Über durch Sturm-Liouvillesche Differentialgleichungen charakterisierte orthogonale Polynomsysteme.

von L. FELDMANN in Budapest.

§ 1.

Diese Arbeit befaßt sich mit dem Problem, welche orthogonale Polynomsysteme durch linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung — genauer, durch eine von einem Parameter abhängige Folge derselben — charakterisiert werden können.

Nach den Abhandlungen [2] und [3] von S. BOCHNER und W. BRENKE und dem Handbuche [4] von E. KAMKE kann über dieses Problem, folgendes festgestellt werden.

Es seien p_0, p_1 und p_2 beliebige Polynome nullten, ersten und zweiten Grades und $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ die zu ihnen gehörenden Eigenwerte. (Im Allgemeinen bedeute p_n ein Polynom n-ten Grades.) Eine notwendige Bedingung dafür, daß die Gleichung

$$Qy'' + Ly' + Ky = \lambda y \tag{1. 1'}$$

Lösungen p_0, p_1 und p_2 besitze, ist, daß Q ein Polynom höchtens zweiten Grades, L eines von genau erstem Grade und K eine Konstante sei. Außerdem ist für die Existenz einer Lösung p_n

$$\lambda_n = \lambda - K = an\cdot(n-1) + \alpha n \tag{1. 2'}$$

nötig; hier bedeutet a den Koeffizienten von x^2 in Q und α den Koeffizienten von x in L. Im Weiteren werden wir zwei Umformungen brauchen:

1. Die Gleichung (1. 1') geht nach einer linearen Transformation und der Einschmelzung der Konstanten K in λ in

$$(ax^2 + bx + c)y'' + xy' = \lambda y \tag{1. 1}$$

über. Es ist dann

$$\lambda = an(n-1) + n. \tag{1. 2}$$

Im Folgenden wird mit Q der Koeffizient von y'' in (1. 1) bezeichnet.

2. Die zur Gleichung (1. 1) gehörende selbstadjungierte Differentialgleichung ist

$$(\varrho Q y')' = \lambda \varrho y \tag{1. 3}$$

mit

$$\varrho=\frac{1}{Q}\exp\int\frac{x}{Q}\,dx. \tag{1.4}$$

Indem wir nämlich (1. 1) mit (1. 4) multiplizieren, erhalten wir (1. 3).

In den genannten Arbeiten wird bewiesen, daß wenn die Bedingungen:

a) der Koeffizient ϱQ hat zwei verschiedene Nullstellen. Diese seien a und b, wo eine, oder auch beide auch $\pm\infty$ sein können, falls dann auch $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha}Q\varrho=0$ besteht;

b) ϱ ist im Intervalle (a, b) integrierbar;

c) es existiert eine Folge $\{\lambda_n\}$ von Eigenwerten, so daß zu λ_n eine Polynomlösung genau n-ten Grades gehört;

erfüllt sind, dann besteht die Orthogonalitätsbedingung

$$\int_a^b \varrho p_i p_k\,dx=0.$$

Die Verfasser der genannten Arbeiten gelangen schließlich zum interessanten Ergebnis, daß das Lösungssystem $\{p_n\}$ der Gleichungen (1. 1) bzw. (1. 3) eines der klassischen Systeme der JACOBIschen, LAGUERREschen und HERMITEschen Polynome ist.

Auf Grund dieser Ergebnisse sprach J. ACZÉL in seiner Arbeit [1] folgende Vermutung aus:

Besteht die Bedingung c) und ist das System $\{p_n\}$ orthogonal mit einer im Intervall (c, d) nichtnegativen Gewichtfunktion $s(x)$, haben wir also

$$\int_c^d s p_i p_k\,dx=0$$

so kann das Polynomsystem $\{p_n\}$ nur eines der klassischen Systeme sein, unabhängig davon, ob die Bedingungen a) und b) erfüllt sind.

