Annäherung von Kurven durch Kurvenbogenzüge.

Von L. FEJES TÓTH in Budapest.

Wir betrachten zu zwei beschränkten, abgeschlossenen ebenen Punktmengen Q und R die Vereinigungsmengen Q_η und R_η der um die Punkte von Q bzw. R geschlagenen abgeschlossenen Kreisscheiben vom Radius η. Die kleinste Zahl $\eta = \eta(Q, R)$ mit der Eigenschaft, daß Q in R_η und R in Q_η enthalten ist, nennen wir, wie üblich, die *Abweichung* von Q und R.

Unter einer *Kurve* verstehen wir im Folgenden eine rektifizierbare ebene Kurve, dessen Krümmung k eine analytische Funktion $k = k(s)$ der von einem Endpunkt gemessenen Bogenlänge ist. Die Gleichung $k = k(s)$ wird die *natürliche Gleichung* der Kurve genannt.

Wir konstruieren zu einer Kurve K den aus n Strecken bestehenden Streckenzug P_n mit der kleinstmöglichen Abweichung $\eta(P_n, K)$ von K. Es lässt sich zeigen, daß $n^2\eta(P_n, K)$ für $n \to \infty$ einem Grenzwert zustrebt, und zwar gilt[1])

$$\lim_{n\to\infty} n^2\eta(P_n, K) = \frac{1}{16}\left(\int_0^L |k|^{\frac{1}{2}}\, ds\right)^2,$$

wo L die Bogenlänge von K bedeutet. Ist für eine andere Kurve der linksstehende Grenzwert größer als für K, so sagen wir, diese Kurve lasse sich durch Polygone schlechter annähern, als K.

Aus der obigen Formel ergibt sich mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung

$$\lim_{n\to\infty} n^2\eta(P_n, K) \leqq \frac{1}{16} L\Omega,$$

wo $\Omega = \int_0^L |k|\,ds$ die totale Krümmung von K bedeutet. Gleichheit besteht nur im Falle von Kurven konstanter Krümmung, weshalb unter den Kurven vorgegebener Bogenlänge und totaler Krümmung die *Kreisbogen* sich am schlechtesten approximieren lassen.

---

[1]) L. FEJES TÓTH, Approximation by polygons and polyhedra, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **54** (1948), 431—438.

Nun erhebt sich die interessante Frage, was bezüglich der Annäherung durch Kreisbogenpolygone ausgesprochen werden kann. Bedeutet P_n^0 den aus n Kreisbogen bestehenden Kreisbogenzug mit der kleinstmöglichen Abweichung $\eta(P_n^0, K)$ von K, so gilt[2])

$$\lim_{n\to\infty} n^3 \eta(P_n^0, K) = \frac{\sqrt{3}}{216}\left(\int_0^L |k'|^{\frac{1}{3}}\, ds\right)^3.$$

Hieraus folgt leicht, daß bei vorgegebener Bogenlänge und totaler Krümmung der linksstehende Grenzwert (sogar unter Beschränkung auf konvexe Kurven) beliebig groß sein kann, weshalb es unter solchen Kurven keine gibt, die sich am schlechtesten durch Kreisbogenzüge annähern läßt. Wohl aber gibt es extremale Kurven, wenn statt Ω die *totale Krümmungsableitung* $\Omega_1 = \int_0^L |k'|\, ds$ vorgegeben ist. Durch Anwendung der Hölderschen Ungleichung ergibt sich nämlich aus der obigen Formel die Ungleichung

$$\lim_{n\to\infty} n^3 \eta(P_n^0, K) \leqq \frac{\sqrt{3}}{216} L^2 \Omega_1,$$

in der Gleichheit nur im Falle von Kurven mit konstantem k' gilt. Diese Kurven sind die aus der Theorie der Lichtinterferenz bekannten, sogenannten *Klotoide* oder *Cornu'sche Spirale.*

Wir wollen nun in diesem Aufsatz das obige Verfahren fortsetzen. Im nächsten Schritt werden unter den Kurven von vorgegebener Bogenlänge und totaler zweiten Krümmungsableitung $\Omega_2 = \int_0^L |k''|\, ds$ diejenigen herausgesucht, die sich durch Klotoidenbogenzüge am schlechtesten annähern lassen. Dann stellen wir die Frage bezüglich der Approximation durch Kurvenbogenzüge, deren Bogen die Extremalen des vorigen Problems sind, usw. Es ergibt sich das interessante Ergebnis, daß die extremalen Kurven sich in einfacher Weise charakterisieren lassen: sie sind nämlich diejenigen Kurven, für welche $k(s)$ ein Polynom von s von entsprechendem Grade ist.

