Extremalaufgaben über endliche Punktsysteme.

Herrn Professor László Kalmár zum 50. Geburtstag gewidmet.

Von FRANZ KÁRTESZI in Budapest.

Als *„n-gliedriges Punktsystem“* bezeichnen wir in der vorliegenden Arbeit durchweg n verschiedene Punkte der Ebene, wenn 3 Punkte desselben niemals auf einer Geraden liegen. Die Punkte des gegebenen Systems werden wir gelegentlich *Ecken*, die Verbindungsgeraden je zweier Ecken *Kanten* des Systems nennen. Unter den durch das Punktsystem bestimmten $\binom{n}{3}$ Dreiecken darf also keines in eine Gerade ausarten. Den Sachverhalt, daß der beliebige Punkt P der Ebene im Innern von genau k verschiedenen dieser Dreiecke enthalten ist, werden wir so ausdrücken: Der Punkt P wird durch das gegebene Punktsystem *k-fach überdeckt.*

Ein gegebenes Punktsystem ordnet also den Punkten seiner Ebene — mit Ausnahme der Punkte seiner Kanten — eine nicht negative ganze Zahl

$$f(P) = k$$

zu, die als *Bedeckungsmultiplizität* des laufenden Punktes P der Ebene bezeichnet werden kann. Der größtmögliche Wert k in bezug auf ein gegebenes Punktsystem (die *maximale Bedeckungsmultiplizität*) wird durch die Anzahl n und die gegenseitige Lage der Ecken des Punktsystems bestimmt. Bei Betrachtung sämtlicher n-gliedriger Punktsysteme der Ebene erhebt sich die Frage nach dem *möglichst größten* und *kleinsten* Werte der Bedeckungsmultiplizität. Dasjenige Punktsystem, bei welchem dieses Maximum-maximorum bzw. Minimum-maximorum auftritt, nennen wir *gut verteilt,* bzw. *schlecht verteilt*. Das soeben eingeführte — nur von n abhängige — Maximum-maximorum bezeichnen wir mit $W(n)$, das Minimum-maximorum mit $V(n)$.

Zweck der vorliegenden Arbeit ist die Bestimmung von $W(n)$, wir werden zeigen, daß bei einer geeigneten Verteilung der Ecken des n-gliedrigen Punktsystems dieses $W(n)$ wirklich erreichbar ist, ferner trachten wir für $V(n)$ eine untere Schranke zu finden. Die Bestimmung von $W(n)$ und die Konstruktion einer solchen Konfiguration des Punktsystems für welches $W(n)$ auftritt, ist eine sehr einfache, eher eine kombinatorische Aufgabe; die Bestimmung der Anzahl $V(n)$ ist eine andere Frage, wir begnügen uns hier mit der Angabe einer unteren Schranke.

§ 1. Eine Maximumaufgabe bezüglich einer aus zweierlei Zeichen kombinierten Vorzeichenfolge.

1. Wir betrachten eine solche Folge aus u Elementen, in welcher jedes Element eines der Zeichen „$+$" oder „$-$" ist. Offenbar gliedert sich eine solche Folge in eine abwechselnde Reihe homogener Teilfolgen. (Es ist natürlich nicht ausgeschlossen, daß jede Teilfolge nur ein einziges Element enthält, dann haben die Elemente ein gliedweise abwechselndes Vorzeichen.) Eine solche Vorzeichenfolge — man darf immer voraussetzen, daß sie mit dem Zeichen $+$ beginnt — ist durch eine Zahlenfolge vom Typ

$$p_1 . q_1, p_2, q_2, p_3, q_3, \ldots \tag{1}$$

eindeutig charakterisierbar, wo p_k und q_k die Anzahl der „$+$" Zeichen, bzw. der „$-$" Zeichen in der k-ten homogenen Teilfolge bedeuten. Voraussetzungsgemäß ist daher

$$p_1 + q_1 + p_2 + q_2 + \cdots = n \tag{2}$$

Die Anzahl solcher Zeichenfolgen beträgt 2^{n-1}.

