Eine neue Definition der Determinanten.

Von JULIUS GÁSPÁR in Miskolc (Ungarn).

In der axiomatischen Theorie der Determinanten sind Axiomensysteme bekannt, die an die Zeilen oder (was auf dasselbe hinausgeht) an die Spalten der Determinante anknüpfen (WEIERSTRASS, CARATHÉODORY, SCHREIER bzw. ARTIN [1])). Dagegen zeichnet das Axiomensystem von MENGER [2]) weder die Zeilen noch die Spalten aus. Ähnliches bezieht sich auf die bekannte Charakterisierung der Determinante als nichtkonstantes Polynom von minimalem Grad seiner Elemente, das dem Multiplikationssatz genügt.[3])

Wir geben hier ein Axiomensystem für die Determinanten bestehend aus drei Axiomen, die je eine Eigenschaft von ihnen im Zusammenhang mit den drei Verknüpfungen von Matrizen — nämlich Addition, Multiplikation und Operatorprodukt — festsetzen.

Es sei K ein beliebiger kommutativer Körper der Charakteristik 0.[4]) Mit $A, B, \ldots$ bezeichnen wir Elemente des vollen Matrizenringes K_n vom Grade n über K.

Unter den *Zeilenkombinationen* von A und B verstehen wir alle 2^n Matrizen in K_n, für deren i-te Zeile entweder die i-te Zeile von A oder die von B genommen wird ($i=1, \ldots, n$). Entsprechend definieren wir die *Spaltenkombinationen* von A und B.

Satz. *Ist φ eine nichtkonstante Abbildung von K_n in K, die der Axiomen*

(a) $\varphi(A+B)=\Sigma\varphi(C)$,

(b) $\varphi(AB)=\varphi(A)\varphi(B)$,

(c) $\varphi(aA)=a^n\varphi(A)$

---

[1]) EMIL ARTIN, Galois Theory, 1944, *Notre Dame Mathematical Lectures.*

[2]) K. MENGER, Une théorie axiomatique générale des déterminants. *C. R. Acad. Sci. Paris,* **234** (1952), 1941—43.

[3]) Siehe z. B. C. C. MAC DUFFEE, The theory of matrices, (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. 2, 1933), 6—7.

[4]) Tatsächlich ist der folgende Satz auch bei Zugrundelegung eines beliebigen kommutativen nullteilerfreien Ringes der Charakteristik 0 mit Einselement gültig. Die Voraussetzung der Charakteristik 0 ist aber wesentlich!

genügt, wobei in (a) *über alle Zeilen- oder Spaltenkombinationen* C *von* A *und* B *zu summieren ist und* a *beliebige Elemente von* K *bezeichnet, so ist* $\varphi(A)$ *die Determinante von* A.

Den Beweis des Satzes arbeiten wir der besseren Übersichtlichkeit halber nur für $n=3$ aus, wodurch aber auch der allgemeine Fall genügend beleuchtet wird. Wir beginnen mit der folgenden Behauptung:

(d) Es ist $\varphi(A)=0$, wenn eine Zeile oder Spalte von A verschwindet.

Es genügt dies für den Fall einer verschwindenden Spalte zu beweisen. Ist sogar $A=0$, so folgt (d) aus (c) mit $a=0$. Für das übrige wenden wir (a) auf eine Matrix $A=(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c})$ mit den Spalten $\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}$ und auf $B=0$ an:

$$\varphi(A)=\varphi(A)+\varphi(\mathfrak{a},\mathfrak{b},0)+\varphi(\mathfrak{a},0,\mathfrak{c})+\varphi(0,\mathfrak{b},\mathfrak{c})+\varphi(\mathfrak{a},0,0)+ \\ +\varphi(0,\mathfrak{b},0)+\varphi(0,0,\mathfrak{c})$$

d. h.

$$\varphi(\mathfrak{a},\mathfrak{b},0)+\varphi(\mathfrak{a},0,\mathfrak{c})+\varphi(0,\mathfrak{b},\mathfrak{c})+\varphi(\mathfrak{a},0,0)+\varphi(0,\mathfrak{b},0)+\varphi 0,0,\mathfrak{c})=0.$$

