Bemerkung zur Cayley—Kleinschen Maßbestimmung.

Herrn Professor László Kalmár zum 50. Geburtstag gewidmet.

Von J. ACZÉL und O. VARGA in Debrecen.

Von der projektiven Geometrie ausgehend, kann man bekanntlicher Weise die nicht-euklidischen Geometrien durch Auszeichnung eines absoluten Gebildes zweiter Ordnung erhalten. Die betrachtete Geometrie ist gemäß dem KLEINschen Erlanger Programm als Invariantentheorie derjenigen Untergruppe der projektiven Gruppe charakterisiert, bei der das absolute Gebilde invariant bleibt. Unter den verschiedenen Invarianten ist eine der wichtigsten der zu einem Punktpaare gehörige Abstand, der außer der Gruppeninvarianz noch die vom Abstandsbegriff erforderliche Additivitätseigenschaft besitzen muß, und eine positive, in stetiger Weise vom Punktpaar abhängige Funktion ist. Daß man allein auf Grund von gruppentheoretischen Überlegungen das Bogenelement der nicht-euklidischen Geometrien bestimmen kann, ist bekannt und mit Hilfe der Lieschen Gruppentheorie von S. LIE selbst durchgeführt worden. Abgesehen davon, daß es naturgemäßer scheint den Abstand nicht auf dem Umweg über die Bogenlänge zu gewinnen, erfordert die Anwendung Liescher gruppentheoretischer Überlegungen die Voraussetzung mehrfacher Differenzierbarkeit sämtlicher auftretender Funktionen.

Hier soll das Problem nach folgendem Gesichtspunkt gelöst werden. Wir stellen zunächst fest, wie sich die Invarianten eines endlichen Punktsystems als Funktionen der homogenen Koordinaten dieser Punkte darstellen lassen (Satz 1 und Satz 3). Es ergibt sich, wenn man die zu der das absolute Gebilde festlegenden quadratischen Form gehörige Bilinearform als Skalarprodukt einführt, daß die invarianten Funktionen willkürliche Funktionen der Skalarprodukte der auftretenden Punkte sind. Wenn man für die Invarianten eines Punktpaares die schon oben erwähnten Forderungen der Additivität, Positivität und Stetigkeit stellt — Differenzierbarkeit wird nicht vorausgesetzt — erhält man, abgesehen von einem willkürlichen Faktor, genau die CAYLEY—KLEINsche projektive Maßbestimmung. Die CAYLEY—KLEINsche projektive Maßbestimmung ist demnach im wesentlichen eine Folge der Gruppeneigenschaft.

Wir beschränken uns in dieser Arbeit auf den Fall der Ebene.

§ 1. Die Invarianten eines endlichen Punktsystems.

Zeichnen wir in der projektiven Ebene einen nicht ausgearteten nullteiligen bzw. ovalen Kegelschnitt aus, so ist dadurch die elliptische bzw. hyperbolische Geometrie bestimmt.

Ist $\mathfrak{x}(x_i,\ i=1,2,3)$ ein projektives Koordinatensystem, so seien die beiden Kegelschnitte durch

(1) $$(\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = \Sigma x_i x_i = 0$$

bzw.

(2) $$\langle \mathfrak{x}\mathfrak{x} \rangle = -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0$$

bestimmt.

Beide Geometrien sind bekanntlicherweise durch diejenigen linearen Transformationen bestimmt, die (1) bzw. (2) invariant lassen. Da die projektiven Koordinaten bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt sind, ist diese Forderung gleichbedeutend damit, daß für ein neues Koordinatensystem

(3) $$(\mathfrak{x}'\mathfrak{x}') = (\mathfrak{x}\mathfrak{x})$$

und

(4) $$\langle \mathfrak{x}'\mathfrak{x}' \rangle = \langle \mathfrak{x}\mathfrak{x} \rangle$$

gilt.

Die Gleichungen (3) bedeuten, daß die Gruppe der elliptischen Geometrie die orthogonale ist. Daraus folgt sofort folgender bekannte Satzt[1]):

Satz 1. *Jede koordinateninvariante Funktion eines endlichen Systems von Punkten* $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_r$ *ist eine Funktion der skalaren Produkte* $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j)$ *dieser Punkte.*

Wir leiten den entsprechenden Satz für die hyperbolische Geometrie ab.