In einer solchen konkreten Zeichenfolge beachten wir drei beliebige Elemente in der originalen Reihenfolge. Die Folge „$+, -, +$" oder „$-, +, -$" nennen wir eine *alternierende Vorzeichentriade.* Mit $W(p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots)$ bezeichnen wir diejenige Anzahl, auf wieviel Arten man aus der Folge (1) eine alternierende Vorzeichentriade herausgreifen kann. Zur Durchführung der Abzählung gehen wir von jener homogenen Vorzeichenfolge aus, welcher das mittlere Element der Vorzeichentriade entstammt. So gelangt man leicht zur Formel

$$\begin{aligned} W(p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots) = \sum_i (p_1 + p_2 + \cdots + p_i) q_i (p_{i+1} + p_{i+2} + \cdots) + \\ + \sum_j (q_1 + q_2 + \cdots + q_j) p_{j+1} (q_{j+1} + q_{j+2} + \cdots). \end{aligned} \tag{3}$$

Der Index i erstreckt sich von 1 so weit, bis auf q_i noch eine Zahl q_{i+1} folgt, der Index j ebenfalls von 1 bis es noch eine auf p_{j+1} folgende Zahl q_{j+1} gibt.

Nun wollen wir die durch sämtliche n-gliedrige Vorzeichenfolgen bestimmten W Werte betrachten. Wir fragen nach dem größten Werte von W, und nach den Folgen bei welchen dieser größte Wert tatsächlich erreicht wird. Dieses Maximum werden wir mit $W(n)$ bezeichnen. Die n-gliedrige Vorzeichenfolge, in welcher $W(n)$ wirklich auftritt, heiße eine *gute Vorzeichenfolge.*

2. Zuerst beschäftigen wir uns mit denjenigen besonderen Folgen, die mit r „$+$" Zeichen beginnen, auf s „$+$" Zeichen enden (wobei auch $s = 0$ sein darf), und zwischen beiden homogenen Randfolgen die Vorzeichen gliedweise welchseln. Diese letztere Folge bestehe aus $2k-1$ Elementen. Eine solche Folge ist daher von der Form:

$$(\sigma) \qquad \underbrace{+\,+\cdots+}_{r}\;\underbrace{-+-+-\cdots-+-}_{2k-1}\;\underbrace{+\cdots+}_{s}$$

Der Wert W läßt sich nun einfach berechnen. Um die Anzahl der alternierenden Triaden leicht abzuzählen, teile man dieselben in drei Gruppen ein, je nachdem ein, zwei oder drei Elemente der Triade der mittleren — aus $2k-1$ Elementen bestehenden — entstammen. So ergibt eine kurze Rechnung den Wert

$$W = \binom{k}{1} rs + \binom{k}{2}(r+s+1) + 2\binom{k}{3}. \tag{4}$$

Die (σ) Folge ist so — von rechts nach links, oder umgekehrt — zu lesen, daß die Bedingung $r \geqq s$ erfüllt sei.

In unserem besonderen Falle ist der Wert W nur für

$$r=2,\ s=1 \text{ bzw. } r=1,\ s=0, \text{ oder } r=s=1 \tag{5}$$

erreichbar, je nachdem $n(=r+2k-1+s)$ eine gerade, oder eine ungerade Zahl ist.

Diese Behauptung folgt aus dem Umstande, daß die Verkürzung der r- und s-Elemente enthaltenden Randabteilungen und die gleichzeitige Verlängerung des mittleren alternierenden Teiles um ebensoviel Elemente den Wert W vergrößern kann.

Beweis. Wenn $r \geqq s \geqq 2$ ist, so setzen wir an die Stelle des $r-1$-ten und des $(r+2k+1)$-sten Zeichens ein „—" Zeichen. Diese Modifikation läßt den (σ) Charakter der Folge unberührt, man hat nur in der Formel (4) r, k, s durch $r-2,\ k+2,\ s-2$ zu ersetzen. Daraus folgt nach einigem Rechnen, daß diese Veränderung den Wert W um

$$w = (r-2)(s-1) + (r-1)(s-2) + 1 \tag{6}$$

erhöht. (Es ist belanglos, wenn durch die angezeigte Veränderung die neue Folge mit einem „—" Zeichen beginnen oder enden sollte, denn die Umwandlung sämtlicher Vorzeichen in das entgegengesetzte läßt w unverändert.)

Wenn $r \geqq 2,\ s < 2$ ist, dann vertausche man nur das $r-1$-te Vorzeichen mit einem „—" Zeichen. In (4) ist daher r, k mit $r-2,\ k+1$ zu vertauschen, was den Wert von W um

$$w = (r-2)s + (r-s-1)k \tag{7}$$

vergrößert; für $r=2,\ s=1$ ist aber $w=0$.

3. Zur Lösung der aufgeworfenen Frage führt nun die folgende Behauptung:

Wenn in einer guten Vorzeichenfolge die Anzahl sämtlicher „+" bzw. „—" Zeichen p, bzw. q beträgt $(p+q=n)$, dann läßt sich die vorgegebene Folge ohne Änderung von p und q in eine Folge vom Typ (σ) so umordnen, daß dabei der zugehörige Wert W nicht abnimmt.