Wir sagen, daß eine Kurve zur *Klasse* Γ_p gehört, wenn ihre Krümmung ein Polynom höchstens p-ten Grades der Bogenlänge ist; die Geraden (mit der natürlichen Gleichung $k=0$) sollen die Klasse Γ_{-1} bilden. Die Kreise gehören also zur Klasse Γ_0, die Klotoide zur Klasse Γ_1, usw. (s. Fig. 1.). Mit Hilfe dieser Definition läßt sich unser Hauptergebnis folgenderweise aussprechen:

Wir konstruieren zu einer vorgegebenen Kurve K mit der natürlichen Gleichung $k=k(s)$, $0 \leqq s \leqq L$, einen aus n Kurvenbogen der Klasse Γ_p

---

[2]) S. Fußnote 1.

($p \geqq -1$) *bestehenden Kurvenbogenzug* P_n^p *mit der kleinstmöglichen Abweichung* $\eta(P_n^p, K)$ *von* K. *Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} n^{p+3}\eta(P_n^p, K) = C_p\left(\int_0^L |k^{(p+1)}|^{\frac{1}{p+3}} ds\right)^{p+3},$$

wo

$$C_p = \begin{cases} \dfrac{p+2}{2^{p+3}(p+3)!\,(p+3)^{\frac{p+3}{p+2}}} & \textit{für gerades } p, \\ \dfrac{1}{2^{p+4}(p+3)!} & \textit{für ungerades } p. \end{cases}$$

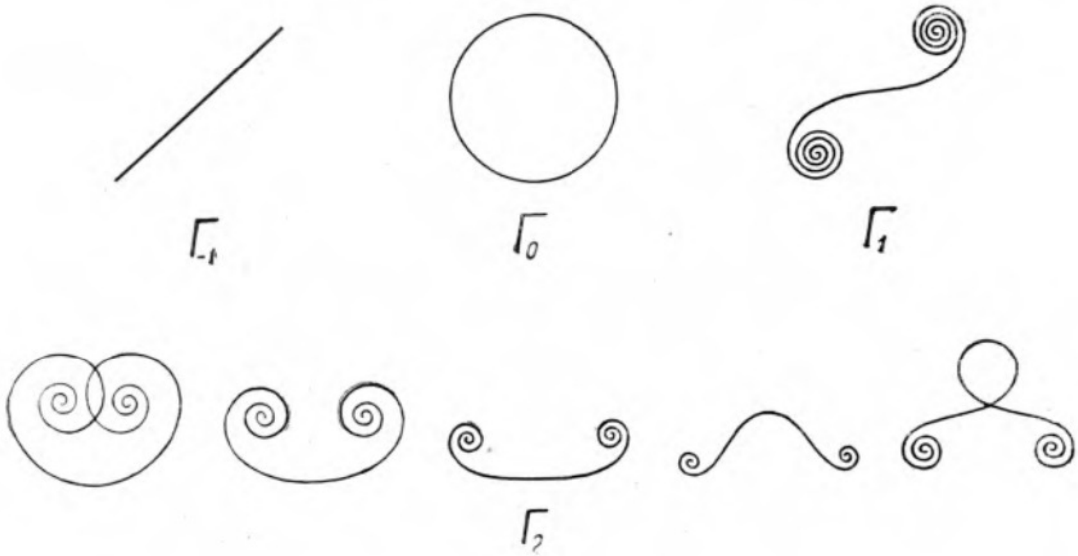

Fig. 1.