Wir deuten die x_i als räumliche rechtwincklige Koordinaten und definieren außerdem als „skalares Produkt" zweier Punkte die zur quadratischen Form (2) gehörige Bilinearform

(5) $$\langle \mathfrak{a}\mathfrak{b} \rangle = -a_1 b_1 - a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Gleichung (2) stellt einen Kegel dar. Für die Punkte im Inneren gilt

(6) $$\langle \mathfrak{a}\mathfrak{a} \rangle > 0.$$

In der hyperbolischen Geometrie beschränkt man sich genau auf die durch (6) bestimmten Punkte. Seien nun $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ zwei verschiedene linear unabhängige Vektoren, für die (6) gilt. Bilden wir nun

(7) $$\langle \mathfrak{a}_1 + \lambda \mathfrak{a}_2 \rangle \langle \mathfrak{a}_1 + \lambda \mathfrak{a}_2 \rangle = \langle \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_1 \rangle + 2 \langle \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \rangle \lambda + \langle \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_2 \rangle \lambda^2.$$

---

[1]) Siehe W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, I. (3-te Auflage, Berlin, 1930.) Insbes. S. 6—10.

Für Werte von λ, die dem absoluten Betrag nach groß sind, ist das Vorzeichen des Ausdruckes (7), wegen $\langle \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_2\rangle > 0$, positiv. Da ferner wegen (6) die dritten Komponenten von $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ von Null verschieden sind, kann λ so gewählt werden, daß die dritte Komponente von $\mathfrak{a}_1 + \lambda\mathfrak{a}_2$ verschwindet. Für dieses λ ist (7) wegen (2) und der linearen Unabhängigkeit von $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ negativ. Damit haben wir, wenn λ die reellen Zahlen durchläuft, zwei Vorzeichenswechsel festgestellt. Hieraus folgt nun

(8) $$\langle \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_1\rangle\langle \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_2\rangle - \langle \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\rangle^2 < 0.$$

Lemma. *Für n Dimensionen führt dieselbe Überlegung zu dem folgenden Gegenstück der Cauchyschen Ungleichung:*

$$(x_1y_1 - x_2y_2 - \cdots - x_ny_n)^2 \geqq (x_1^2 - x_2^2 \cdots - x_n^2)(y_1^2 - y_2^2 \cdots - y_n^2),$$

falls

$$(x_1^2 - x_2^2 \cdots - x_n^2) > 0.$$

Dann und nur dann, wenn x_i und y_i linear abhängig sind, tritt das Gleichheitszeichen auf.

Wird insbesondere für jedes $\mathfrak{x}$

(9) $$\langle \mathfrak{x}\mathfrak{x}\rangle = 1$$

vorausgesetzt, dann folgt zunächst

(10) $$|\langle \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\rangle| > 1.$$

Ist $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$ eine beliebige $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ verbindende differenzierbare Kurve, für die

$$\langle \mathfrak{x}(t)\mathfrak{x}(t)\rangle \equiv 1$$

gilt, und entspricht $t = 0$ dem Punkt $\mathfrak{a}_1$, so folgt aus

$$\langle \mathfrak{x}(t)\mathfrak{x}'(t)\rangle \equiv 0$$

und (10), daß die stetige Funktion

$$F(t) \equiv \langle \mathfrak{a}_1\mathfrak{x}(t)\rangle$$

für $t = 0$ ein Minimum besitzt. Da $F(0) = 1$, muß

(11) $$\langle \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\rangle > 1.$$

Wegen (11) und (5) müssen dabei die dritten Komponenten von $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ das gleiche Vorzeichen besitzen.

Wir zeigen nun, daß man drei Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$, für die (6) gilt und die als Vektoren des affinen Raumes linear unabhängig sind, bezüglich unseres Skalarproduktes (5) orthogonalisieren und normieren kann.

Die Komponenten von $\mathfrak{a}_k$ seien a_{ik} $(i = 1, 2, 3)$. Für die Determinante der $\mathfrak{a}_k$ gilt dann nach Voraussetzung

(12) $$|\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3| \neq 0.$$

Hieraus folgt, daß auch

$$\begin{vmatrix} ia_{11} & ia_{12} & ia_{13} \\ ia_{21} & ia_{22} & ia_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{13}$$

und daher für die bezüglich unseres Skalarproduktes (5) gebildete GRAMsche Determinante

$$a = \begin{vmatrix} \langle \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_1 \rangle & \langle \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \rangle & \langle \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3 \rangle \\ \langle \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1 \rangle & \langle \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_2 \rangle & \langle \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3 \rangle \\ \langle \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1 \rangle & \langle \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2 \rangle & \langle \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_3 \rangle \end{vmatrix} = |\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3|^2 > 0. \tag{14}$$

