern in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende dieser Arbeit.

Beweis. Die Einheiten $\gamma_1, \ldots, \gamma_q$ bezeichnen ein beliebiges Grundeinheitssystem in $\Omega(\zeta)$, für welche die Kongruenzen gelten:

$$\gamma_i \equiv m_i + n_i \lambda^{g_i} \pmod{\mathfrak{l}^{g_i+1}} \qquad (i = 1, \ldots, q),$$

wobei m_i, n_i $(i = 1, \ldots, q)$ ganze rationale, zu p prime Zahlen sind. Bezüglich der Exponenten $g_1, \ldots, g_q$ soll etwa ein Zusammenhang

$$g_1 \leqq g_i \qquad (i = 2, \ldots, q)$$

bestehen. Dann gibt es solche Zahlen $f_2, \ldots, f_q$, mit welchen in den Kongruenzen

$$\gamma_i' = \gamma_i \gamma_1^{f_i} = m_i' + n_i' \lambda^{g_i'} \pmod{\mathfrak{l}^{g_i'+1}} \qquad (i = 2, \ldots, q)$$

die Exponenten $g_2', \ldots, g_q'$ sämtlich größer sind, als g_1. Die Zahlen m_i', n_i' $(i = 2, \ldots, q)$ sind ganz rational und prim zu p; die Einheiten $\gamma_1, \gamma_2', \ldots, \gamma_q'$ bilden ein Grundeinheitssystem in $\Omega(\zeta)$. Dies folgt daraus, daß das Quotient der Determinanten der Logarithmen von den Einheiten $\gamma_1, \gamma_2', \ldots, \gamma_q'$ und den Einheiten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_q$ gemäß dem Multiplikationsregel gleich Eins ist:

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ f_2, & 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ f_3, & 0, & 1, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_q, & 0, & 0, & \ldots, & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Nun soll für die Exponenten $g_2', \ldots, g_q'$ etwa

$$g_2' \leqq g_i' \qquad (i = 3, \ldots, q)$$

gelten. Es gibt dann wieder solche Zahlen $f_3', \ldots, f_q'$, mit welchen in den Kongruenzen

$$\gamma_i'' = \gamma_i' \gamma_2'^{f_i'} \equiv m_i'' + n_i'' \lambda^{g_i''} \pmod{\mathfrak{l}^{g_i''+1}} \qquad (i = 3, \ldots, q)$$

sämtliche Exponenten $g_3, \ldots, g_q$ größer sind, als g_2. Die Zahlen m_i'', n_i'' $(i = 3, \ldots, q)$ sind ganze rationale, zu p prime Zahlen und die Einheiten $\gamma_1, \gamma_2', \gamma_3'', \ldots, \gamma_q''$ bilden ein Grundeinheitssystem in $\Omega(\zeta)$. Das Verfahren fortsetzend, gelangt man schließlich zu einem Grundeinheitssystem

(3) $$\Gamma_i \equiv M_i + N_i \lambda^{G_i} \pmod{\mathfrak{l}^{G_i+1}} \qquad (i = 1, \ldots, q),$$

wobei M_i, N_i ganze rationale, zu p prime Zahlen sind und für die Exponenten eine Ungleichungskette

(4) $$G_1 < G_2 < \cdots < G_q$$

aufstellbar ist.

Die Kette (4) enthält jedoch nicht unbedingt die möglichst größten Exponenten G eines Grundeinheitssystems, sondern kann wenigstens ein Exponent weiter erhöht werden, falls zwei Zahlen unter $G_1, \ldots, G_q$ nach dem Modul $p-1$ einander kongruent sind. Es sei z. B. $G_{i_2} \equiv G_{i_1} \pmod{p-1}$ und etwa $G_{i_2} = G_{i_1} + h(p-1)$, wobei h eine natürliche Zahl bezeichnet. Dann ist, mit den bisherigen Bezeichungen,

$$\Gamma_{i_1}^{p^h} \equiv (M_{i_1} + N_{i_1} \lambda^{G_{i_1}})^{p^h} \equiv M_{i_1}^{p^h} + M_{i_1}^{p^h-1} N_{i_1} p^h \lambda^{G_{i_1}} \pmod{p^h \mathfrak{l}^{G_{i_1}+1}},$$