Zum Beweise unserer Behauptung müssen wir die bei Vertauschung der Reihenfolge zweier aufeinander folgender entgegengesetzen Vorzeichen auftretende Veränderung w des Wertes W beachten. Wir betrachten irgendein „$+$“ Zeichen der Folge, auf welches ein „—“ Zeichen folgt. In der linksseitigen auf „$+$“ endenden Teilfolge sei x' und y' die Anzahl der „$+$“, bzw. „—“ Zeichen, in der mit „—“ beginnenden rechten Halbfolge seien diese Anzahlen x'', y'':

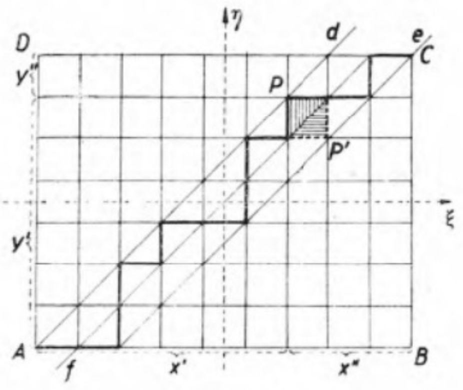
$$\underbrace{+\cdots\ \cdots\ \cdots}_{x'-1,\,y'}\overbrace{+\,-}^{1\ 1}\underbrace{\cdots\ \cdots\ \cdots}_{x'',\,y''-1}.$$

Die Vertauschung der Vorzeichen berührt bloß diejenigen Vorzeichentriaden, in welchen wenigstens ein Element eben eines der Vertauschten $+$, — Zeichen ist. Die alternierende Vorzeichentriade bleibt selbst dann unverändert, wenn nur eines ihrer Elemente zu den beiden Vertauschten gehört, denn das bewegte Zeichen wird ja bloß um eine Stelle rechts oder links verschoben, ohne Änderung der Reihenfolge der Triade. Betrachtet man nun diejenigen Vorzeichentriaden, in welchen zwei Zeichen den zu vertauschenden angehören, so kann durch die Vertauschung eine nicht abwechselnde Triade in eine abwechselnde, oder umgekehrt, verwandelt werden. Die Anzahl der Vorzeichentriaden erster Art beträgt $x'-1+y''-1$, diejenige der zweiten Art $y'+x''$. Es ist demnach

(8) $$w=(x'-x'')-(y'-y'')-2.$$

Die Vertauschung der benachbarten —, $+$ Zeichenfolge veranlässt eine Wertzunahme

(9) $$w=(y'-y'')-(x'-x'')-2.$$



Figur 1

Wenn zu einer Vorzeichenfolge W das Maximun gehört, dann kann selbstverständlich weder die Vertauschung der benachbarten Zeichen $+$, — noch der Zeichen —, $+$ eine Wertzunahme $w>0$ hervorrufen, d. h. jedes Vorzeichenvertauschen einer solchen Vorzeichenfolge wird durch eine der Formeln charakterisiert

$$(10)\qquad \frac{x'-x''}{2}-\frac{y'-y''}{2}\leqq 1 \quad \text{bzw.} \quad -\frac{x'-x''}{2}+\frac{y'-y''}{2}\leqq 1$$

je nachdem $+, -$, oder $-, +$ vertauscht wird.

Die Struktur einer Vorzeichenfolge wollen wir durch eine in ein Quadratgitter einbeschriebene Treppenlinie veranschaulichen. Die Abteilungen p_i und q_i werden durch entsprechend lange auf den Reihen und Spalten aufgetragenen Strecken dargestellt.

Figur 1 veranschaulicht daher die Vorzeichenfolge

$$++--+-++--+-++-+.$$

Bei einem Vorzeichenwechsel $+-$ oder $-+$, erleidet demnach die Treppenlinie eine Brechung der Form ⌟ bzw. ⌜.

Nun wollen wir dasjenige der Treppenlinie parallel gerichtete Rechteck $ABCD$ betrachten, in welchem die Treppenlinie und zwar von der linken unteren bis zur rechten oberen Ecke verläuft. Als Koordinatenachsen ξ, η wählen wir die beiden Mittellinien des Rechtecks. (Die Einheit bildet die Seite des Elementarquadrates des Gitters.) Die Geraden d, e, f in der Figur sind durch die Gleichungen

$$-\xi+\eta=1;\ \xi-\eta=1;\ \xi-\eta=0$$

definiert. f ist die Mittellinie des Streifens (de). Die Punkte dieses Streifens sind durch die gleichzeitig bestehenden Ungleichungen

$$-\xi+\eta\leqq 1,\quad \xi-\eta\leqq 1$$

charakterisiert.