Normierung von $\mathfrak{a}_1$ führt zu

$$\mathfrak{a}_1^* = \frac{\mathfrak{a}_1}{\sqrt{\langle \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_1 \rangle}}. \tag{15}$$

Setzen wir

$$\hat{\mathfrak{a}}_2 = \mathfrak{a}_2 - c_1\mathfrak{a}_1^*$$

und bestimmen wir c_1 so, daß

$$\langle \hat{\mathfrak{a}}_2\mathfrak{a}_1^* \rangle = 0$$

ist, so folgt aus

$$c_1 = \langle \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_1^* \rangle = \frac{\langle \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \rangle}{\sqrt{\langle \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_1 \rangle}}, \tag{16}$$

daß

$$\hat{\mathfrak{a}}_2 = \mathfrak{a}_2 - \frac{\langle \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \rangle}{\langle \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_1 \rangle}\mathfrak{a}_1 \tag{17}$$

ist. Für das skalare Quadrat von $\hat{\mathfrak{a}}_2$ ergibt sich wegen (8)

$$\langle \hat{\mathfrak{a}}_2\hat{\mathfrak{a}}_2 \rangle = \frac{\langle \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_1 \rangle \langle \mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_2 \rangle - \langle \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \rangle^2}{\langle \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_1 \rangle} < 0. \tag{18}$$

Wir führen zur Abkürzung für die algebraischen Komplemente von $\langle \mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_k \rangle$ in (14) die Bezeichnung A_{ik} ein. Wir können $\hat{\mathfrak{a}}_2$ wegen (18) normieren. Der so gewonnene Vektor $\mathfrak{a}_2^*$ hat dann rein imaginäre Komponenten, und es gilt

$$\mathfrak{a}_2^* = \frac{\hat{\mathfrak{a}}_2}{\sqrt{\langle \hat{\mathfrak{a}}_2\hat{\mathfrak{a}}_2 \rangle}} = \frac{\sqrt{\langle \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_1 \rangle}}{\sqrt{A_{33}}}\left(\mathfrak{a}_2 - \frac{\langle \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \rangle}{\langle \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_1 \rangle}\mathfrak{a}_1\right). \tag{19}$$

Um den dritten Vektor zu bestimmen, setzen wir

$$\hat{\mathfrak{a}}_3 = \mathfrak{a}_3 - c_1\mathfrak{a}_1^* - c_2\mathfrak{a}_2^* \tag{20'}$$

an, und bestimmen c_1 und c_2 so, daß $\hat{\mathfrak{a}}_3$ zu $\mathfrak{a}_1^*$ und $\mathfrak{a}_2^*$ orthogonal ist. Dies führt zu

$$\hat{\mathfrak{a}}_3 = \mathfrak{a}_3 - \langle \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1^* \rangle \mathfrak{a}_1^* - \langle \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2^* \rangle \mathfrak{a}_2^*. \tag{20}$$

Für das skalare Quadrat von $\hat{\mathfrak{a}}_3$ erhält man

$$\langle \hat{\mathfrak{a}}_3\hat{\mathfrak{a}}_3 \rangle = \langle \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_3 \rangle - \langle \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_1^* \rangle^2 - \langle \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_2^* \rangle^2. \tag{21}$$

Führt man für $\mathfrak{a}_1^*$ und $\mathfrak{a}_2^*$ die Werte aus (15) und (19) ein, so erhält man

$$\langle \hat{\mathfrak{a}}_3 \hat{\mathfrak{a}}_3 \rangle = \frac{A_{22}A_{33} - A_{23}^2}{\langle \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_1 \rangle A_{33}}. \tag{22}$$

Auf Grund der JACOBIschen Identität ist aber

$$A_{22}A_{33} - A_{23}^2 = a \langle \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_1 \rangle,$$

so daß

$$\langle \hat{\mathfrak{a}}_3 \hat{\mathfrak{a}}_3 \rangle = \frac{a}{A_{33}} < 0. \tag{23}$$

Demnach erhalten wir

$$\mathfrak{a}_3^* = \frac{\sqrt{A_{33}}}{\sqrt{a}} \hat{\mathfrak{a}}_3 = \frac{\sqrt{A_{33}}}{\sqrt{a}} \mathfrak{a}_3 + k_2 \mathfrak{a}_2 + k_1 \mathfrak{a}_1. \tag{24}$$

Die Formeln (18), (19) und (24) liefern die aus den $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$ orthogonalisierten und normierten Vektoren. Die $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$ lassen sich umgekehrt aus den Vektoren $\mathfrak{a}_1^*$, $\mathfrak{a}_2^*$ und $\mathfrak{a}_3^*$ linear kombinieren mit Koeffizienten, die Funktionen der Skalarprodukte der $\mathfrak{a}_k$ sind. Man kommt zu reellen Darstellungen, wenn man an Stelle der imaginären Vektoren $\mathfrak{a}_2^*$ und $\mathfrak{a}_3^*$ die reellen Vektoren

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{a}}_2 &= i\mathfrak{a}_2^* \\ \tilde{\mathfrak{a}}_3 &= i\mathfrak{a}_3^* \end{aligned} \tag{25}$$

verwendet.