oder, da $p^h \equiv \lambda^{h(p-1)} \pmod{\mathfrak{l}^{h(p-1)+1}}$ ist, auch

$$\Gamma_{i_1}^{p^h} \equiv M'_{i_1} + N'_{i_1} \lambda^{G_{i_2}} \pmod{\mathfrak{l}^{G_{i_2}+1}};$$

hierbei sind M'_{i_1} und N'_{i_1} zu p prime ganze rationale Zahlen. Bildet man also die Einheit

$$\Gamma'_{i_2} = \Gamma_{i_2} \cdot \Gamma_{i_1}^{F_{i_2} p^h} \equiv M'^{F_{i_2}}_{i_1} M_{i_2} + (F_{i_2} M_{i_2} M'^{F_{i_2}-1}_{i_1} N'_{i_1} + M'^{F_{i_2}}_{i_1} N_{i_2}) \lambda^{G_{i_2}} \pmod{\mathfrak{l}^{G_{i_2}+1}},$$

in welcher das Exponent F_{i_2} die Kongruenz

$$F_{i_2} \equiv -\frac{M'_{i_1} N_{i_2}}{M_{i_2} N'_{i_1}} \pmod{p}$$

erfüllt, dann ist

$$\Gamma'_{i_2} \equiv M'_{i_2} + N'_{i_2} \lambda^{G'_{i_2}} \pmod{\mathfrak{l}^{G'_{i_2}+1}},$$

wobei $G'_{i_2} > G_{i_2}$ ist und M'_{i_2}, N'_{i_2} ganze rationale, zu p prime Zahlen bedeuten. Die Einheiten $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{i_2-1}, \Gamma'_{i_2}, \Gamma_{i_2+1}, \ldots, \Gamma_q$ bilden ein Grundeinheitssystem aus $\Omega(\zeta)$. Wäre nun eine Ungleichungskette (4) nicht mehr gültig, so führt die Wiederholung der oben angewandten Methode zu einem solchen Grundeinheitssystem (3), für dessen Exponenten eine Ungleichungskette

(5) $$G''_1 < G''_2 < \cdots < G''_q$$

gilt. Sind in der Serie (5) wieder zwei Zahlen nach dem Modul $p-1$ kongruent, so läßt sich nochmals eine neue Kette

(6) $$G'''_1 < G'''_2 < \cdots < G'''_q$$

erzeugen, in welcher wenigstens eine Zahl größer ist, als die entsprechende Zahl in (5). Das Verfahren kann allerdings nur solange fortgesetzt werden, bis schließlich sämtliche Glieder der Ungleichungskette nach dem Modul $p-1$ inkongruent werden.

Daß dieses Ziel nach einer endlichen Operationsanzahl erreicht werden muß, kann folgenderweise bestätigt werden. Bei jedem Schritt wächst wenigstens ein Exponent in der Kette an. Erreicht ein Exponent G^*_q in der Serie $G^*_1, \ldots, G^*_q$ die Größe

(7) $$G^* \geqq (w+1)(p-1),$$

wo w den Irregularitätsgrad von p bezeichnet ([1], Satz 3), so ist die Einheit Γ^*:

$$\Gamma^*_q \equiv M^*_q + N^*_q \lambda^{G^*_q} \pmod{\mathfrak{l}^{G^*_q+1}}$$

die p-te Potenz einer Einheit H aus $\Omega(\zeta)$:

(8) $$\Gamma^*_q = H^p.$$

Die Einheit H kann als ein Potenzprodukt der Grundeinheiten $\Gamma_1^*, \dots, \Gamma_q^*$ ausgedrückt werden:

$$H = \Gamma_1^{*d_1} \dots \Gamma_q^{*d_q}; \tag{9}$$

hierbei bezeichnen $d_1, \dots, d_q$ ganze rationale Zahlen.