Die Koordinaten des Eckpunktes P in der Figur 1 können aus den zugehörigen x', y', x'', y'' Werten berechnet werden:

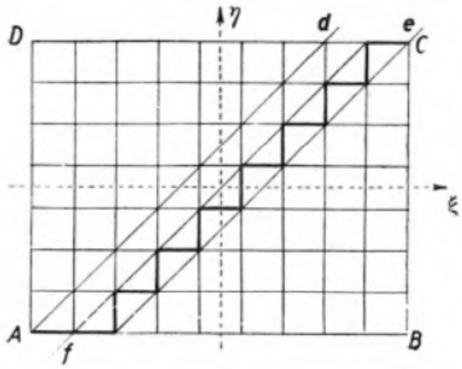
$$\xi=\frac{x'-x''}{2},\qquad \eta=\frac{y'-y''}{2}.$$

Ebenso findet man die Koordinaten der Eckpunkte der anderen ⌜ oder ⌟.

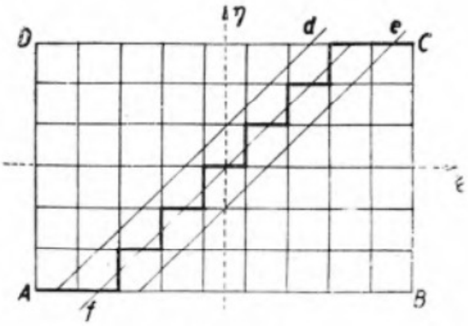
Daraus und aus (10) ist ersichtlich, daß eine den Maximalwert W erzeugende Vorzeichenfolge darstellende Treppenlinie auf der den Punkt D enthaltenden Seite der Geraden d keine ⌜ gestellte Brechung haben darf, auch kann sie keinen ⌟ gestellten Eckpunkt auf der den Punkt B enthaltenden Seite der Linie e besitzen. Daraus folgt, daß der Treppenlinienzug ganz innerhalb des Streifens (d, e) verläuft.

Das Vertauschen der Zeichenfolge $+-$ oder $-+$ benachbarter Elemente wird durch eine solche Formveränderung der Treppenlinie dargestellt, welche das Umstellen eines ⌜ oder ⌟ Punktes in die entgegengesetzte Stellung bewirkt, so daß die Seite des Einheitsquadrates in der besagten Ecke auf die entgegengesetzte Seite der Diagonale um 45° umgeklappt wird. (Figur 1 zeigt das Umstellen einer ⌜ Ecke P in einen ⌟ Eckpunkt P'.) Soll ein auf der Geraden e oder d gelegener Eckpunkt umgestellt werden, so handelt es sich eben um das Umklappen um einen auf der Mittellinie f gelegenen Punkt, und der auf der einen Begrenzungslinie des Streifens liegende Punkt kommt auf die andere Begrenzungslinie. Mit Rücksicht auf die Relationen (10), sowie auf die Gleichungen der Linien e und f, bleibt der Wert W für die ursprüngliche und für die abgeänderte Treppenlinie derselbe. Im Streifen (d, e) können entweder nur eine einzige oder mehrere Treppenlinien verlaufen, je nachdem

$$p \not\equiv q \pmod 2) \quad \text{oder} \quad p \equiv q \pmod 2),$$



Figur 2



Figur 3

d. h. je nachdem der Halbumfang des Rechteckes $n = p + q$ eine ungerade, oder eine gerade Zahl ist. Im letzten Falle sind nämlich alle Gitterpunkte des Streifens auf den Geraden d, e, f gelegen, im ersten hingegen sind Gitterpunkte nur im Innern der Teilstreifen (d, f) und (f, e). Im zweiten Falle, wenn also der Streifen mehrere Treppenlinien enthalten kann, gibt es immer einen wohlbestimmten Linienzug, welcher aus den übrigen so entsteht, dass man ihren in den Teilstreifen (d, f) liegenden Teil um f in den Teilstreifen (e, f) umklappt. Diese „uniformisierende" Umformung beeinflußt den zur Treppenlinie gehörenden W Wert nicht, *zu sämtlichen in den Streifen* (d, e) *einbeschriebenen Treppenlinienzügen gehört* demnach *derselbe* W *Wert.* (Figur 2. zeigt die durch Uniformisierung erhaltene Umformung des Treppenlinienzuges auf Figur 1. Figur 3 veranschaulicht den Fall, wenn innerhalb des Streifens nur eine einzige Treppenlinie verläuft.)

