Sur une propriété du nombre de diviseurs.

Par ANDRZEJ SCHINZEL à Varsovie.

Le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant concernant la fonction numérique $\Theta(n)$, où $\Theta(n)$ désigne le nombre de diviseurs de n.

Théorème. *Quels que soient les nombres naturels h et m, il existe un nombre naturel $n > 1$ tel que*

$$\frac{\Theta(n)}{\Theta(n \pm i)} > m \quad \textit{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, h.$$

DÉMONSTRATION. Soient h et m deux nombres naturels donnés. Désignons par c le plus grand des nombres $\Theta(i)$, où $i = 1, 2, \ldots, h$ et soit k un nombre naturel tel que $2^{k-1} > cm$, p_i désignant le i-ème nombre premier, il existe évidemment un nombre naturel l tel que

$$p_{k+l} > h!\, p_1 p_2 \cdots p_k. \tag{1}$$

Posons

$$n = h!\, p_1 p_2 \cdots p_{k+l}. \tag{2}$$

Les nombres $n \pm i$, où $i = 1, 2, \ldots, h$ sont évidemment $> i$ et divisibles par i: soit i un des nombres $1, 2, \ldots, h$ et soit

$$n \pm i = i q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_s^{\alpha_s}, \tag{3}$$

où $q_1 < q_2 < \cdots < q_s$ sont des nombres premiers.

D'après (2) on a

$$n \pm i = i\left(\frac{h!}{i} p_1 p_2 \cdots p_{k+l} \pm 1\right)$$

et il en résulte tout de suite que le nombre $(n \pm i)/i$ n'est pas divisible par aucun des nombres $p_1, p_2, \ldots, p_{k+l}$. Il résulte donc de (3) et (1) que $q_1 > p_{k+l} > h!\, p_1 p_2 \cdots p_k$ d'où $q_1 > h!\, p_1 p_2 \cdots p_k + 1$ et $p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_{k+l} < q_1^l$, donc $q_1^{l+1} > h!\, p_1 p_2 \cdots p_{k+l} + q_1^l = n + q_1^l > n + q_1 > n + h! \geqq n + h$, ce qui donne $q_1^{l+1} > n \pm i$. Donc, d'après (3)

$$q_1^{l+1} > q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_s^{\alpha_s} \geqq q_1^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s},$$

ce qui donne

$$l+1 > \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s \geqq s$$

et

$$l+1+s > (\alpha_1+1)+(\alpha_2+1)+\cdots+(\alpha_s+1).$$

Vu l'inégalité connue pour la moyenne arithmétique et géométrique on en obtient d'après (3) (et vu que $q_1 > h! \geqq i$)

$$\Theta(n \pm i) = \Theta(i)(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_s+1) \leqq \leqq c\left[\frac{(\alpha_1+1)+(\alpha_2+1)+\cdots+(\alpha_s+1)}{s}\right]^s < c\left(\frac{l+1+s}{s}\right)^s. \tag{4}$$

Or, il résulte sans peine du développement du binôme que les nombres $\left(1+\frac{l+1}{s}\right)^s$ croissent avec s. D'après $s < l+1$ on trouve donc

$$\left(\frac{l+1+s}{s}\right)^s = \left(1+\frac{l+1}{s}\right)^s < \left(1+\frac{l+1}{l+1}\right)^{l+1} = 2^{l+1}.$$

D'après (4) on a donc $\Theta(n \pm i) < c \cdot 2^{l+1}$ et comme, d'après (2), $\Theta(n) > 2^{k+l}$, on trouve

$$\frac{\Theta(n)}{\Theta(n \pm i)} > \frac{2^{k-1}}{c} > m.$$

Notre théorème se trouve ainsi démontré.

(Reçu le 10 octobre, 1954.)