Normieren wir die projektiven Koordinaten so, daß (9) gilt! In unserer räumlichen Darstellung charakterisiert (9) ein zweischaliges Hyperboloid. Beschränkt man sich auf $x_3 > 0$, so bleibt man auf dem „oberen" Mantel dieses Hyperboloides. $\mathfrak{a}_1^*$, $\tilde{\mathfrak{a}}_2$ und $\tilde{\mathfrak{a}}_3$ sind dann drei, bezüglich des Hyperboloids konjugierte Vektoren, die im Ursprung angebracht sind. Dies entspricht der Tatsache, daß von den drei Vektoren $\mathfrak{a}_1^*$ in das Innere, $\tilde{\mathfrak{a}}_2$ und $\tilde{\mathfrak{a}}_3$ in das Äußere des Kegels weisen, wenn man die Vorzeichen der skalaren Quadrate dieser Vektoren berücksichtigt.

Die aus diesen Vektoren bildbare Matrix ist vom Typus derjenigen Matrizen, die die hyperbolische Transformationsgruppe bestimmt. Bedeuten $\mathfrak{x}'(x_i')$ neue Koordinaten, die mit den x durch

$$\mathfrak{x}' = \mathfrak{c}_1 x_1 + \mathfrak{c}_2 x_2 + \mathfrak{c}_3 x_3 \tag{26}$$

zusammenhängen, so muß zwischen den Koordinaten x_i und x_i' (4) bestehen, und dies liefert

$$\begin{aligned} &\langle \mathfrak{c}_1 \mathfrak{c}_1 \rangle = \langle \mathfrak{c}_2 \mathfrak{c}_2 \rangle = -1, \quad \langle \mathfrak{c}_3 \mathfrak{c}_3 \rangle = 1, \\ &\langle \mathfrak{c}_i \mathfrak{c}_k \rangle = 0 \quad (i \neq k). \end{aligned} \tag{27}$$

Eine solche Transformation erhält ferner die Normierungsbedingung (9). Hat der Vektor $\mathfrak{c}_k$ die Komponenten (c_{1k}, c_{2k}, c_{3k}) so kann man der Matrix

$\mathfrak{C} = \|\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}_3\|$ eine orthogonale Matrix

$$(28) \qquad \mathfrak{C}^* = \begin{Vmatrix} -c_{11} & -c_{12} & ic_{13} \\ -c_{21} & -c_{22} & ic_{23} \\ ic_{31} & ic_{32} & c_{33} \end{Vmatrix}$$

zuordnen. Daraus folgt, daß die Kompositionsvorschrift (27) die für die Spalten der Matrix $\mathfrak{C}$ gilt, auch für die Zeilen besteht. Weiters folgt für die Determinante von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}^*$

$$(29) \qquad |\mathfrak{C}| = |\mathfrak{C}^*|.$$

Man bestätigt ohne weiteres, daß die $\mathfrak{C}$ Matrizen eine Gruppe bilden. Die zu $\mathfrak{C}$ Inverse Matrix ist dabei

$$(30) \qquad \mathfrak{C}^{-1} = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{21} & -c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & -c_{31} \\ -c_{13} & -c_{23} & c_{33} \end{Vmatrix}.$$

Unmittelbar ergibt sich ferner:

Durch eine Transformation der Gruppe wird ein Tripel von Vektoren, für die (27) *gilt, wieder in ein solches Tripel überführt. Sind* $\mathfrak{d}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ *und* $\mathfrak{d}_i'$ *zwei Tripeln von Vektoren, für die* (27) *gilt, so kann man immer eine solche hyperbolische Transformation finden, die die* $\mathfrak{d}_i$ *in die* $\mathfrak{d}_i'$ *überführen.*

Ist $\mathfrak{D}'$ die Matrix der $\mathfrak{d}_i'$ und $\mathfrak{D}$ die der $\mathfrak{d}_i$, dann muß für die zu bestimmende Matrix

$$\mathfrak{D}' = \mathfrak{C}\mathfrak{D}$$

gelten. Und daher hat man

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}'\mathfrak{D}^{-1}.$$

Wir behaupten ferner

Satz 2. *Die* $\mathfrak{C}$ *Matrizen gestatten eine Parameterdarstellung mittels 3-er reeller Veränderlichen.*