Aus (8) und (9) folgt die Gleichung

$$\Gamma_1^{*pd_1} \dots \Gamma_{q-1}^{*pd_{q-1}} \Gamma_q^{*pd_q-1} = 1,$$

welche für Grundeinheiten nur dann bestehen könnte, wenn sämtliche Exponenten verschwinden würden, woraus jedoch die Unmöglichkeit $pd_q = 1$ folgen müßte. Die Serie der wachsenden Ungleichungskette (4) muß daher schon vor Erreichung der Schranke (7) abbrechen und die Glieder der letzten Ungleichungskette ergeben die Exponenten $2e'_1, \dots, 2e'_q$ in (2), welche Zahlen also sämtlich inkongruent modulo $p-1$ sind:

$$e'_i = u'_i \frac{p-1}{2} + i \qquad (i = 1, \dots, q).$$

Die Zahlenserie $u'_1, \dots, u'_q$ besitzt eine große Wichtigkeit in der Struktur der irregulären Kreiskörper und deshalb haben wir ihr einen besonderen Namen: das p-Charakter des Kreiskörpergrundeinheiten, gegeben. Für diese Zahlen gelten insbesondere

$$u'_i \leqq u_i \qquad (i = 1, \dots, q);$$

hier sind $u_1, \dots, u_q$ das p-Charakter der Bernoullischen Zahlen. Diese Tatsache folgt aus dem Beweis des viel allgemeineren Satzes:

Satz 2. *In dem, zur ungeraden Primzahl p gehörigen Kreiskörper $\Omega(\zeta)$ gilt für jede Einheit ϑ in der Kongruenzform*

$$\vartheta \equiv c + d\lambda^{z(p-1)+2k} \pmod{\mathfrak{l}^{z(p-1)+2k+1}}, \tag{10}$$

wobei c und d ganze rationale, zu p teilerfremde Zahlen bezeichnen und $0 < k \leqq q$ ist, die Bedingung

$$z \geqq u'_k,$$

wo u'_k das k-te Glied im p-Charakter der Kreiskörpergrundeinheiten bezeichnet.

Beweis. Die einheit ϑ kann vermittelst der Grundeinheiten (2) folgenderweise ausgedrückt werden:

$$\vartheta = \prod_{i=1}^{q} \delta_i^{d_i}; \tag{11}$$

hier bezeichnen $d_1, \dots, d_q$ ganze rationale, höchstens durch $p^{n_1}, \dots, p^{n_q}$ teilbare Zahlen:

$$d_i = d'_i p^{n_i} \qquad (i = 1, \dots, q),$$

wobei $d'_1, \dots, d'_q$ ganze rationale, zu p prime Zahlen sind. Zufolge (2) kann man für die Faktoren des Produkts (11) die folgenden Kongruenzen feststellen:

$$\delta_i'^{d_i} \equiv A_i + B_i \lambda^{(u_i'+n_i)(p-1)+2i} \pmod{\mathfrak{l}^{(u_i'+n_i)(p-1)+2i+1}} \qquad (i=1,\ldots,q), \tag{12}$$

wo A_i und B_i $(i=1,\ldots,q)$ ganze rationale, zu p prime Zahlen sind. Unter den Exponenten von λ in (12) ist ein einziger, namentlich $(u_k'+n_k)(p-1)+2k$ mit $z(p-1)+2k$ modulo $p-1$ kongruent. Das Dividieren der Einheit ϑ durch Einheiten δ_i', $i \neq k$, kann also die Kongruenzstruktur (10) nicht verändern. Mit Rücksicht hierauf folgt aus (10) und (11) die Kongruenz

$$\frac{\vartheta}{\prod\limits_{i=1}^{k-1} \delta_i'^{d_i} \prod\limits_{i=k+1}^{q} \delta_i'^{d_i}} \equiv c' + d\lambda^{z(p-1)+2k} \pmod{\mathfrak{l}^{z(p-1)+2k+1}}, \tag{13}$$

wo c' eine ganze rationale, zu p prime Zahl bedeutet. Aus (11), (12), (13) ergibt sich sofort

$$z = u_k' + n_k,$$

womit der Beweis des Satzes beendet ist.

Satz 3. *Gibt es in dem, zur ungeraden Primzahl p gehörigen Kreiskörper $\Omega(\zeta)$ ein System von Grundeinheiten $\vartheta_1', \ldots, \vartheta_q'$, die den Kongruenzen*

$$\vartheta_i \equiv a_i' + b_i' \lambda^{2f_i} \pmod{\mathfrak{l}^{2f_i+1}} \qquad (i=1,\ldots,q) \tag{14}$$

genügen, wobei a_i', b_i' $(i=1,\ldots,q)$ ganze rationale, zu p teilerfremde Zahlen und $f_1,\ldots,f_q$ inkongruente Zahlen modulo $\frac{p-1}{2}$ sind, so sind

$$2f_i = u_i'(p-1) + 2i \qquad (i=1,\ldots,q).$$

Hier bezeichnen $u_1',\ldots,u_q'$ das p-Charakter der Kreiskörpergrundeinheiten.