Hieraus folgt mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung

$$\lim_{n\to\infty} n^{p+3}\eta(P_n^p, K) \leqq C_p L^{p+2}\Omega_{p+1},$$

wo Ω_{p+1} die totale $(p+1)$-te Krümmungsableitung bedeutet, $\Omega_{p+1} = \int_0^L |k^{(p+1)}|\, ds$. Gleichheit trifft nur dann ein, wenn $k^{(p+1)}$ konstant ist, d. h. für Kurven der Klasse Γ_{p+1}. Unsere obige Behauptung ist daher tatsächlich eine Folgerung des soeben ausgesprochenen Satzes.

Im Folgenden erheben wir keinen Anspruch auf Strenge. Wir begnügen uns mit der Darstellung des Grundgedankens des Beweises, der auf dem sogenannten kanonischen Gleichungssystem der Kurve beruht.

Wir betrachten einen beliebigen Punkt U der Kurve K, in dem wir vorläufig $s = 0$ nehmen. Es sei $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ das Gleichungssystem von K

in vektorieller Schreibweise im Achsenkreuz (x_1, x_2) des zum Punkt U gehörigen begleitenden Zweibeins $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Mit Rücksicht auf die Frenetschen Formeln $\mathbf{e}_1' = k\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2' = -k\mathbf{e}_1$ haben wir:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}' &= \mathbf{e}_1, \\
\mathbf{x}'' &= k\mathbf{e}_2, \\
\mathbf{x}''' &= -k^2\mathbf{e}_1 + k'\mathbf{e}_2, \\
\mathbf{x}^{(4)} &= -3kk'\mathbf{e}_1 + (k'' - k^3)\mathbf{e}_2, \\
\mathbf{x}^{(5)} &= (k^4 - 3k'^2 - 4kk'')\mathbf{e}_1 + (k''' - 6k^2k')\mathbf{e}_2, \\
\mathbf{x}^{(6)} &= (10k^3k' - 10k'k'' - 5kk''')\mathbf{e}_1 + (k^{(4)} - 10k^2k'' - 15kk' + k^5)\mathbf{e}_2, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Tragen wir diese Ableitungen in die Reihenentwicklung

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}'s + \frac{\mathbf{x}''}{2!}s^2 + \frac{\mathbf{x}'''}{3!}s^3 + \cdots$$

ein, so erhalten wir die gewünschte kanonische Darstellung, die in Koordinaten ausgeschrieben folgendermaßen lautet:

$$x_1 = s - \frac{k^2}{3!}s^3 - \frac{3kk'}{4!}s^4 + \frac{k^4 - 3k'^2 - 4kk''}{5!}s^5 + \frac{10k^3k' - 10k'k'' - 5kk'''}{6!}s^6 + \cdots,$$

$$x_2 = \frac{k}{2}s^2 + \frac{k'}{3!}s^3 + \frac{k'' - k^3}{4!}s^4 + \frac{k''' - 6k^2k'}{5!}s^5 + \frac{k^{(4)} - 10k^2k'' - 15kk' + k^5}{6!}s^6 + \cdots.$$

Wir machen nun von der Tatsache Gebrauch, daß in der Entwicklung von x_2 die Ableitung $k^{(p+1)}$ zuerst im Gliede $(p+3)$-ten Grades auftritt, und zwar mit dem Koeffizienten $1/(p+3)!$, während sie in x_1 zuerst im Gliede $(p+4)$-ten Grades vorkommt. Dies läßt sich an den explizit berechneten Gliedern der obigen Entwicklungen beobachten und durch Induktion leicht einsehen. Folglich hat das Gleichungssystem der oskulierenden Kurve der Klasse Γ_p die Form

$$\xi_1 = x_1 + O(s^{p+4}),\ \xi_2 = x_2 - \frac{k^{(p+1)}}{(p+3)!}s^{p+3} + O(s^{p+4}),$$

wo ξ_1 und ξ_2 die laufenden Koordinaten als Funktionen der Bogenlänge s bedeuten. Diese Kurve ist nämlich dadurch charakterisiert, daß im Punkte U ihre Krümmung und deren ersten p Ableitungen der Reihe nach mit $k = k^{(0)}$, $k', \ldots, k^{(p)}$ übereinstimmen, während ihre übrigen Krümmungsableitungen verschwinden[3]). Jede andere Kurve aus Γ_p berührt K in einer niedrigeren Ordnung.