Diese Behauptung scheint sich im ersten Augenblicke kaum von den in E. KAMKE's Werk enthaltenen Ergebnissen zu unterscheiden. Eine Untersuchung auf Grund von (1. 4) der Frage, für welche Q die Bedingungen a) und b) erfüllt sind, zeigt aber, daß diese sehr streng sind und so die Vermutung von J. ACZÉL weit über die bisherigen Ergebnisse hinausgeht.

Bei vielen Problemen der theoretischen Physik tritt die Aufgabe auf, das System der Eigenwerte, bzw. der Polynomeigenfunktionen einer Gleichung von der Form (1. 1) zu bestimmen ([5]). Es ist auffallend, daß diese — falls sie existieren — immer JACOBIsche, LAGUERREsche oder HERMITEsche Polynome sind, ohne daß die Bedingungen a) und b) vorgeschrieben wären. An Stelle dieser finden wir Bedingungen für die physikalischen Konstanten, die in der Gleichung eine mittelbare oder unmittelbare Rolle spielen.

Die Charakterisierung der klassischen orthogonalen Polynome durch die Gleichung (1. 1), ohne besondere Bedingungen, liefert eine mathematische Begründung dieser Erscheinung.

Diese Arbeit geht von der bisher nicht berücksichtigten Tatsache aus, daß falls Polynome p_0, p_1 und p_2 angegeben werden, dann existiert — abgesehen von einer Konstante — nur *eine* Gleichung (1. 1) bzw. (1. 3), deren Lösungen — bei entsprechenden λ_0, λ_1 und λ_2 — p_0, p_1 und p_2 sind. Aus dieser Beobachtung entspringt sofort der Gedanke, ausschließlich aus den Eigenschaften von p_2 — daß dieses nämlich *einerseits* Lösung von (1. 1) bzw. (1. 3) ist, *andererseits* gewisse, aus den Orthogonalitätsbedingungen entspringende Eigenschaften besitzt — die Existenz (oder die Nichtexistenz) weiterer Lösungen p_n zu beweisen und zu ermitteln, welchem Orthogonalsystem p_2 angehört. Im ersten Teile dieser Arbeit wird die Vermutung von J. ACZÉL unter der Bedingung $\lambda > 0$ bewiesen, (diese Bedingung wird durch die vorher erwähnte Rolle der physikalischen Konstanten plausibel gemacht). Im zweiten Teile zeigen wir, daß unter ausschließlicher Voraussetzung der *Integrierbarkeit* von ϱ, ohne die Bedingungen a) und c), als Lösungen von (1. 1) bzw. (1. 3) nur die drei klassischen Polynomsysteme auftreten.

§ 2.

Wir beweisen den folgenden

Satz 1. *Es seien p_0, p_1 und p_2 Polynome nullten, ersten, bzw. zweiten Grades. Es seien diese Lösungen von* (1. 1) *bei nichtnegativen Eigenwerten $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$; sie sollen ferner der Rekursionsformel*

$$p_2 = (x - \alpha_2) p_1 - A_2 p_0 \qquad A_2 > 0 \tag{2. 1'}$$

genügen.

Es soll weiter eine unendliche Reihe von p o s i t i v e n *Eigenwerten existieren, so daß die Gleichung* (1. 1) *— als Fortsetzung von p_0, p_1 und p_2 — die Polynomlösungen $p_3, p_4, \ldots, p_n, \ldots$ genau dritten, vierten, ... n-ten Grades besitzt; dann sind diese — von linearen Transformationen abgesehen —*

JACOBI*sche Polynome, wenn Q quadratisch,*

LAGUERRE*sche Polynome, wenn Q linear, und*

HERMITE*sche Polynome, wenn Q eine Konstante ist.*

BEMERKUNG. Zu einem jedem Tripel p_0, p_1, p_2 von Polynomen kann ein Zahlenpaar α_2, A_2 gefunden werden, so daß die Formel (2. 1′) gilt. Sind p_0, p_1 und p_2 orthogonal mit einer nichtnegativen Gewichtfunktion so kann A_2 nur positiv sein. (Siehe z. B. G. SZEGŐ [6], p. 41.) So folgt die Formel (2. 1′) aus der Orthogonalität von p_0, p_1 und p_2, aber umgekehrt nicht. Sie stellt also eine schwächere Voraussetzung dar.

