Über einen speziellen Banachschen Raum.

Von KÁROLY TANDORI in Szeged.

Es sei $p \geqq 1$ ein bestimmter Exponent und es bezeichne L_0^p die Klasse derjenigen Funktionen $f(t) \in L^p[0,1]$, die im Punkt $x=0$ verschwinden und für die $x=0$ ein Lebesguescher Punkt p-ter Ordnung ist, d. h. für die

$$f(0)=0 \quad \text{und} \quad \int_0^h |f(t)|^p\,dt = o(h)$$

gelten. Die Norm einer Funktion $f(t) \in L_0^p$ sei

$$\|f\|_0^{(p)} = \sup_{0<h\leqq 1} \left\{ \frac{1}{h} \int_0^h |f(t)|^p\,dt \right\}^{1/p}.$$

Den Banachschen Raum L_0^p haben B. I. KORENBLJUM, S. G. KREJN und B. JA. LEVIN [1]) eingeführt. Sie haben im Falle $p>1$ die allgemeine Form der linearen Funktionaloperation in L_0^p bestimmt:

Die allgemeine Form der linearen Funktionaloperation $\Phi(t)$ in L_0^p ist

$$\Phi(f) = \int_0^1 f(t)\,\varphi(t)\,dt,$$

wo für die meßbare Funktion $\varphi(t)$ die Bedingung

$$\int_0^1 [-F'(x)]^{1/q}\,dx < \infty \qquad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$$

erfüllt ist, wo $F(x)$ die größte konvexe Funktion bezeichnet, für die

$$F(x) \leqq \int_x^1 |\varphi(t)|^q\,dt \qquad (0<x\leqq 1)$$

---

[1]) Б. И. Коренблюм, С. Г. Крейн и Б. Я. Левин, О некоторых нелинейных вопросах теории сингулярных интегралов. Доклады Акад. Наук СССР **62** (1948), 17—20.

gilt. Die lineare Funktionaloperation $\Phi(t)$ hat die Norm:

$$\|\Phi\|_0^{(p)} = \int_0^1 [-F'(x)]^{1/q}\, dx.$$

Wir werden ein analoges Resultat für $p = 1$ beweisen; diesen Fall haben die erwähnten Verfasser nicht eingehend betrachtet. Im folgenden werden wir statt $L_0^1, \|f\|_0^{(1)}, \|\Phi\|_0^{(1)}$ die einfachen Bezeichnungen $L_0, \|f\|_0, \|\Phi\|_0$ anwenden.

Satz. *Im Raum L_0 ist jede lineare Funktionaloperation $\Phi(f)$ von der Form*

$$\Phi(f) = \int_0^1 f(t)\,\varphi(t)\, dt, \tag{1}$$

wo für die meßbare Funktion $\varphi(t)$ die Bedingung

$$\int_0^1 \psi(t)\, dt < \infty \tag{2}$$

mit

$$\psi(t) = \underset{t \leqq y \leqq 1}{\text{wes. ob. Gr.}}\, |\varphi(y)| \qquad (0 < t \leqq 1)$$

erfüllt ist. Es gilt ferner

$$\|\Phi\|_0 = \int_0^1 \psi(t)\, dt. \tag{3}$$

Beweis. Nehmen wir an, daß $\Phi(f)$ eine lineare Funktionaloperation in L_0 ist. Es sei $L_{(n)} \subset L_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ der lineare Unterraum der Funktionen $f \in L_0$ die im Intervall $[0, 2^{-n}]$ verschwinden. Ist $f \in L_{(n)}$, so gilt

$$\int_{2^{-n}}^1 |f(t)|\, dt \leqq \|f\|_0 \leqq 2^{-n} \int_{2^{-n}}^1 |f(t)|\, dt,$$

und so existiert eine beschränkte, mint Ausnahme einer Nullmenge eindeutig bestimmte Funktion $\varphi_n(t)$, so daß