[3]) So lautet z. B. das Gleichungssystem der oskulierenden Klotoide

$$\xi_1 = s - \frac{k^2}{3!}s^3 - \frac{3kk'}{4!}s^4 - \frac{k^4 - 3k'^2}{5!}s^5 + \cdots,$$

$$\xi_2 = \frac{k}{2}s^2 + \frac{k'}{3!}s^3 - \frac{k^3}{4!}s^4 - \frac{6k^2k'}{5!}s^5 + \cdots.$$

Wir betrachten die Teilbogen T und t der Kurve K bzw. der oskulierenden Kurve, für die $-\frac{\sigma}{2} \leqq s \leqq \frac{\sigma}{2}$ ausfällt. Wir haben

$$\eta(T, t) = \frac{|k^{(p+1)}|}{(p+3)!}\left(\frac{\sigma}{2}\right)^{p+3} + O(\sigma^{p+4}).$$

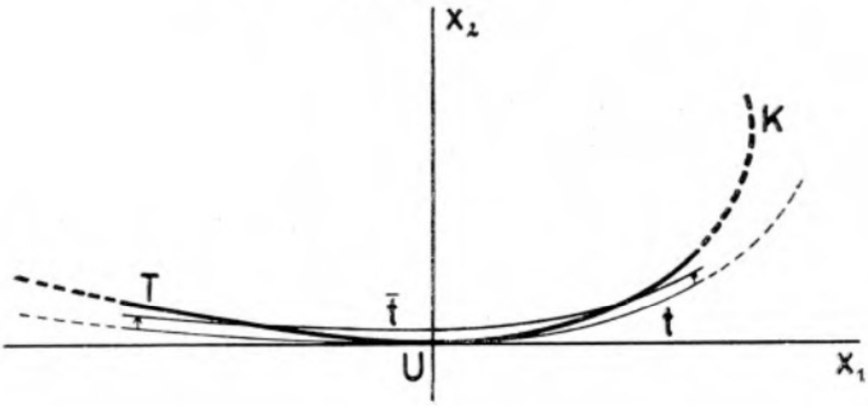

Fig. 2.

Wir setzen $k^{(p+1)} \neq 0$ voraus und betrachten zunächst den Fall, daß p ungerade ist. Dann ist $p+3$ gerade, also bleibt die oskulierende Kurve in der Nähe des Punktes U auf der einen Seite der Kurve (s. Fig. 2). Verschieben wir t in der Richtung der x_2-Achse mit der Länge $\frac{1}{2}\frac{k^{(p+1)}}{(p+3)!}\left(\frac{\sigma}{2}\right)^{p+3}$, so erhalten wir einen neuen Kurvenbogen $\bar{t}$, dessen Abweichung von T

$$\eta(T, \bar{t}) = \frac{1}{2}\frac{|k^{(p+1)}|}{(p+3)!}\left(\frac{\sigma}{2}\right)^{p+3} + O(\sigma^{p+4})$$

ausfällt.

Ist dagegen p gerade, also $p+3$ ungerade, so durchschneidet die oskulierende Kurve die Kurve K (s. Fig. 3). In diesem Falle drehen wir t um den Ursprungspunkt U mit dem Winkel[4])

$$\frac{k^{(p+1)}}{(p+3)!}\left(\frac{\sigma}{2}\right)^{p+3} : \frac{\sigma}{2} = \frac{k^{(p+1)}}{(p+3)!}\left(\frac{\sigma}{2}\right)^{p+2}.$$

Dann wird der Abstand des Punktes vom Parameter s des Bogens t von T in der neuen Lage

$$\left|\frac{k^{(p+1)}}{(p+3)!}s^{p+3} - \frac{k^{(p+1)}}{(p+3)!}\left(\frac{\sigma}{2}\right)^{p+2} s\right| + O(\sigma^{p+4}).$$

[4]) Durch die Wahl eines geeigneten, etwas kleineren Drehwinkels läßt sich sogar ein Bogen von noch kleinerer Abweichung erhalten. Jedoch schließen sich die so kostruierten Bogen nicht aneinander.