Beweis. Wenn für ein beliebig großes n, $\lambda_n > 0$ gilt, so haben wir nach (1. 2) $an(n-1)+n>0$, und weiter $a > -\dfrac{1}{n-1}$ für beliebig große n; dies ist nur im Falle $a \geqq 0$ möglich; im Weiteren kann $a \geqq 0$ angenommen werden. Die Lösungen p_0, p_1 und p_2 der Gleichung (1. 1) können — abgesehen von konstanten Faktoren — nur die Folgenden sein

$$p_0=1,\ p_1=x,\ p_2=x^2+\frac{2b}{2a+1}x+\frac{c}{a+1} \tag{2. 2}$$

andererseits nach (2. 1′)

$$p_2=x^2-\alpha_2 x-A_2 \qquad A_2>0. \tag{2. 1}$$

Ein Vergleich von (2. 2) und (2. 1) ergibt

$$c<0, \text{ da } a\geqq 0 \text{ ist.} \tag{2. 3}$$

Wir zeigen nun aus (1. 4) Folgendes:

ist Q quadratisch, so ist ϱ die Gewichtfunktion der Jacobischen Polynome, ist Q li·ear, so ist ϱ die Gewichtfunktion der Laguerresche Polynome, ist schließlich Q eine von Null verschiedene Konstante, so ergibt die Ausrechnung von ϱ aus (1. 4) die Gewichtfunktion der Hermiteschen Polynome.

Es wird unmittelbar ersichtlich sein, daß die erhaltenen ϱ und ϱQ die Bedingungen a) und b) im § 1 erfüllen. Damit wird der Beweis unserer Behauptung fertig sein.

I. *Q ist quadratisch.* Dann hat Q im Falle $a\geqq 0$ zwei verschiedene Nullstellen, welche durch die Nullstelle $x=0$ von $p_1=x$ voneinander getrennt sind. Dies kann durch unmittelbare Berechnung der beiden Nullstellen α und β von Q eingesehen werden, falls wir berücksichtigen daß die Diskriminante, nach (2. 3), $b^2-4ac>b^2$ ist. Nun haben wir

$$\frac{x}{Q}=\frac{x}{a(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{1}{a}\left\{\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{\beta-x}\right\} \tag{2. 4}$$

hier sind A und B Konstanten; α und β sind Nullstellen von Q mit verschiedenen Vorzeichen. Daraus und aus (1. 4) folgt

$$\varrho=(x-\alpha)^{\frac{A}{\alpha}-1}(\beta-x)^{-\frac{B}{\alpha}-1}$$

und dies ist die Gewichtfunktion der Jacobischen Polynome falls

$$\frac{A}{a}-1>-1 \qquad -\frac{B}{a}-1>-1 \tag{2. 5}$$

bestehen. Nach (2. 4) ausgerechnet, erhalten wir

$$A=\frac{\alpha}{\alpha-\beta};\quad B=\frac{\beta}{\alpha-\beta},$$

und daraus folgt — da α und β verschiedene Vorzeichen haben — $A>0$ und $-B>0$. Daraus aber folgt (2. 5) unmittelbar.

II. *Q ist linear.* Nun haben wir

$$\frac{x}{Q}=\frac{x}{bx+c}=\frac{1}{b}\left[1-\frac{c}{bx+c}\right] \quad \text{und} \quad \varrho=(bx+c)^{-\frac{c}{b^2}-1}\cdot e^{\frac{1}{b}x}.$$

Wegen (2. 3) ist $c<0$, daher $-\frac{c}{b^2}-1>-1$ und so ist ϱ die Gewichtfunktion der verallgemeinerten LAGUERREschen Polynome.

