Über die Bestimmung konjugierter harmonischer Funktionen.

Von G. TARGONSZKY und Z. BOGNÁR in Budapest.

Die konjugierte Funktion $v(x, y)$ einer harmonischen Funktion $u(x, y)$ wird durch das Linienintegral $\int(-u_y dx + u_x dy)$ bestimmt. Wir möchten auf die einfache, unseres Wissens nach aber bisher nicht bekannte Tatsache hinweisen, daß in einem oft vorkommenden Falle die konjugierte Funktion ohne Berechnung des Linienintegrals, fast unmittelbar bestimmt werden kann.

Dies ist möglich, wenn die zu $u(x, y)$ gehörende analytische Funktion $u(x, y) + iv(x, y)$ — abgesehen höchstens von einer ohnehin belanglosen imaginären additiven Konstante — für reelle Werte von $x + iy = z$ reell ist.

Wir behaupten, daß in diesem Falle — vorläufig rein formell —

$$u(x, y) + iv(x, y) = u(x + iy, 0) \tag{1}$$

gilt. Wir rechtfertigen diese formelle Regel durch einen, unserer Meinung nach auch an sich interressanten Hilfssatz. Wir benutzen die Tatsache, daß $u(x, y)$ und $v(x, y)$ als harmonische Funktionen ins Komplexe analytisch fortgesetzt werden können und bezeichnen diese Fortsetzungen mit $U(\xi, \eta)$, bzw. $V(\xi, \eta)$, wo ξ und η komplex sind, und für reelle Werte von ξ und η $U(\xi, \eta) = u(\xi, \eta)$ und $V(\xi, \eta) = v(\xi, \eta)$ gilt.

Lemma. *Die komplexe Funktion $u(x, y) + iv(x, y)$ ist dann und nur dann analytisch, wenn*

$$U(x + iy, 0) + iV(x + iy, 0) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{2}$$

gilt. In diesem und nur in diesem Falle gilt auch

$$U(0, y - ix) + iV(0, y - ix) = u(x, y) + iv(x, y). \tag{3}$$

BEWEIS. Die Bedingung ist hinreichend. Die linke Seite in (2) ist nämlich jedenfalls analytisch, und wenn (2) besteht, muß es auch die rechte Seite sein. — Die Bedingung ist aber auch notwendig. Denn ist auch die rechte Seite analytisch, so gilt für $y = 0$

$$U(x, 0) + iV(x, 0) = u(x, 0) + iv(x, 0).$$

Aus dieser Übereinstimmung längs der reellen Achse folgt schon die Identität der beiden Seiten. Ein Beweis für (3) wird durch einen ganz ähnlichen Gedankengang erhalten.

Wenn wir (2) oder (3) nach x und y partiell differenzieren, erhalten wir die CAUCHY—RIEMANNschen Gleichungen.

Nun beweisen wir (1) in einer nunmehr präzisen Form:

Satz. *Bezeichnet $v(x, y)$ die Konjugierte der harmonischen Funktion $u(x, y)$ und $U(\xi, \eta)$ die analytische Fortsetzung von $u(x, y)$ auf die komplexe Ebene, ist ferner $v(x, 0) = 0$, so gilt*

$$u(x, y) + i v(x, y) = U(x + iy, 0). \tag{4}$$

Beweis. Ist $v(x, 0) = 0$, so muß in

$$u(x, y) + i v(x, y) = U(x + iy, 0) + i V(x + iy, 0)$$

das zweite Glied der rechten Seite für $y = 0$ identisch verschwinden. Also besteht

$$u(x, y) + i v(x, y) = U(x + iy, 0)$$

längs der reellen Achse. Daher gilt (4) identisch.

Beispiele. 1) (Zum Satz.)

$$u = 2x^3 - 3(2x + 1)y^2 + 3x^2 + 5x + 1$$

Nach dem Satze müssen wir

$$2(x + iy)^3 + 3(x + iy)^2 + 5(x + iy) + 1 = 2x^3 - 6xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + \\ + 5x + 1 + i(6x^2y - 2y^3 + 6xy + 5y)$$

bilden und wegen (4) wird

$$v = 6x^2y - 2y^3 + 6xy + 5y.$$

Es ist stets notwendig zu kontrollieren ob

$$\Re e\, U(x + iy, 0) = u(x, y)$$

gilt, da dann und nur dann $v(x, y) = \Im m\, U(x + iy, 0)$ wirklich die harmonische Konjugierte von $u(x, y)$ ist, und damit die Anwendung von (4) gerechtfertigt ist.

2) (Zum Lemma.)

Die Funktion

$$e^{x^3 - 3xy^2}[\cos(3x^2y - y^3)\sin x \operatorname{ch} y - \sin(3x^2y - y^3)\cos x \operatorname{sh} y] + \\ + ie^{x^3 - 3xy^2}[\sin(3x^2y - y^3)\sin x \operatorname{ch} y + \cos(3x^2y - y^3)\cos x \operatorname{sh} y]$$

ist analytisch, denn (2) wird zur Identität

$$u(x, y) + i v(x, y) = U(x + iy, 0) = e^{(x+iy)^3}\sin(x + iy).$$

Wir sehen zugleich, daß es sich in „geschlossener" Form um die Funktion $e^{z^3}\sin z$ handelt.

Unsere Bemerkung kann also in zwei Richtungen verwertet werden. Erstens kann im besprochenen, oft vorkommenden Falle die Konjugierte einer vorgelegten harmonischen Funktion ohne Integration durch die Formel (4) gewonnen werden. — Zweitens kann durch die Formel (2) oder (3) eine vorgelegte analytische Funktion $u(x, y) + i v(x, y)$ auf die Form $f(x + iy) = f(z)$ gebracht werden.

(Eingegangen am 20. April 1954.)