Beweis. Da sowohl die Einheiten (2), als auch die Einheiten (14) Grundeinheiten in $\Omega(\zeta)$ sind, müssen auch Satz 2 die beiden Bedingungen

$$f_i \geqq e_i' \qquad (i=1,\ldots,q),$$
$$f_i \leqq e_i' \qquad (i=1,\ldots,q),$$

erfüllt werden. Damit ist Satz 3 vollständig bewiesen. Der Inhalt dieses Satzes rechtfertigt die gewählte Benennung der Zahlenserie $u_1',\ldots,u_q'$. Diese Zahlen spielen unter anderen in der Untersuchung der Klassenzahl der Kreiskörper eine wichtige Rolle; dies wird in einer späteren Arbeit erörtert.

§ 2.

In früheren Arbeiten [1], [2] haben wir für Zahlen aus $\Omega(\zeta)$ in Kongruenzform (2) die Kummerschen logarithmischen Hilsfunktionen angewendet. Bei diesen Rechnungen bedeutet der Operator D_z, daß man $\log \omega(e^v)$ z-mal nach v differentiiert und dann $v=0$ setzt. In diesem Paragraphen werden wir die Grundeinheiten des Körpers $\Omega(\zeta)$ nicht nur in Kongruenzformen (2) untersuchen, sondern stellen wir auch ihre Kongruenzeigenschaften bezüglich den logarithmischen Hilfsfunktionen fest. Mit Hilfe dieser Ergebnisse können wir spezielle Serien aus den Grundeinheiten (2) auswählen, deren logarithmische Hilsfunktionen gewisse Bedingungen erfüllen. Diese Grundeinheitssysteme bilden ein brauchbares Mittel für weitere Untersuchungen, von denen ein Teil im § 3. angezeigt wird.

Satz 4. *Bedeutet ϑ^{s^g} denjenigen konjugierten Wert der Einheit ϑ aus dem zur ungeraden Primzahl p gehörigen Kreiskörper $\Omega(\zeta)$, welcher der Substitution $\zeta \to \zeta^{r^g}$ entspricht, und sind j und t ganze rationale Zahlen mit $t \geqq 0, 0 < j \leqq q$, so ist*

$$D_{2jp^t} \log \vartheta^{s^g}(e^v) \equiv r^{2jgp^t} D_{2jp^t} \log \vartheta(e^v) \pmod{p^{t+1}}. \tag{15}$$

Beweis. Aus der Formel der Kreisenheiten

$$\varepsilon_k = \sqrt{\frac{(\zeta^{r^{k+1}}-1)(\zeta^{-r^{k+1}}-1)}{(\zeta^{r^k}-1)(\zeta^{-r^k}-1)}} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{16}$$

folgt [1]

$$\log \varepsilon_k(e^v) = \log r + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} (r^{2i}-1) \frac{B_i}{2i.(2i)!} r^{2ik} v^{2i}. \tag{17}$$

Aus der Definition (16) erhalten wir bei einer natürlichen Zähl z den Zusammenhang

$$\varepsilon_k = \varepsilon_{k+z\frac{p-1}{2}}, \tag{18}$$

ferner auch

$$\prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \varepsilon_k = 1. \tag{19}$$

Hireaus folgt, daß q verschiedene Kreiseinheiten ein unabhängiges Einheitssystem in $\Omega(\zeta)$ bilden, so daß die Einheit ϑ durch eine Relation

$$\vartheta^a = \prod_{k=1}^{q} \varepsilon_k^{d_k}$$

ausgedrückt werden kann, wo $a, d_1, \ldots, d_q$ ganze rationale Zahlen sind. Mit Hilfe von (19) kann diese Gleichung auf die Form

$$\vartheta = \prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \varepsilon_k^{\frac{a_k}{a}} \tag{20}$$

gebracht werden, wobei $a_1, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$ ganze rationale Zahlen sind. Gleichfalls erhalten wir aus (16) und (20)

$$(21) \qquad \vartheta^{s^g} = \prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \varepsilon_k^{s^g \cdot \frac{a_k}{a}} = \prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \varepsilon_{k+g}^{\frac{a_k}{a}}.$$