Man setze hier $\mathfrak{b}=\mathfrak{c}=0$ ein, wodurch $3\varphi(\mathfrak{a},0,0)=0$, d. h. $\varphi(\mathfrak{a},0,0)=0$ entsteht.[4]) Ähnlich entstehen $\varphi(0,\mathfrak{b},0)=0$, $\varphi(0,0,\mathfrak{c})=0$. Hiernach hat man:

$$\varphi(\mathfrak{a},\mathfrak{b},0)+\varphi(\mathfrak{a},0,\mathfrak{c})+\varphi(0,\mathfrak{b},\mathfrak{c})=0.$$

Für $\mathfrak{c}=0$ folgt hieraus $\varphi(\mathfrak{a},\mathfrak{b},0)=0$. Ähnlich bekommen wir $\varphi(\mathfrak{a},0,\mathfrak{c})=0$, $\varphi(0,\mathfrak{b},\mathfrak{c})=0$, womit (d) bewiesen ist.

Nun beweisen wir die folgende wichtige Formel:

$$\varphi\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\varphi\begin{pmatrix}a_{11}&0&0\\0&a_{22}&0\\0&0&a_{33}\end{pmatrix}+\varphi\begin{pmatrix}a_{11}&0&0\\0&0&a_{23}\\0&a_{32}&0\end{pmatrix}+\varphi\begin{pmatrix}0&a_{12}&0\\a_{21}&0&0\\0&0&a_{33}\end{pmatrix}+ \\ +\varphi\begin{pmatrix}0&a_{12}&0\\0&0&a_{23}\\a_{31}&0&0\end{pmatrix}+\varphi\begin{pmatrix}0&0&a_{13}\\a_{21}&0&0\\0&a_{32}&0\end{pmatrix}+\varphi\begin{pmatrix}0&0&a_{13}\\0&a_{22}&0\\a_{31}&0&0\end{pmatrix}. \tag{1}$$

Zu diesem Zweck wenden wir (a) mit

$$A=\begin{pmatrix}0&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}a_{11}&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

an. Wegen (d) gilt:

$$\varphi\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\varphi\begin{pmatrix}0&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}+\varphi\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\0&a_{22}&a_{23}\\0&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}.$$

Diese Formel entstand unter Auszeichnung des Elementes a_{11}, offenbar gelten aber weitere acht ähnliche Formeln, die man je unter Auszeichnung der Elemente $a_{12},\ldots,a_{33}$ erhält. Werden diese rechts wiederholt angewendet, so erhält man schließlich auf der rechten Seite nur solche Matrizen, die in jeder Spalte höchstens ein nicht verschwindendes Element enthalten. Somit entsteht unter Berücksichtigung von (d) die zu beweisende Gleichung (1).

Wir bezeichnen insbesondere mit $E=(\delta_{ik})$ die Einheitsmatrix, mit $E_{ik}(a)$ die Matrix, die aus E durch Ersetzung von δ_{ik} mit a entsteht, ferner mit P_{rst} diejenige Matrix (a_{ik}), in der $a_{1r}=a_{2s}=a_{3t}=1$ ist und die übrigen a_{ik} gleich 0 sind, wobei r, s, t eine Permutation von $1, 2, 3$ bezeichnet. Dann zeigen wir:

$$\varphi(E_{ii}(a))=a, \tag{2}$$

$$\varphi(E_{ik}(a))=1, \qquad (i\neq k), \tag{3}$$

$$\varphi(P_{rst})=1 \text{ bzw. } -1, \tag{4}$$

je nachdem r, s, t eine gerade oder ungerade Permutation von $1, 2, 3$ ist.