Nun erreicht aber $y = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{p+2} s - s^{p+3}$ für $0 \leqq s \leqq \frac{\sigma}{2}$ sein Maximum wenn $y' = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{p+2} - (p+3)s^{p+2} = 0$ ist, und der Wert des Maximums beträgt

$$\frac{p+2}{(p+3)^{\frac{p+3}{p+2}}} \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{p+3}.$$

Folglich ist die Abweichung des verdrehten Bogens $\bar{t}$ von T

$$\eta(T, \bar{t}) = \frac{p+2}{(p+3)^{\frac{p+3}{p+2}}} \frac{|k^{(p+1)}|}{(p+3)!} \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{p+3} + O(\sigma^{p+4}).$$

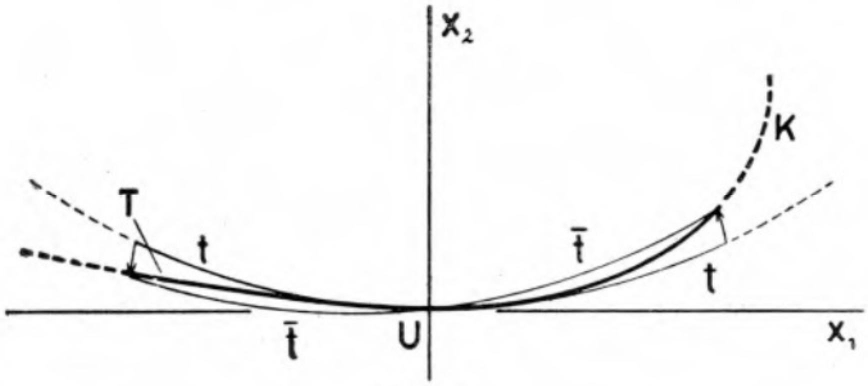

Fig. 3.

Beide Fälle lassen sich mit Hilfe der oben eingeführten Bezeichnung C_p in der Gleichung

$$\{\eta(T, \bar{t})\}^{\frac{1}{p+3}} = C_p^{\frac{1}{p+3}} |k^{(p+1)}|^{\frac{1}{p+3}} \sigma + \sigma^2 a(\sigma)$$

zusammenfassen, wo $a(\sigma)$ eine beschränkte Funktion von σ ist.

Die Funktion $a(\sigma)$ hängt noch von dem Punkt U ab. Man sieht aber leicht ein, daß sie für alle Kurvenpunkte U gleichmäßig beschränkt ist.

Es sei nun bemerkt, daß unsere Kurve nur eine endliche Anzahl von Doppelpunkten aufweist. Ebenfalls hat $k^{(p+1)}$ nur endlich viele Nullstellen. Wir schließen diese Punkte samt ihren kleinen Umgebungen von der Kurve aus. Da aber bei der Annäherung der Kurve es im wesentlichen nur an die Annäherung der zurückgebliebenen Teilbogen ankommt, so können wir uns auf eine doppelpunktfreie Kurve K beschränken, an der überall $k^{(p+1)} \neq 0$ ist.

Es ist leicht einzusehen, daß K sich so in n Teilbogen $T_1, \ldots, T_n$ der Länge $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ zerlegen läßt, daß

$$k_1^{(p+1)} \sigma_1^{p+3} = \cdots = k_n^{(p+1)} \sigma_n^{p+3}$$

ausfällt, wo $k_i^{(p+1)}$ den Wert von $k^{(p+1)}$ im Mittelpunkt von T_i bedeutet. Konstruieren wir zu jedem Teilbogen T_i den soeben betrachteten Kurvenbogen $\bar{t}_i$, dann haben wir