Aus (17), (20) und (21) folgen die Ausdrücke

$$(22) \qquad \log \vartheta(e^v) = C + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} (r^{2i}-1) \frac{B_i}{2i(2i)!} v^{2i} \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{a_k}{a} r^{2ik},$$

und

$$(23) \qquad \log \vartheta^{s^g}(e^v) = C + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} (r^{2i}-1) \frac{B_i}{2i(2i)!} v^{2i} \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{a_k}{a} r^{2i(k+g)},$$

wobei C eine Konstante bezeichnet. Bei Anwendung des Operators D_{2jp^t} auf (22) und (23) müssen wir in Betracht ziehen, daß die Einheiten ϑ und ϑ^{s^g} unendlich viele Formen in $\Omega(\zeta)$ besitzen und die obigen logarithmischen Funktionen sich nur auf eine gewisse Form beziehen; nach dem KUMMERschen Regel (siehe [3]) gilt jedoch immer die folgende Kongruenz

$$(24) \qquad D_{2jp^t} \log \vartheta(e^v) \equiv (r^{2jp^t}-1) \frac{B_{jp^t}}{2jp^t} \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{a_k}{a} r^{2jkp^t} \pmod{p^{t+1}},$$

beziehungsweise

$$(25) \qquad D_{2jp^t} \log \vartheta^{s^g}(e^v) \equiv (r^{2jp^t}-1) \frac{B_{jp^t}}{2jp^t} \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{a_k}{a} r^{2jp^t(k+g)} \pmod{p^{t+1}}.$$

Aus (24), (25) folgt der Beweis unmittelbar.

Satz 5. *Für jede Einheit ϑ aus dem, zur ungeraden Primzahl p gehörigen Kreiskörper $\Omega(\zeta)$ ist die Kongruenz*

$$(26) \qquad D_{2jp^{t_j}} \log \vartheta(e^v) \not\equiv 0 \pmod{p^{t_j+1}} \qquad (j = 1, \ldots, q)$$

nur für Werte $t_j \geqq u'_j$ möglich, wobei $u'_1, \ldots, u'_q$ das p-Charakter der Kreiskörpergrundeinheiten bezeichnen.

BEWEIS. Die Einheit ϑ soll etwa die Form

$$(27) \qquad \vartheta \equiv m + n\lambda^{z(p-1)+2i} \pmod{\lambda^{z(p-1)+2i+1}}, \ 0 < i \leqq q$$

haben, wo m und n ganze rationale, zu p prime Zahlen sind. Ist etwa $i = j$, so folgt der Beweis aus Satz 2 unmittelbar. Es sei also $i \neq j$. Wegen (27) ist dann ([2], Hilfssatz 2)

$$D_{2ip^z} \log \vartheta(e^v) \equiv p^z b_i \pmod{p^{z+1}},$$

wobei b_i eine ganze rationale, zu p prime Zahl ist. Bildet man die Einheit

$$\vartheta' = \vartheta^s \vartheta^{-r^{2ip^z}},$$

so gilt hiefür nach Satz 4

$$D_{2ip^z} \log \vartheta'(e^v) \equiv (r^{2ip^z} - r^{2ip^z}) p^z b_i \pmod{p^{z+1}};$$

die Einheit ϑ' hat also nach ([2], Satz 1.) die folgende Form

$$\vartheta' \equiv m' + n' \lambda^{z'(p-1)+2i'} \pmod{\mathfrak{l}^{z'(p-1)+2i'+1}}, \tag{28}$$

wobei m' und n' ganze rationale, zu p prime Zahlen sind und

$$z'(p-1) + 2i' > z(p-1) + 2i$$

gilt. Ferner ist $i' \neq i$, wie dies aus der notwendigen Inkongruenz

$$D_{2i'p^{z'}} \log \vartheta'(e^v) \equiv p^{z'} b'_{i'} (r^{2i'p^{z'}} - r^{2ip^z}) \not\equiv 0 \pmod{p^{z'+1}}$$