III. *Q ist eine Konstante.* Es ist

$$\varrho=e^{\frac{c}{2}x^2} \quad \text{mit} \quad c<0,$$

wovon wir uns durch eine ähnliche Rechnung überzeugen können, wie in den beiden anderen Fällen. Wie bekannt, ist diese Funktion die Gewichtfunktion der HERMITEschen Polynome. Zum Schluß sei darauf hingeweisen, daß $Q\equiv 0$ wegen (2. 1′) bzw. (2. 3) unmöglich ist.

Damit ist der Beweis beendet. Es soll noch darauf hingewiesen werden, daß die *wesentliche* Bedingung $a\geqq 0$ war. Wegen (1. 2) folgt daraus schon $\lambda_n>0$ und die übrigen Feststellungen. Diese Tatsache ist erwähnungswert, da so aus dem vorstehenden — eigentlich aus der unmittelbaren Ausrechnung von ϱ bestehenden — Beweise schon hervorgeht, daß wir als ortogonale Polynomlösungen von (1. 1), ohne besondere Nebenbedingungen, nur die klassischen Polynome erhalten falls Q vom ersten oder nullten Grade ist, weil dann schon ursprünglich $a=0$ war.

§ 3.

In diesem § werden die orthogonalen Polynomsysteme untersucht, die Lösungen der Differencialgleichung (1. 3) sind, unter Voraussetzung der (evtl. uneigentlichen) Integrierbarkeit von $\varrho(x)$.

Im § 1. wurde — auf Grund der dort erwähnten Arbeiten [3] und [4] — folgendes festgestellt:

hat ϱQ zwei verschiedene Nullstellen, a und b, und ist ϱ im Intervalle (a, b) integrierbar, so ist ein die Gleichung (1. 3) bzw. (1. 1) bei einem gegebenen Eigenwertsystem $\{\lambda_n\}$ befriedigendes Polynomsystem mit der Gewichtfunktion $\varrho(x)$ orthogonal; und zwar ist es eines der drei klassischen Polynomsysteme: der Polynome von JACOBI, LAGUERRE oder HERMITE.

Es liegt nun der folgende Gedanke nahe: Versuchen wir zu beweisen, daß ϱQ zwei verschiedene Nullstellen hat, unter der Bedingung, daß ϱ integrierbar ist und daß die Lösung zweiten Grades p_2 der Differentialgleichung (1. 1) bzw. (1. 3) zwei verschiedene Nullstellen hat. (P_2 muß zwei verschiedene Nullstellen haben wenn es einem orthogonalen System angehören soll.)

Satz 2. *Es sei in der* STURM—LIOUVILLE*schen Differentialgleichung* (1. 1') *bzw.* (1. 3) ϱ *im Endlichen integrierbar (im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne), und die Gleichung soll Polynomlösungen nullten, ersten und zweiten Grades besitzen. Sind dann die Nullstellen der Polynomlösungen zweiten Grades reell und verschieden, so ist die Gleichung* (1. 1') *bzw.* (1.3) *die Differentialgleichung* JACOBI*'s, wenn Q quadratisch,* LAGUERRE*'s, wenn Q linear und* HERMITE*'s wenn Q eine Konstante ist.*

BEWEIS. 1. Ist Q ein Polynom höchtens zweiten Grades, so sieht man aus (1. 4), daß ϱ analytisch ist bzw. höchstens an den Nullstellen von Q unendlich werden kann. Andererseits ist ϱ nur dann zwischen den Grenzen a und b integrierbar, wenn es in seinem Unstetigkeitspunkte S im Intervalle (a, b) so unendlich wird, daß $(x-s)\,Q(x)$ an dieser Stelle schon endlich ist. Diese beiden Feststellungen zusammen sagen aus, daß ϱQ in jedem Intervalle analytisch ist, wenn die Integrierbarkeit von ϱ besteht.