4. Aus den bisherigen Entwicklungen geht hervor, daß man zur Bestimmung von $W(n)$ sich bloß auf Betrachtung der Folgen vom Typ (σ) beschränken darf. Es genügt sogar nach **2** die alternierenden Folgen

$$+ - + - \cdots + -,$$

oder

$$+ - + - \cdots + - +,$$

zu betrachten, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Die Anwendung der Formel (4) ergibt in beiden Fällen

$$
\left.\begin{aligned}
w(n) &= \frac{1}{4}\,\frac{n+2}{n-1}\binom{n}{3} \qquad n \text{ gerade} \\
w(n) &= \frac{1}{4}\,\frac{n+1}{n-2}\binom{n}{3} \qquad n \text{ ungerade}
\end{aligned}\right\}. \tag{11}
$$

5. Schließlich wollen wir die Struktur derjenigen Vorzeichenfolgen charakterisieren, in welchen $W(n)$ auftritt, sowie zugleich die Anzahl der verschiedenen Fälle bestimmen.

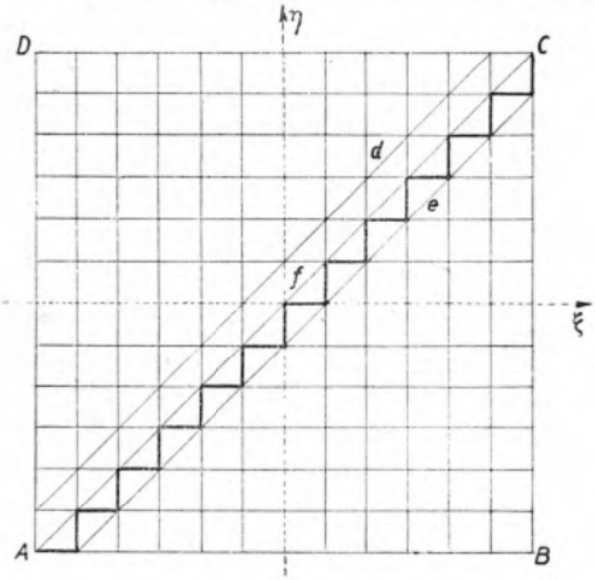
Bei ungeradem n gibt es nur eine gute Vorzeichenfolge, und zwar die alternierende

$$+-+-\cdots-+-+.$$

Bei geradem n sind z. B. sowohl die mit $++$ beginnenden, als auch die mit $+$ beginnenden und hernach alternierenden

$$++-+-+-+\cdots-+-+$$
$$+-+-+-+\cdots+-+-$$

Folgen gut. Gut sind übrigens alle aus dieser hervorgegangenen Zeichenfolgen, in denen eine beliebige Anzahl $-+$ Zeichenpaare jedesmal in das



Figur 4

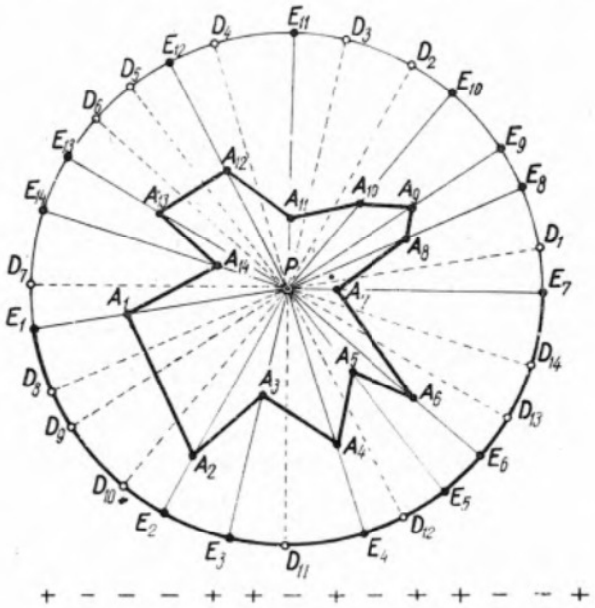
entgegengesetzte $+-$ Zeichenpaar umgewandelt wurde. In der der ersten Musterfolge entsprechenden Figur zieht sich der Streifen (d, e) in $ABCD$ so, wie in der Figur 1, bei der zweiten Musterfolge so, wie auf Figur 4. (Natürlich befindet sich jede $\lrcorner$ gestellte Ecke auf der Geraden e.) Der Umwandlung der Vorzeichen entsprechend verfahre man so, daß man aus diesen

Eckpunkten — ausgenommen die erste ⌋ gestellte Ecke der zweiten Musterfolge — k, sonst beliebige Punkte herausgreift, wobei $k = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}$ sein kann, und dieselben um die Diagonale f in die andere Halbebene umklappt. Durch dieses Verfahren erhält man sämtliche, den beiden Musterfolgen entsprechende Fälle, d. h. $2 \cdot 2^{\frac{n}{2}}$ Fälle.