folgt, welche nach (28) und ([2], Hilfssatz 2) aufstellbar ist. Wegen unserer obigen Annahme können wir noch die Inkongruenz für $t_j < u'_j$

$$D_{2jp^{tj}} \log \vartheta'(e^v) \equiv (r^{2jp^{tj}} - r^{2ip^z}) D_{2jp^{tj}} \log \vartheta(e^v) \not\equiv 0 \pmod{p^{tj+1}} \tag{29}$$

feststellen, da aus $i \neq j$ auch $r^{2jp^{tj}} \not\equiv r^{2ip^z} \pmod{p}$ folgt, und daher (29) nur dann verschwinden kann, wenn auch (26) verschwindet. Die Einheit ϑ' nach (28) kann also die Einheit ϑ in (26) vertreten, nur ist für die möglichen q Werte von i' ein Wert, namentlich i schon ausgeschlossen.

Ist nun $i' = j$, so liefert Satz 2 wieder den Beweis. Es sei also $i' \neq j$ Die Einheit

$$\vartheta'' = \vartheta'^{s} \vartheta'^{-r^{2i'p^{z'}}}$$

erfüllt die Kongruenz

$$\vartheta'' \equiv m'' + n'' \lambda^{z''(p-1)+2i''} \pmod{\mathfrak{l}^{z''(p-1)+2i''+1}}, \tag{30}$$

wobei m'' und n'' ganze rationale, zu p prime Zahlen sind und

$$z''(p-1) + 2i'' > z'(p-1) + 2i'$$

gilt. Wie oben, können wir auch $i'' \neq i'$ beweisen, und ferner, daß die Kongruenz

$$D_{2jp^{tj}} \log \vartheta''(e^v) \equiv 0 \pmod{p^{tj+1}} \tag{31}$$

dann und nur dann erfüllt ist, wenn auch (26) verschwindet. Wir müssen noch auch $i'' \neq i$ zeigen; dies folgt jedoch sofort aus (30), Satz 4 und ([2], Hilfssatz 2):

$$D_{2i''p^{z''}} \log \vartheta''(e^v) \equiv (r^{2i''p^{z''}} - r^{2i'p^{z'}}) D_{2i''p^{z''}} \log \vartheta'(e^v) \equiv$$
$$\equiv (r^{2i''p^{z''}} - r^{2i'p^{z'}})(r^{2i''p^{z''}} - r^{2ip^z}) D_{2i''p^{z''}} \log \vartheta(e^v) \not\equiv 0 \pmod{p^{z''+1}},$$

wo $D_{2i''p^{z''}} \log \vartheta(e^v)$ genau durch $p^{z''}$ teilbar ist.

Die Einheit ϑ'' kann also die Einheit ϑ in (26) vertreten; ist $i'' = j$, so haben wir wieder den vollen Beweis. Ist dies nicht der Fall, so können wir in obiger Weise weitergehen und gelangen wir höchstens nach $\frac{p-1}{5}$ Schritten zu einer Einheit:

$$\vartheta^* \equiv m^* + n^* \lambda^{z^*(p-1)+2i^*} \pmod{\mathfrak{l}^{z^*(p-1)+2i^*+1}} \tag{32}$$

wobei m^* und n^* ganze rationale, zu p prime Zahlen sind und $i^* = j$ sein muss. Die Anwendung von Satz 2 vollendet dann den Beweis.

Satz 6. *In dem, zu der ungeraden Primzahl p von Irregularitätsgrad w gehörigen Kreisköper $\Omega(\zeta)$ gibt es ein System von Grundeinheiten $\delta_1, \ldots, \delta_q$, welche die Kongruenzen* (2) *erfüllen und für welche ferner auch die Kongruenzen*

$$D_{2jp^t} \log \delta_i(e^v) \equiv 0 \pmod{p^{t+1}} \qquad (j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, q) \tag{33}$$

für eine beliebig gewählte natürliche Zahl $t, t \geqq w$ bestehen.