Wegen der vor (28) gemachten Bemerkung genügt es dies für die orthogonalen Matrizen $\mathfrak{C}^*$ vom Typus (28) zu beweisen. Dabei können wir uns auf solche Matrizen beschränken, deren Determinante $+1$ ist.[2])

Es sei $\mathfrak{S}$ eine schiefsymmetrische Matrix

$$(31) \qquad \mathfrak{S} = \begin{Vmatrix} 0 & -d_3 & id_2 \\ d_3 & 0 & -id_1 \\ -id_2 & id_1 & 0 \end{Vmatrix},$$

wobei d_1, d_2 und d_3 relle Zahlen sind. Dann stellen

$$(32) \qquad \mathfrak{C}^* = e^{\mathfrak{S}}$$

sämtliche Matrizen vom Typus (28) mit positiver Determinante dar. Man

[2]) Siehe A. Wintner, Analytical foundations of celestial mechanics. (Princeton, 1947.) Insbes. S. 54—56.

findet je nachdem

(33) $$\langle \mathfrak{d}\mathfrak{d} \rangle = -d_1^2 - d_2^2 + d_3^2 < 0$$

bzw.

(34) $$\langle \mathfrak{d}\mathfrak{d} \rangle > 0$$

ist, für $\mathfrak{C}^*$ die Darstellungen

(35) $$\begin{cases} \mathfrak{C}^* = \mathfrak{E} + \dfrac{\operatorname{sh} d}{d}\,\mathfrak{S} - \dfrac{1-\operatorname{ch} d}{d^2}\,\mathfrak{S}^2 \\ d^2 = -\langle \mathfrak{d}\mathfrak{d} \rangle \quad d = +\sqrt{-\langle \mathfrak{d}\mathfrak{d} \rangle}, \end{cases}$$

bzw.

(36) $$\begin{cases} \mathfrak{C}^* = \mathfrak{E} + \dfrac{\sin d}{d}\,\mathfrak{S} - \dfrac{1-\cos d}{d^2}\,\mathfrak{S}^2 \\ d^2 = \langle \mathfrak{d}\mathfrak{d} \rangle \quad d = +\sqrt{\langle \mathfrak{d}\mathfrak{d} \rangle}. \end{cases}$$

Die explizite Ausrechnung zeigt sofort, daß diese Darstellungen vom Typus (28) sind. Daß es umgekehrt zu einer vorgegebenen Matrix vom Typus (28) eine schiefsymmetrische Matrix der Form (31) gibt, sieht man genau so ein, wie im Falle einer orthogonalen Matrix mit reellen Elementen.[3]) Der wesentliche Schluß, daß sich eine Matrix $\mathfrak{C}^*$ durch eine Matrix $\mathfrak{P}$ vom Typus (28) auf eine Form

(a) $$\mathfrak{P}'\mathfrak{C}^*\mathfrak{P} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch}\varphi & -i\operatorname{sh}\varphi \\ 0 & i\operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi \end{Vmatrix} = \mathfrak{C}_2^*$$

bzw.

(b) $$\mathfrak{Q}'\mathfrak{C}^*\mathfrak{Q} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \mathfrak{C}_1^*$$

bringen läßt, ist hier ebenfalls durchführbar und stützt sich auf folgendem Schluß.

Da
$$|\mathfrak{C}^* - \mathfrak{E}| = 0$$
ist, gibt es einen Vektor $\mathfrak{c}$, für den

(37) $$(\mathfrak{C}^* - \mathfrak{E})\cdot\mathfrak{c} = 0$$

gilt. Einen solchen Vektor erhält man, falls man aus der Matrix $\mathfrak{C}^* - \mathfrak{E}$ zwei solche Zeilenvektoren auswählt, die linear unabhängig sind und aus der, aus ihnen bildbaren 2-mal 3 Matrix die mit abwechselnde Vorzeichen genommenen zweireihigen Determinanten bildet.