§ 2. Die durch ein n-gliedriges Punktsystem erreichbare maximale Bedeckung.

Nun werden wir die Identität der in der Einleitung und der in § 1 eingeführten Funktionen $W(n)$ beweisen.

1. Gegeben sei ein n-gliedriges Punktsystem und ein Punkt P, der auf keiner der durch das System bestimmten $\binom{n}{2}$ Kanten liegt, dann lässt sich die Bedeckungsmultiplizität des Punktes P bezüglich des Punktsystems auf die Bestimmung der Anzahl der im vorausgehenden Paragrafen bestimmten Anzahl der alternierenden Vorzeichentriaden zurückführen.



Figur 5

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ seien die Elemente des Punktsystems, und der den soeben ausgesprochenen Bedingungen genügende Punkt P sei ein innerer Punkt mindestens eines durch die Elemente des Systems bestimmten Dreieckes. (In Figur 5 liegt z. B. der Punkt P innerhalb des Dreieckes $A_1 A_6 A_9$.) Wir drehen die von P ausgehende Halbgerade um P und numerieren die Punkte des Systems in der Reihenfolge, wie sie von dieser rotierenden Geraden getroffen werden. Vorschriftsgemäß trifft keine dieser Lagen — selbst in der Verlängerung — einen weiteren Punkt des Systemes. Nun verbinde man jeden Punkt mit dem Nächstfolgenden (im Sinne der Numerierung) und den n-ten mit dem ersten. So erhält man ein Sternpolygon in bezug auf P.

Nun schreiben wir um P als Mittelpunkt einen das Sternvieleck enthaltenden Kreis. Jetzt projizieren wir aus P die Eckpunkte des Vieleckes auf die Kreisperipherie. Die Projektion des Punktes A_k heiße E_k, der diametral entgegengesetzte Punkt von E_k ist D_k. So gelangt man zu $2n$ verschiedenen Punkten am Kreise. Den Punkten E schreiben wir das „$+$" den D Punkten das "—" Zeichen zu. Es ist nun leicht ersichtlich, daß der Punkt P innerhalb solcher, und nur solcher $A_iA_jA_k$ Dreiecke liegt, deren entsprechende $E_iE_jE_k$ Punkte den vollständigen Kreis in drei Bogen zerteilen, deren jeder kürzer als der Halbkreis ist.

Von E_1 ausgehend gelangen wir der Reihe nach durch $E_2, E_3 \ldots$ bis zum D_1 vorhergehenden Punkte, welcher sowohl ein E, als auch ein D Punkt sein kann. (In der Figur ist es der Punkt E_7). Nun notiere man die am betrachteten Kreisbogen in der Reihe des Fortschreitens liegenden Punkten zugeschriebenen Vorzeichen. Die alternierenden Vorzeichentriaden der so gewonnenen Vorzeichenfolge vertreten ein-eindeutig die den Punkt P überdeckenden $A_iA_jA_k$ Dreiecke. Auf Grund des § 1 ist nun ersichtlich, daß die Überdeckungsmultiplizität des Punktes P die Größe $W(n)$ nicht übertreffen kann; ihren expliziten Wert gibt die Formel (11) an.

2. *Die Überdeckungsmultiplizität $W(n)$ ist durch ein n-gliedriges Punktsystem wirklich realisierbar.*

Wenn n ungerade ist, wollen wir das dem Kreise einbeschriebene konvexe reguläre n-Eck betrachten. Auf Grund der soeben gegebenen Entwicklung und auf Grund von § 1 Punkt **4** ist es klar, daß das aus den Eckpunkten des dem Kreise einbeschriebenen regulären n-Ecks bestehende Punktsystem den Mittelpunkt des Kreises $W(n)$-fach überdeckt.

Wenn n gerade ist, wollen wir das dem Kreise einbeschriebene konvexe reguläre $2n$-Eck betrachten und seine Ecken in irgendeinem Umlauffssinne numerieren. Wir greifen die Eckpunkte

$$A_1, A_3, A_5, \ldots, A_{n-1}$$

heraus, sowie die den Punkten

$$A_2, A_4, A_6, \ldots, A_n$$

diametral entgegengesetzen Punkte. Dieses n-gliedrige Punktsystem überdeckt den Mittelpunkt des Kreises $W(n)$-fach.