Beweis. Wir wählen unter den Grundeinheitssystemen von $\Omega(\zeta)$ nach Pollaczek [4][2]) ein solches, welches die Relation

$$\delta_i^s \delta^{-r^{2ip^t}} = \vartheta_i^{p^{t+1}} \qquad (i = 1, \ldots, q) \tag{34}$$

erfüllt, wobei $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_q$ Einheiten in $\Omega(\zeta)$ sind. Wendet man den Operator D_{2jp^t} auf die Einheiten (34), so sind die erhaltenen Werte wegen der rechten Seite dieser Gleichung unbedingt durch p^{t+1} teilbar; nach Satz 4 folgt also

$$(r^{2jp^t} - r^{2ip^t}) D_{2jp^t} \log \delta_i(e^v) \equiv 0 \pmod{p^{t+1}},$$

und hieraus für $j \neq i$ die Kongruenz (33). Wir müssen noch bestätigen, dass die Einheiten δ_i in (34) die Kongruenzen (2) erfüllen. Die Einheit δ_i kann der Kongruenz (33) für $i = j$ nicht genügen, weil sie dann gemäss ([2], Satz 1) mit einer ganzen rationalen Zahl modulo p^{t+1} und zufolge $t \geqq w$ auch modulo p^{w+1} kongruent wäre. Dann wäre δ_i nach ([1], Satz 3) die p-te Potenz einer Einheit in $\Omega(\zeta)$ und könnte nicht, wie wir es anhand von (8) gezeigt haben, eine Grundeinheit in $\Omega(\zeta)$ sein. Die Einheit δ_i muss also demzufolge eine Form

$$\delta_i \equiv a_i + b_i \lambda^{z_i(p-1)+2i} \pmod{\mathfrak{l}^{z_i(p-1)+2i+1}}$$

haben, wobei a_i und b_i ganze rationale, zu p prime Zahlen und $z_i < t$ sind. Nach Satz 2 und 3 muß $z_i = u_i'$ $(i = 1, \ldots, q)$ sein und damit ist der Beweis vollendet.

§ 3.

Mit Hilfe der Grundeinheiten des Satzes 6 können wir die Sätze bezüglich der p-ten Einheitspotenzen des Körpers $\Omega(\zeta)$ in [1] verschärfen. Es bezeichne w' die größte der Zahlen $u_1', \ldots, u_q'$. Wir nennen diese Zahl den reduzierten Irregularitätsgrad der Primzahl p. Durch geeignete Wahl von $t (t > w' + z)$ und durch Anwendung der Grundeinheiten des Satzes 6 anstatt der unabhängigen

[2]) Siehe insbesondere Satz IIa.

Einheiten des Satzes 1 in [1] können wir in ganz analoger Weise, wie bei Sätzen 2 und 3 in [1], die folgenden Sätze beweisen:

Satz 7. *Ist ε eine Einheit des zur ungeraden Primzahl p gehörigen Kreiskörpers $\Omega(\zeta)$, für welche die Kongruenzen*

$$D_{2ip^{u_i'}} \log \varepsilon(e^v) \equiv 0 \pmod{p^{u_i'+z}} \qquad (i = 1, \ldots, q) \tag{35}$$

gelten (wo z eine natürliche Zahl ist und $u_1', \ldots, u_q'$ das p-Charakter der Kreiskörpergrundeinheiten bezeichnen), so ist ε die p-te Potenz einer Einheit in $\Omega(\zeta)$.

Satz 8. *Ist ε eine Einheit des zur ungeraden Primzahl p gehörigen Kreiskörpers $\Omega(\zeta)$, welche einer ganzen rationalen Zahl modulo $p^{u'+z}$ kongruent ist, so ist ε die p^z-te Potenz einer Einheit in $\Omega(\zeta)$.*

Literaturverzeichnis.

[1] P. Dénes, Über irreguläre Kreiskörper. *Publ. Math. Debrecen,* **3** (1953), 17—23.

[2] P. Dénes, Über die Kummerschen logarithmischen Hilfsfunktionen. *Acta Sci. Math. Szeged,* **15** (1954), 115—125.

[3] P. Dénes, Proof of a conjecture of Kummer. *Publ. Math. Debrecen,* **2** (1952), 206—214.

[4] F. Pollaczek, Über die irregulären Kreiskörper der l-ten und l^2-ten Einheitswurzeln. *Math. Z.* **21** (1924), 1—38.

(Eingegangen am 2. März, 1954.)