2. Aus dem später zu beweisenden Lemma folgt, daß ϱQ genau zwei Nullstellen hat, wenn die Lösung p_2 von (1. 3) zwei verschiedene Nullstellen hat. So muß — den schon in § 1. festgestellten Tatsachen gemäß — p_2 zu einem der drei klassischen Polynomsysteme gehören.)*

3. Schließlich zeigen wir, daß nur *eine* Gleichung der Gestalt (1. 1) bzw. (1. 3) existiert, die ein *gegebenes* p_2 zur Lösung hat. Dies bedeutet zugleich, daß die Gleichung (1. 1) bzw. (1. 3) eine JACOBIsche, LAGUERREsche, oder HERMITEsche Gleichung ist, je nachdem, welchem klassischen Systeme p_2 angehört. Dies kann folgenderweise bewiesen werden:

Jedes Polynom nullten bzw. ersten Grades kann durch eine lineare Transformation auf die Form 1 bzw. x gebracht werden. So befriedigt es offenbar (1. 1) unabhängig von der Wahl von Q. Soll p_2 eine Lösung sein, so muß

$$Q=\frac{1}{2}\,[\lambda_2 p_2 - x p_2']$$

bestehen; dies ergibt sich aus einer unmittelbaren Rechnung. Diese Formel zeigt zugleich, daß in den Nullstellen von p_2 $Q \neq 0$ ist.

Nun besprechen wir das in 2. benutzte Lemma und dessen Beweis.

LEMMA. *Es sei $\lambda \neq 0$ eine Konstante, ϱ, Q und y stetig differenzierbare Funktionen (ϱ kann in den Nullstellen von Q Unstetigkeitspunkte besitzen) und es bestehe zwischen ihnen die Relation* (1. 3). *Sie sollen außerdem folgende Bedingungen erfüllen:*

I. *y soll wenigstens zwei Nullstellen haben. Es sei a_n die kleinste b_n die größte. In diesen Punkten sei $Q \neq 0$.*

*) In der Abhandlung [3] zeigt W. BRENKE, daß bei Erfüllung der Bedingungen 1. und 2. in § 1., ϱ die Gewichtfunktion einer der drei klassischen Polynomsysteme ist.

II. *Sämtliche Nullstellen von* y' *sollen in das Intervall* (a_n, b_n) *fallen und* $|y'|$ *soll für* $x \to \pm\infty$ *über alle Grenzen wachsen. Aus den Bedingungen* I. *und* II. *folgt, daß entweder* ϱQ *genau zwei Nullstellen ausserhalb des Intervalles* (a_n, b_n) *besitzt, und das Intervall* (a_n, b_n) *zwischen ihnen liegt, oder gibt es ausserhalb von* (a_n, b_n) *genau zwei Intervalle, in denen* $\varrho Q \equiv 0$ *gilt und liegt* (a_n, b_n) *zwischen diesen. Eine, oder beide der Nullstellen können im Sinne* $\varrho Q \to 0$ *für* $x \to \infty$ *auch im Unendlichen liegen.*

Beweis. Erst zeigen wir, daß die Funktion rechts von der Stelle b_n an höchtens einer Stelle oder in einem einzigen Intervalle verschwindet. Nehmen wir nämlich an, daß es mehrere solche Nullstellen gibt; wir bezeichnen zwei aufeinander folgende mit d_1 und d_2. Diese sind zugleich Nullstellen der an der linken Seite von (1. 3) stehenden Funktion

$$\varrho Q y'. \tag{3. 1}$$

Nach Rolle's Satz muß $\lambda\varrho y$, als Derivierte von (3. 1), in (d_1, d_2) wenigstens an einer Stelle verschwinden. Wegen $y \neq 0$ rechts von b_n, muß an dieser Stelle $\varrho = 0$ sein; daraus folgt, daß (3. 1) dort Null wird; und dies widerspricht der Voraussetzung, das d_1 und d_2 aufeinander folgende Nullstellen sind.