3. Wir erwähnen bloß die leicht beweisbare Tatsache, daß jedes 5- oder 6-gliedrige Punktsystem gut verteilt ist. Und zwar so, daß man zu jedem

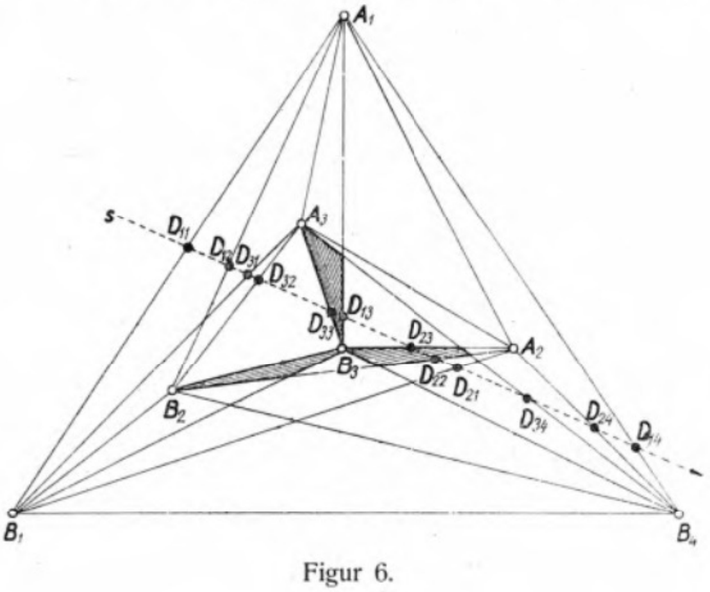
5-gliedrigen Punktsystem immer einen fünf- aber nicht mehrfach bedeckten Punkt finden kann. Zu jedem 6-gliedrigen Punktsystem kann man einen achtfach aber nicht mehrfach bedeckten Punkt finden. Die Formel (11) ergibt tatsächlich

$$W(5) = 5 \quad \text{und} \quad W(6) = 8.$$

Naheliegend ist nun die Frage nach dem kleinsten Werte n, für welchen das nicht mehr gilt, für welchen man im allgemeinen keinen $W(n)$-fach überdeckten Punkt findet. Dieser geringste Wert ist bereits $n = 7$, d. h. zum 7-gliedrigen Punktsystem kann man im allgemeinen keinen $W(7) = 14$-fach überdeckten Punkt finden. Zum Beweise genügt es, ein solches 7-gliedriges Punktsystem zu konstruieren, für welches die zugehörige maximale Überdeckungsmultiplizität 13 beträgt. Die in einem rechtwinkligem Koordinatensystem durch die Koordinaten $(0, 0)$, $(16, 0)$, $(8, 12)$, $(7, 7)$, $(4, 3)$, $(8, 4)$, $(12, 4)$ bezeichneten Punkte bilden ein solches 7-gliedriges Punktsystem. Dieses Punktsystem überdeckt drei sich in einem Punkte treffende, übrigens sich gegenseitig ausschließende Polygonbereiche 13-fach, es gibt aber keinen mehrfach überdeckten Punkt. Figur 6 veranschaulicht eben dieses Beispiel. Das schraffierte Gebiet ist der 13-fach überdeckte Bereich.

§ 3. Eine untere Schranke für den kleinsten Wert der zu einem n-gliedrigen Punktsystem gehörigen maximalen Überdeckungsmultipliztität.

1. Gegeben sei ein n-gliedriges Punktsystem. Wir wollen eine solche Gerade betrachten, die keiner der durch das System bestimmten $\binom{n}{2}$ Geraden parallel ist. Durch Verschiebung dieser Geraden kann sie eine Lage erreichen,



Figur 6.

daß bei geradem n auf beiden Seiten der Geraden je $\frac{n}{2}$ Punkte des Systems liegen, bei ungeradem n sollen auf der einen Seite $\frac{n-1}{2}$, auf der anderen $\frac{n+1}{2}$ Punkte sein. (In der Figur 6 hat die Gerade s diese Lage.)