$$\Phi(f) = \int_{2^{-n}}^1 f(t)\,\varphi_n(t)\, dt$$

für jede $f \in L_{(n)}$ besteht. Wir nehmen $\varphi_n(t) = 0$ für $t \notin [2^{-n}, 1]$ an. Es ist klar, daß $\varphi_m(t) = \varphi_n(t)$ für $t \in [\max(2^{-m}, 2^{-n}), 1]$ fast überall gilt. Es sei

$$\varphi(t) = \sup \varphi_n(t) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Die Funktion $\varphi(t)$ ist mit Ausnahme einer Nullmenge eindeutig bestimmt und fast überall endlich.

Es sei $f \in L_0$ und

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [2^{-n}, 1], \\ 0, & t \notin [2^{-n}, 1]. \end{cases}$$

Für die Funktion $f_n \in L_{(n)}$ besteht die Relation

$$\Phi(f_n) = \int_{2^{-n}}^{1} f_n(t)\,\varphi(t)\,dt \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Da $\|f_n - f\|_0 \to 0\,(n \to \infty)$ ist, so folgt daraus für jede $f \in L_0$:

$$\Phi(f) = \int_0^1 f(t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Damit haben wir (1) bewiesen.

Da $\varphi(t)$ fast überall endlich ist, so ist $\psi(t)$ im Intervall $(0, 1]$ endlich; ferner ist $\psi(t)$ eine nicht abnehmende, von rechts stetige Funktion. Wir werden die Ungleichung

$$\|\Phi\|_0 \geqq \int_0^1 \psi(t)\,dt \tag{4}$$

beweisen.

Wir können annehmen, daß

$$\int_0^1 \psi(t)\,dt < \infty$$

ist. Es seien $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ beliebige Zahlen und $0 < a < 1$ eine Zahl, für die

$$\int_0^a \psi(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5}$$

ist. Es sei ferner $0 < u_1 < \cdots < u_n < u_{n+1} = \psi(a)$ eine endliche Zahlenfolge und betrachten wir die Mengen

$$E_0 = \underset{t}{E}[\psi(t) \leqq u_1;\, a \leqq t \leqq 1],\ E_\nu = \underset{t}{E}[u_\nu < \psi(t) \leqq u_{\nu+1};\, a \leqq t \leqq 1] \quad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Mit geeigneter Wahl von u_ν können wir erreichen, daß die Ungleichungen

$$u_{\nu+1}/u_\nu \leqq 1 + \eta \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{6}$$

und

$$\int_{E_0} \psi(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{2} \tag{7}$$

bestehen.

Offenbar ist $\bigcup_{\nu=0}^{n} E_\nu = [a, 1]$ und $E_\nu \cap E_\mu = 0$ $(\nu \neq \mu)$. Es seien $E_{\nu_1}, \ldots, E_{\nu_l}$ $(\nu_1 < \cdots < \nu_l)$ diejenige der Mengen E_ν, die nicht leer sind. Da $\psi(t)$ eine von rechts stetige Funktion ist, ist E_{ν_i} ein rechtsseitig halboffenes Intervall: $E_{\nu_i} = [\alpha_{\nu_i}, \beta_{\nu_i})$; ferner bestehen die folgenden Relationen: $a = \alpha_{\nu_l}$, $\beta_{\nu_1} \leqq 1$ und $\alpha_{\nu_i} = \beta_{\nu_{i+1}}$ $(i = 1, \ldots, l-1)$. Es sei

$$\gamma_{\nu_i} = \max(\alpha_{\nu_i}, \beta_{\nu_i}/(1+\eta)) \qquad (i = 1, \ldots, l).$$