Zuerst bemerken wir, daß aus (*b*) (und aus der Voraussetzung, daß die Abbildung φ nichtkonstant ist) unmittelbar $\varphi(E)=1$ folgt. Somit gilt wegen $P_{rst}^6=E$ und (b) $\varphi(P_{rst})^6=\varphi(E)=1$, d. h. $\varphi(P_{rst})\neq 0$. Daraus und aus den Gleichungen

$$P_{213}E_{11}(a)=E_{22}(a)P_{213}, \quad P_{321}E_{11}(a)=E_{33}(a)P_{321}$$

folgt nach (b), daß die $\varphi(E_{ii}(a))$ einander gleich sind:

$$\varphi(E_{11}(a))=\varphi(E_{22}(a))=\varphi(E_{33}(a)). \tag{5}$$

Da ihr Produkt nach (b), (c) gleich $\varphi(aE)=a^3\varphi(E)=a^3$ ist, wir erhalten

$$\varphi(E_{ii}(a))=\varrho a \qquad (i=1, 2, 3) \tag{6}$$

mit einer, im Körper K vorhandenen dritten Einheitswurzel ϱ. Wendet man nun (a) zur Bestimmung von

$$\varphi((a+1)E)=\varphi(aE+E)$$

an, so ergibt sich, unter Berücksichtigung von (c), $\varphi(E)=1$, (6) und

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E_{11}(a)E_{22}(a) \qquad (\text{u. s. w.}),$$

folgende Gleichung für a:

$$(a+1)^3=a^3+3\varrho^2a^2+3\varrho a+1.$$

Gilt in (6) $\varrho\neq 1$, so ist der Grad dieser Gleichung positiv, da in diesem Falle der Koeffizient von a gewiß nicht verschwindet.[5]) Daraus folgt, daß es nur endlich viele Elemente $a\in K$ gibt, für welche in (6) $\varrho\neq 1$ gelten kann. Demgemäß ergibt sich[6]) für ein passendes Element $d\in K$

$$\varphi(E_{11}(a-d))=a-d, \quad \varphi(E_{11}(d))=d. \tag{7}$$

---

[5]) Hier wird $n>1$ für den Grad n von K_n vorausgesetzt. Das ist erlaubt, da in dem Falle $n=1$ die Richtigkeit uuseres Satzes unmittelbar klar ist. (Übrigens ergibt schon (6) in diesem trivialen Falle die zu beweisende Gleichung (2).)

[6]) Man beachte, dass K ein unendlicher Körper ist.

Dann aber erhalten wir auf Grund von

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}(a-d) & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}d & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right)$$

mit Rücksicht auf (a), (d) und (7)

$$\varphi(E_{11}(a))=a-d+d=a.$$

Dies ergibt zusammen mit (5) die Richtigkeit von (2).

Die Anwendung von (a) auf $A=E, B=E_{ik}(a)-E \quad (i\neq k)$ ergibt nach (d):

$$\varphi(E_{ik}(a))=\varphi(E)=1,$$

womit (3) bewiesen ist.

Da die Matrizen P_{rst} eine mit der vollen Permutationsgruppe von $1, 2, 3$ isomorphe Gruppe bilden, so genügt es wegen (b), wenn wir (4) für eine solche Matrix P_{rst} beweisen, die einer Transposition entspricht. Nehmen wir z. B. P_{213}. Es gilt

$$E_{21}(-1)E_{12}(1)E_{21}(-1)P_{213}=E_{22}(-1).$$

Wegen (2), (3) und (b) folgt hieraus $\varphi(P_{213})=-1$, womit (4) bewiesen ist.

Nunmehr bezeichne (a, b, c) die Diagonalmatrix mit der Diagonale a, b, c. Wegen (2), (b) und $(a, b, c)=E_{11}(a)\cdot E_{22}(b)\cdot E_{33}(c)$ bekommt man

$$\varphi(a, b, c)=abc. \tag{8}$$

Da für $A=(a_{ik})$ nach (1)

$$\varphi(A)=\sum_{r,s,t}\varphi((a_{1r}, a_{2s}, a_{3t})P_{rst})$$

gilt, wobei über alle Permutationen r, s, t von $1, 2, 3$ zu summieren ist, so folgt aus (b), (8), (4) die Übereinstimmung von $\varphi(A)$ mit der Determinante von A. Somit haben wir den Satz bewiesen.

Für die gefällige Hilfe in der Abfassung dieser Arbeit spreche ich meinen besten Dank Herrn Professor L. Rédei aus.

(*Eingegangen am 5. Juli, 1954.*)