Der so erhaltene Vektor kann stets so bestimmt werden, daß seine ersten beiden Komponenten reell sind. Ist dann das im euklidischen Sinne

---

[3]) Siehe A. Wintner [2]) S. 55.

zu bildende skalare Produkt positiv, so normiere man den Vektor. Ist das skalare Produkt hingegen negativ, so normiere man den mit i multiplizierten Vektor. Der Vektor hat daher zu Komponenten entweder

$$a) \qquad c_1, c_2, ic_3,$$

oder

$$b) \qquad ic_1, ic_2. c_3.$$

In beiden Fällen bestimme man zu dem Vektor $\mathfrak{c}$ (c_1, c_2, c_3) diejenigen beiden Vektoren $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$, die zusammen mit $\mathfrak{c}$ die Relationen (27) erfüllen. Im Falle a) bilde man die Matrix

$$\mathfrak{P} = \begin{Vmatrix} c_1 & c_{11} & ic_{12} \\ c_2 & c_{21} & ic_{22} \\ ic_3 & ic_{31} & c_{32} \end{Vmatrix}.$$

Im Falle b) die Matrix

$$\mathfrak{Q} = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & ic_1 \\ c_{21} & c_{22} & ic_2 \\ ic_{31} & ic_{32} & c_3 \end{Vmatrix}.$$

Wegen (37) werden die Matrizen $\mathfrak{P}'\mathfrak{C}^*\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}'\mathfrak{C}^*\mathfrak{Q}$ von der Gestalt a) und b) sein.

Zu $\mathfrak{C}_2^*$ bzw. $\mathfrak{C}_1^*$ sind die Matrizen $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_1$ eindeutig aus (31) durch $d_2 = d_3 = 0$ bzw. $d_1 = d_2 = 0$ bestimmt. Da aber

$$\mathfrak{C}_2^* = e^{\mathfrak{S}_2},$$

so ist

$$\mathfrak{C}^* = \mathfrak{P}\mathfrak{C}_2^*\,\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}e^{\mathfrak{S}_2}\mathfrak{P}' = e^{\mathfrak{P}\mathfrak{S}_2\mathfrak{P}'}$$

Die Matrix $\mathfrak{P}\mathfrak{S}_2\mathfrak{P}'$ ist wieder schiefsymmetrisch und vom Typus a). Das gleiche gilt im Falle b). Damit ist der Beweis von Satz 2 beendet.

Wir untersuchen nun wann eine Funktion von r Punkten $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$, der hyperbolischen Ebene koordinateninvariant ist. Wir betrachten den Hauptfall in dem drei der Vektoren, etwa $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ im affinen dreidimensionalen Raum linear unabhängig sind. Est ist daher

$$|\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3| \neq 0.$$

Ist $\mathfrak{a}_k$ ein beliebiger von $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$ verschiedener Punkt, dann gilt

$$\mathfrak{a}_k = \sum_{s=1}^{3} c_{ks}\,\mathfrak{a}_s. \tag{38}$$

Multiplizieren wir (38) der Reihe nach skalar im Sinne der hyperbolischen Geometrie mit $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$, so bekommt man

$$\langle \mathfrak{a}_k\,\mathfrak{a}_l \rangle = \sum_{s=1}^{3} c_{ks} \langle \mathfrak{a}_s\,\mathfrak{a}_l \rangle \qquad l = 1, 2, 3. \tag{39}$$

(39) stellt ein Gleichungssystem für c_{k1}, c_{k2} und c_{k3} dar, das wegen (14) auflösbar ist. Die c_{ks} werden dann Funktionen der skalaren Produkte, die in der GRAMschen Determinante (14) auftreten, und dazu kommen noch die Skalarprodukte $\langle \mathfrak{a}_k \mathfrak{a}_1 \rangle$, $\langle \mathfrak{a}_k \mathfrak{a}_2 \rangle$ und $\langle \mathfrak{a}_k \mathfrak{a}_3 \rangle$ hinzu. Auf diese Weise kann die als invariant vorausgesetzte Funktion $\Phi(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_r)$ auf die Form

$$\Phi(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots, \mathfrak{a}_r) = F(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \langle \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_1 \rangle, \langle \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \rangle, \ldots, \langle \mathfrak{a}_r \mathfrak{a}_r \rangle) \tag{40}$$

gebracht werden. Nun können $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ aus den Vektoren (15) und (25) linear kombiniert werden, dabei treten als Koeffizienten die Skalarprodukte der $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$ auf.