Offerbar ist $\gamma_{\nu_i} \in E_{\nu_i}$ und

(8) $$\beta_{\nu_i} \leqq (1+\eta)\,\gamma_{\nu_i} \qquad (i=1,\ldots,l).$$

Man sieht leicht, daß das Maß der Menge

$$H_{\nu_i} = \mathop{E}_{t}\,[\,|\varphi(t)| > u_{\nu_i},\ \gamma_{\nu_i} \leqq t \leqq \beta_{\nu_i}] \qquad (i=1,\ldots,l)$$

positiv ist. Nach der Definition von β_{ν_i} besteht die Ungleichung $\psi(t) \leqq u_{\nu_i}$ für $\beta_{\nu_i} \leqq t \leqq 1$, und so gilt $|\varphi(t)| \leqq u_{\nu_i}$ im Intervall $[\beta_{\nu_i}, 1]$ fast überall; dann ist aber $\psi(\gamma_{\nu_i}) \leqq u_{\nu_i}$, was wegen $\gamma_{\nu_i} \in E_{\nu_i}$ der Definition von E_{ν_i} widerspricht.

Es sei

$$f^*(t) = \begin{cases} \operatorname{sign} \varphi(t) \int\limits_{E_{\nu_i}} \psi(t)\,dt \Big(\int\limits_{H_{\nu_i}} |\varphi(t)|\,dt\Big)^{-1}, & t \in H_{\nu_i}; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist $f^* \in L_0$, ferner gilt nach (15) und (17)

(9) $$\int_0^1 f^*(t)\,\varphi(t)\,dt = \sum_{i=1}^{l} \int\limits_{E_{\nu_i}} \psi(t)\,dt > \int_0^1 \psi(t)\,dt - \varepsilon.$$

Für jedes $1 \leqq i \leqq l$ gilt nach (6) die Ungleichung

(10) $$\int_0^{\beta_{\nu_i}} |f^*(t)|\,dt = \sum_{j=i}^{l} \int\limits_{E_{\nu_j}} \psi(t)\,dt \Bigg(\int\limits_{H_{\nu_j}} |\varphi(t)|\,dt\Bigg)^{-1} \operatorname{mes} H_{\nu_j} \leqq$$

$$\leqq \sum_{j=i}^{l} \frac{a_{\nu_{j+1}} \operatorname{mes} E_{\nu_j}}{a_{\nu_j} \operatorname{mes} H_{\nu_j}} \operatorname{mes} H_{\nu_j} \leqq (1+\eta) \sum_{j=i}^{l} \operatorname{mes} H_{\nu_j} \leqq (1+\eta)\,\beta_{\nu_i}.$$

Auf Grund dieser Ungleichung werden wir beweisen, daß für jedes $0 < h \leqq 1$

(11) $$\int_0^h |f^*(t)|\,dt < (1+\eta)^2 h$$

gilt. Ist $0 < h < \gamma_\nu$, so ist (11) evident, da dieses Integral verschwindet. Ist $\beta_{\nu_1} \leqq h \leqq 1$, so erhalten wir nach (10):

$$\int_0^h |f^*(t)|\,dt = \int_0^{\beta_{\nu_1}} |f^*(t)|\,dt \leqq (1+\eta)\beta_{\nu_1} < (1+\eta)^2 h.$$

Ist $\alpha_{\nu_i} \leqq h < \gamma_{\nu_i}$ $(i=1,\ldots,l-1)$, so ergibt sich nach (10):

$$\int_0^h |f^*(t)|\,dt = \int_0^{\alpha_{\nu_i}} |f^*(t)|\,dt = \int_0^{\beta_{\nu_{i+1}}} |f^*(t)|\,dt \leqq (1+\eta)\,\beta_{\nu_{i+1}} < (1+\eta)^2 h.$$

Ist endlich $\gamma_{\nu_i} \leqq h < \beta_{\nu_i}$ $(i=1,\ldots,l)$, so gilt nach (10) und (8):

$$\int_0^h |f^*(t)|\,dt < \int_0^{\beta_{\nu_i}} |f^*(t)|\,dt < (1+\eta)\beta_{\nu_i} \leqq (1+\eta)^2\gamma_{\nu_i} \leqq (1+\eta)^2 h.$$

Damit haben wir (11) vollständig bewiesen. Also ist $\|f^*\|_0 < (1+\eta)^2$. Nach (9) erhalten wir daraus:

$$\|\Phi\|_0 > \frac{1}{(1+\eta)^2}\left\{\int_0^1 \psi(t)\,dt - \varepsilon\right\}.$$

Da ε und η beliebig sind, so ergibt sich (4).