Es kann aber $\varrho Q \equiv 0$ in (d_1, d_2) vorkommen.

Nun beweisen wir die Existenz *einer* Nullstelle. Ist an der Stelle b_n $\varrho Q = 0$, so haben wir nichts zu beweisen. Es sei also $\varrho Q \neq 0$; dann ist $\varrho \neq 0$; und da die aus den linear unabhängigen Lösungen y_1 und y_2 der Gleichung (1. 3) gebildete Wronski-Determinante an der Stelle b_n nicht verschwindet, so muß hier $y' \neq 0$ bestehen.*) Daraus folgt, daß an der Stelle b_n außer $(\varrho Q y')' = 0$ (wegen $y(b_n) = 0$) auch

$$(\varrho Q y')'' = \lambda\varrho y' + \lambda\varrho' y \neq 0$$

gilt, und so hat die Funktion (3. 1) an dieser Stelle b_n einen Extremalwert. ($\lambda = 0$ wird ausgeschlossen, da dies nur die triviale Lösung $y = 0$ geben würde.)

Dieser Extremalwert ist für positive Funktionenwerte ein Maximum und im Gegenfalle ein Minimum. Es muß nämlich zwischen b_n und der b_n unmittelbar vorhergehenden Nullstelle von y, wenigstens eine Nullstelle von y' liegen. So kann immer ein Intervall (c, b_n) gefunden werden, an dessen unterer Grenze (3. 1) verschwindet, und in dessen Punkten die Funktion monoton ist. Ist die Funktion an der Stelle b_n positiv, so nimmt sie bis dort monoton zu und hat ein Maximum. Im Gegenfalle nimmt sie monoton ab und hat ein Minimum.

---

*) Es ist bekannt, daß überall, wo der Koeffizient von y'': $\varrho Q \neq 0$ ist, auch $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$ gilt. An einer solchen Stelle kann bei $y_1 = 0$, $y_1' = 0$ nicht bestehen, denn sonst würde die Determinante verschwinden. So muß in unserem Falle an der Stelle b_n $y \neq 0$ sein.

Das Verhalten der Funktion (3. 1) rechts von b_n kann eines der Folgenden sein (wir behandeln nur den Fall des Maximums, das Verhalten rechts von der Stelle des Minimumwertes kann entsprechend untersucht werden):

A. (3. 1) *wird monoton abnehmend unendlich.* Dann muß sie an einer Stelle verschwinden; dies kann nur für $\varrho Q = 0$ eintreten, denn wegen Bedingung II. ist rechts von b_n $y' \neq 0$.

B. (3. 1) *nimmt monoton ab, aber bleibt über einer positiven unteren Schranke.* Dann gilt $\varrho Q \to 0$ für $x \to \infty$, da wegen unserer Bedingung II. y' für $x \to \infty$ nicht beschränkt bleiben kann.

C. *Die Funktion ist nicht monoton.* Dann hat sie wenigstens eine Extremalstelle. Da rechts von b_n $y \neq 0$ gilt, ist dort $\varrho = 0$ und damit $\varrho Q = 0$.

Der Beweis hinsichtlich der Nullstellen links von a_n geschieht ähnlicherweise.

Herrn Professor J. Aczél möchte ich für seine kritischen Bemerkungen an dieser Stelle meinen Dank aussprechen.

Literaturverzeichnis.

[1] J. Aczél, Eine Bemerkung über die Charakterisierung der „klassischen" orthogonalen Polynome, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **4** (1953), 315—321.

[2] S. Bochner, Über Sturm – Liouvillesche Polynomsysteme. *Math. Z.*, **29** (1929), 730—736.

[3] W. Brenke, Linear differential equations. *Bull. Amer. Math, Soc.*, **36** (1930), 77—83.

[4] E. Kamke, Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. I. Leipzig, 1951

[5] A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien. Band II. Braunschweig, 1939.

[6] G. Szegő, Orthogonal polynomials. New York, 1939.

(Eingegangen am 24. März, 1955.)