$$\{\eta(T_i, \bar{t}_i)\}^{\frac{1}{p+3}} = C_p^{\frac{1}{p+3}} |k_i^{(p+1)}|^{\frac{1}{p+3}} \sigma_i + a_i \sigma_i^2,$$

wo die Größen a_i für jeden Wert von n und $i=1,\ldots,n$ gleichmäßig beschränkt sind. Mit Rücksicht auf

$$\max(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \leqq \frac{\max|k^{(p+1)}|^{\frac{1}{p+3}}}{\min|k^{(p+1)}|^{\frac{1}{p+3}}} \frac{L}{n}$$

ergibt sich hieraus durch Summation

$$\sum_{i=1}^{n} \{\eta(T_i, \bar{t}_i)\}^{\frac{1}{p+3}} = C_p^{\frac{1}{p+3}} \sum_{i=1}^{n} |k_i^{(p+1)}|^{\frac{1}{p+3}} \sigma_i + O(n^{-1}).$$

Wegen

$$\{\eta(T_i, \bar{t}_i)\}^{\frac{1}{p+3}} - \{\eta(T_j, \bar{t}_j)\}^{\frac{1}{p+3}} = a_i\sigma_i^2 - a_j\sigma_j^2 = O(n^{-2}) \qquad (1 \leqq i,\ j \leqq n)$$

folgt daraus weiter

$$n\{\eta(K, P_n)\}^{\frac{1}{p+3}} = n \max_{1\leqq i\leqq n} \{\eta(T_i, \bar{t}_i)\}^{\frac{1}{p+3}} = C_p^{\frac{1}{p+3}} \sum_{i=1}^{n} |k_i^{(p+1)}|^{\frac{1}{p+3}} \sigma_i + O(n^{-1}),$$

wo P_n die Vereinigung der Bogen $\bar{t}_1,\ldots,\bar{t}_n$ bedeutet. Folglich haben wir

$$\lim_{n\to\infty} n\{\eta(K, P_n)\}^{\frac{1}{p+3}} = C_p^{\frac{1}{p+3}} \int_0^L |k^{(p+1)}|^{\frac{1}{p+3}} ds.$$

P_n ist im allgemeinen kein zusammenhängender Kurvenbogenzug. Da aber der Abstand des Endpunktes von $\bar{t}_i$ vom Anfangspunkt von $\bar{t}_{i+1}$ neben $\eta(T_i, \bar{t}_i)$ vernachlässigt werden kann, so lassen sich die Bogen $\bar{t}_i$ auch zu einem einzigen Kurvenbogenzug so zusammenfügen, daß die obige Limesrelation gültig bleibt.

Wir betrachten die beiden Parallelkurven von K vom Abstand η, die dadurch entstehen, daß wir an die Normalen von K in beiden Richtungen die Abstände $\eta = \eta(K, P_n^p)$ auftragen. Wir wählen n so groß, daß diese Kurven weder einander, noch sich selbst schneiden. Dann besitzt P_n^p die leicht beweisbare Eigenschaft, daß jeder Teilbogen von P_n^p beide Parallelkurven erreicht. Da aber unsere Konstruktion der Kurvenbogenzugfolge P_n sich eben auf diese charakteristische Eigenschaft von P_n^p stützte, so stimmt der letzte Grenzwert — im Einklang mit unserem Satze — mit $\lim n\{\eta(K, P_n^p)\}^{\frac{1}{p+3}}$ überein.

Zum Schluß sei noch ein Problem erwähnt! Ziehen wir anstatt der obigen „Streckenabweichung“ η die „Inhaltsabweichung“ in Betracht, so erweisen sich bei der Annäherung von Kurven durch Streckenzüge unter gewissen Bedingungen die Kegelschnitte als extremal[5]). Es wäre schön, wenn durch geeignete Fortsetzung dieses Verfahrens auch die algebraischen Kurven 3-ten, 4-ten Grades usw. charakterisiert werden könnten.

(Eingegangen am 2. März 1955.)

---

[5]) L. Fejes Tóth, Über den Affinumfang, *Math. Nachrichten,* **6** (1951), 51—64.