Ist

$$\int_0^1 \psi(t)\,dt = \infty,$$

so können wir ähnlicherweise verfahren. Die Zahlen a und u_1 wählen wir z. B. so, daß die Ungleichungen

$$\int_a^1 \psi(t)\,dt > A, \quad \int_{E_0} \psi(t)\,dt < \frac{A}{2}$$

bestehen, wo A eine beliebig große Zahl ist. Dann erhalten wir $\|\Phi\|_0 > A/2(1+\eta)^2$. De A beliebig ist, widerspricht diese Ungleichung der Annahme, daß $\Phi(f)$ beschränkt ist.

Um (3) zu beweisen betrachten wir die Funktion

$$\overline{\psi}(t) = \begin{cases} \psi(t), & \text{für} \quad \psi(t) \leqq N, \\ N & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist $f \in L_0$ und $\|f\|_0 \leqq 1$, so ergibt sich durch partielle Integration:

$$(12)\ \int_0^1 |f(t)|\,\overline{\psi}(t)\,dt = [\Phi(t)\,\overline{\psi}(t)]_0^1 + \int_0^1 \Phi(t)\,d(-\overline{\psi}(t)) \leqq \int_0^1 t\,d(-\overline{\psi}(t)) = \int_0^1 \overline{\psi}(t)\,dt,$$

nach der Annahme ist nämlich

$$\Phi(t) = \int_0^t |f(y)|\,dy \leqq t.$$

Für $N \to \infty$ erhalten wir aus (12)

$$(13)\ \left|\int_0^1 f(t)\,\varphi(t)\,dt\right| \leqq \int_0^1 |f(t)|\,|\varphi(t)|\,dt \leqq \int_0^1 |f(t)|\,\psi(t)\,dt \leqq \int_0^1 \psi(t)\,dt\ (f \in L_0, \|f\|_0 \leqq 1),$$

also ist

$$\|\Phi\|_0 \leqq \int_0^1 \psi(t)\,dt.$$

Nach (4) ergibt sich daraus (3).

Nach (13) ist es klar, daß die Funktionaloperation (1) in L_0 linear ist, wenn die Bedingung (2) erfüllt ist. Damit haben wir unseren Satz vollständig bewiesen.

Aus diesen Satz folgt mit Hilfe einer bekannten Methode [2]) der Satz von D. K. FADDEJEV [3]):

Dafür, daß die Relation

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(t)\,\varphi_n(t)\,dt = f(0)$$

für jede solche Funktion $f(t)\in L[0,1]$ gilt, für die $x=0$ ein Lebesguescher Punkt ist, ist notwendig und hinreichhend, daß die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\eta \varphi_n(t)\,dt = 1$$

für jedes feste η $(0<\eta\leqq 1)$ besteht und für jedes n

$$\int_0^1 \psi_n(t)\,dt < M(<\infty)$$

gilt, wobei

$$\psi_n(t) = \operatorname*{wes.\,ob.\,Gr.}_{t\leqq y\leqq 1} |\varphi_n(y)| \qquad (0<t\leqq 1)$$

bedeutet.

(Eingegangen am 28. Oktober, 1954.)

---

[2]) Siehe z. B. K. TANDORI, Über die Konvergenz singulärer Integrale. *Acta Sci. Math. Szeged* **15** (1953—54), 223—230.

[3]) D. K. FADDEJEV, Sur la représentation des fonctions sommables au moyen d'intégrales singulières. *Mat. Sbornik* **1** (43) (1936) 351—368.