Da weiter nach Satz 2 die Matrizen $\| \tilde{\mathfrak{a}}_2, \tilde{\mathfrak{a}}_3, \mathfrak{a}_1^* \|$ parametrisch durch die Größen d_1, d_2 und d_3 dargestellt werden kann, so kommt

$$\Phi(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots, \mathfrak{a}_r) = \psi(d_1, d_2, d_3, \langle \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_1 \rangle, \langle \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \rangle, \ldots, \langle \mathfrak{a}_r \mathfrak{a}_r \rangle).$$

Da aber die Vektoren $\mathfrak{a}_1^*$, $\tilde{\mathfrak{a}}_2$ und $\tilde{\mathfrak{a}}_3$, nach einer früheren Bemerkung, durch eine hyperbolische Koordinatentransformation in ein beliebiges Vektortripel der gleichen Art überführt werden können, so heißt dies, daß d_1, d_2, d_3 in einem gewissen Bereich beliebig gewählt werden können. Die Skalarprodukte sind dabei invariant, und ψ muß demnach frei von den Veränderlichen d_1, d_2 und d_3 sein. Damit haben wir folgendes bewiesen:

Satz 3. *Jede invariante Funktion von r Punkten* $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ *der hyperbolischen Ebene ist eine Funktion der hyperbolischen Skalarprodukte dieser Punkte.*

§ 2. Bestimmung des Abstandes eines Punktepaares.

Wir wollen nun den Abstand d zweier Punkte für die elliptische bzw. hyperbolische Geometrie bestimmen.

Von diesem Abstand d fordern wir, daß er

1. eine koordinateninvariante und stetige Funktion des ihn bestimmenden Punktpaares sei,
2. für verschiedene Punkte positiv sei,
3. für drei Punkte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$, und $\mathfrak{a}_3$ einer Geraden additiv sei, das heißt

$$d(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_3) = d(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) + d(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) \tag{41}$$

Dabei muß bei Zugrundelegung der obigen räumlichen Deutung, der Vektor $\mathfrak{a}_2$ die Vektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_3$ in ihrer Ebene trennen. Um den Fall der hyperbolischen und elliptischen Geometrie gleichzeitig behandeln zu können, wollen wir die beiden Skalarprodukte zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ einheitlich mit $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ bezeichnen. Außerdem setzen wir für die Koordinaten die Normierungsbedingung

(42) $$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}=1$$

voraus.

Aus der Voraussetzung 1 folgt nach den oben bewiesenen Sätzen 1 und 3

$$d(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2)=f(\mathfrak{a}_1\cdot\mathfrak{a}_2),$$

wobei f wobei wegen 1 eine stetige Funktion seiner Veränderlichen $x=\mathfrak{a}_1\cdot\mathfrak{a}_2$ ist.

Aus der Voraussetzung 2 folgt

(43) $$f(x)>0 \qquad (x\neq 1).$$

Wir formulieren jetzt die Voraussetzung 3 analytisch. Ist

(44) $$\mathfrak{a}_2=s\mathfrak{a}_1+t\mathfrak{a}_3,$$

so folgen wegen (42)

(45) $$\mathfrak{a}_1\cdot\mathfrak{a}_2=s+t\mathfrak{a}_1\cdot\mathfrak{a}_3,$$

(46) $$\mathfrak{a}_2\cdot\mathfrak{a}_3=s\mathfrak{a}_1\cdot\mathfrak{a}_3+t$$

und weiter

$$s^2+t^2+2st\mathfrak{a}_1\cdot\mathfrak{a}_2=1$$

d. h.

(47) $$\mathfrak{a}_1\cdot\mathfrak{a}_3=\frac{1-s^2-t^2}{2st}.$$

Führen wir diesen Wert in (45) und (46) ein, so kommt

(48) $$\mathfrak{a}_1\cdot\mathfrak{a}_2=\frac{1+s^2-t^2}{2s},$$

und

(49) $$\mathfrak{a}_2\cdot\mathfrak{a}_3=\frac{1-s^2+t^2}{2t}.$$

Somit wird aus

(50) $$f\left(\frac{1+s^2-t^2}{2s}\right)+f\left(\frac{1-s^2+t^2}{2t}\right)=f\left(\frac{1-s^2-t^2}{2st}\right).$$

Damit haben wir die Bestimmung des Abstandes auf die Lösung der Funktionalgleichung (50) zurückgeführt.

Wir führen die Bezeichnungen

(51) $$x=\frac{1+s^2-t^2}{2s}$$

und

(52) $$y=\frac{1-s^2+t^2}{2t}$$

ein. Aus der Ungleichung (8) für den hyperbolischen Fall und der bekannten Ungleichung

$$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1)<1 \qquad (\mathfrak{a}_1\neq\mathfrak{b}_1)$$

im elliptischen Falle folgt aus (48), (49), (51) und (52)

$$x < 1,\ y < 1 \tag{53}$$

im elliptischen Falle, und

$$x > 1,\ y > 1 \tag{54}$$

im hyperbolischen Fall.

Aus (50) erhält man bei Beachtung von (51) uns (52)

$$f(x) + f(y) = f(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) \tag{55}$$

im elliptischen, und

$$f(x) + f(y) = f(xy + \sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}) \tag{56}$$

im hyperbolischen Fall.

Wir beweisen den folgenden

Satz 4. *Die Lösung der Gleichung* (50), *d. h. der Gleichungen* (55) *und* (56) *unter den obigen Bedingungen ist durch*

$$f(x) = k \arccos x \tag{57}$$

und

$$f(x) = k \operatorname{ar\,ch} x \tag{58}$$

bestimmt.

Wir weisen nach, daß $f(x)$ eine streng monotone Funktion ist. Setzt man

$$x' = xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} < x$$

im elliptischen Falle, bzw.

$$x' = xy + \sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1} > x$$

im hyperbolischen Falle, so folgt aus (55) bzw. (56)

$$f'(x') = f(x) + f(y) > f(x),$$

was die behauptete Monotonie sichert.

Im weiteren beschränken wir uns auf die Behandlung der Gleichung (56). Da $f(x)$ stetig und streng monoton ist, besitzt sie eine ebenfalls stetige Umkehrung $g(x)$, für die die Funktionalgleichung (56) die Form

$$g(u+v) = g(u)g(v) + \sqrt{g(u)^2-1}\sqrt{g(v)^2-1} \tag{59}$$

annimmt. Für

$$v = u = \frac{t}{2}$$

folgt hieraus

$$g(t) = 2g\left(\frac{t}{2}\right)^2 - 1$$

d. h.

$$g\left(\frac{t}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+g(t)}{2}}. \tag{60}$$

Wegen (54) folgt

$$g(1) > 1,$$

und daher existiert ein Wert $c \neq 0$ derart, daß

$$g(1) = \operatorname{ch} c \tag{61}$$

ist. Durch wiederholte Anwendung von (60) erhält man

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{ch} c}{2}} = \operatorname{ch} \frac{c}{2}$$

$$g\left(\frac{1}{2^n}\right) = \operatorname{ch} \frac{c}{2^n}. \tag{62}$$

Wir weisen nun durch vollständige Induktion hinsichtlich m nach, daß für jedes

$$x = \frac{m}{2^n} \tag{63}$$

$$g(x) = \operatorname{ch} cx$$

ist. Aus (62) folgt die Gültigkeit für $m = 1$, und $m = 2$. Wir setzen voraus, daß (63) für $m = k$ besteht, und setzen in (59)

$$u = \frac{k}{2^n},\ v = \frac{1}{2^n}.$$

Dann wird

$$\begin{aligned} g\left(\frac{k+1}{2^n}\right) &= g\left(\frac{k}{2^n}\right) g\left(\frac{1}{2^n}\right) + \sqrt{g\left(\frac{k}{2^n}\right)^2 - 1}\ \sqrt{g\left(\frac{1}{2^n}\right)^2 - 1} \\ &= \operatorname{ch}\left(c \cdot \frac{k}{2^n}\right) \operatorname{ch}\left(c \cdot \frac{1}{2^n}\right) + \operatorname{sh}\left(c\, \frac{k}{2^n}\right) \cdot \operatorname{sh}\left(c\, \frac{1}{2^n}\right) \\ &= \operatorname{ch} c\, \frac{k+1}{2^n}. \end{aligned}$$

Somit besteht (63) auch für

$$m = k + 1.$$

Damit ist (63) wöllig bewiesen. Aus Stetigkeitsgründen folgt hieraus

$$g(x) = \operatorname{ch} cx \tag{64}$$

für nichtnegative Werte von x. Insbesondere wird

$$g(0) = 1. \tag{65}$$

Für negatives x können wir die Gültigkeit von (64) vermöge der Substitution

$$v = -u$$

in (59) nachweisen.

Für die inverse Funktion $f(x)$ erhält man sonach aus (64)

$$f(x) = k \operatorname{ar} \operatorname{ch} x \ \left(k = \frac{1}{c}\right), \qquad \text{w. z. b. w.}$$

In analoger Weise ergibt sich, daß (57) die Lösung der Gleichung (55) ist.

Somit erhalten wir folgenden

Satz 5. *Aus den Bedingungen* 1, 2, *und* 3 *für den Abstand* d *ergibt sich, daß*

$$d = k \operatorname{arc} \cos (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2)$$

im elliptischen Falle, und

$$d = k \operatorname{ar} \operatorname{ch} \langle \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \rangle$$

im hyperbolischen Falle ist.

(Eingegangen am 31. Juli, 1954.)