Auf der einen Seite dieser Geraden s liegen die Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots,$ auf der andern die Punkte $B_1, B_2, B_3, \ldots,$ des Punktsystems. Den Schnittpunkt der Verbindungslinie $A_i B_k$ mit s bezeichne man mit D_{ik}. Die Anzahl der D Punkte beträgt (infolge ihrer Definition) $\frac{n^2}{2}$ bzw. $\frac{n^2-1}{2}$. Sollten unter ihnen einige zusammenfallen, so kann man durch Parallelverschiebung der Geraden s immer erreichen, daß sie sich trennen. In gewissen Fällen bildet die durch zwei D Punkte verbundene Strecke den durch einen der $\binom{n}{3}$ Dreiecke des n-gliedrigen Punktsystems überdeckten Teil der Geraden s, und zwar dann, wenn der erste oder der zweite Index der beiden D Punkte übereinstimmt, d. h., wenn es sich um zwei solche Punkte handelt, welche in derselben Zeile oder Spalte der Matrix

$$\begin{pmatrix} D_{11}, D_{12}, D_{13}, \ldots \\ D_{21}, D_{22}, D_{23}, \ldots \\ D_{31}, D_{32}, D_{33}, \ldots \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \end{pmatrix} = \mathbf{D}$$

auftreten.

Wir gehen von einem auf der Geraden s liegendem D Punkte, und zwar von einem Randpunkte aus, und bezeichnen alle Punkte mit „+“, welche vor dem mittleren D Punkte liegen, diesen Punkt und die nachher folgenden bezeichnen wir mit „—“. Wenn es keinen mittleren D Punkt gibt, dann gibt es einen mittleren Abschnitt, in diesem Falle heißen alle auf der einen Seite dieses Abschnittes liegende Punkte „+“, die auf der anderen Seite „—“. Wir stellen nun die Frage: Wie vielfach wird die durch den mittleren und den ihm nächst gelegenen $+D$ Punkt begrenzte Strecke, bzw. der mittlere Abschnitt durch das Punktsystem überdeckt? Offenbar so vielfach, wie oft ein im Vorzeichen entgegengesetztes, aber im ersten oder zweiten Index übereinstimmendes Paar aus den D Punkten der Geraden s herausgegriffen werden kann.

Nun ersetzen wir in der Matrix $\mathbf{D}$ jedes Element durch sein soeben festgesetzes Vorzeichen. Die so gewonnene Matrix besteht aus den Elementen + und —, und die Differenz der in ihr enthaltenen + und — Zeichen beträgt 0, oder 1. Die Überdeckungsmultiplizität des soeben definierten Abschnittes ergibt die folgende Abzählung. Wir zählen in jeder Zeile und in jeder Spalte die aus entgegengesetzen Vorzeichen bestehenden Paare. Ihre Summe ergibt die Überdeckungsmultiplizität.

So z. B. erhält man die Überdeckungsmultiplizität der Strecke $D_{13}D_{23}$ in bezug auf das Punktsystem $A_1A_2A_3B_1B_2B_3B_4$ (Figur 6), wenn die Punkte D_{11} bis D_{13} mit dem $+$, die von D_{23} bis D_{14} befindlichen Punkte mit dem $-$ Zeichen behaftet werden. Die der Strecke zugeordnete Vorzeichenmatrix lautet daher

$$\begin{pmatrix} + & + & + & - \\ - & - & - & - \\ + & + & + & - \end{pmatrix},$$

in deren Zeilen und Spalten insgesamt $3+0+3+2+2+2+0=12$ abwechselnde Vorzeichenpaare auftreten. Die in Rede stehende Strecke wird daher 12-fach überdeckt.

2. Wir betrachten nun eine aus k Zeilen und l Spalten bestehende Matrix, deren Elemente die Vorzeichen $+$ oder $-$ sind. Es sei $k+l=n$ und $l-k=0$ oder 1; diese Matrix bezeichnen wir mit $\mathbf{D}$. Es sind also die in den Zeilen und den Spalten befindlichen Paare mit entgegengesetztem Vorzeichen abzuzählen. Die Gesamtzahl solcher Paare bezeichnen wir mit $S(\mathbf{D})$.

Die Anzahl der Differenz der $+$ und $-$ Zeichen in der Matrix $\mathbf{D}$ sei gleich 0 oder 1. Wir denken uns die Zahl n fixiert und fragen nach dem Minimum der zu all' diesen Vorzeichenmatrizen gehörenden $S(\mathbf{D})$ Werten. Dieses Minimum bezeichnen wir mit $S(n)$.

Wir stellen uns den Aufbau der in Rede stehenden, kl Elemente enthaltenden Matrix folgendermaßen vor: Mit der ersten Zeile beginnend, schreite man von Zeile zu Zeile; innerhalb der Zeilen schreibe man solange, von Element zu Element fortschreitend, $+$ Zeichen, bis die soeben bestimmte Anzahl der $+$ Zeichen nicht erreicht wird. Danach schreibe man lauter $-$ Zeichen. Diese eindeutig bestimmte Vorzeichenmatrix heiße $\mathbf{D}_0$. Wir behaupten ohne Beweis, daß

$$S(D_0)=S(n)$$

ist.

Aus Punkt **1** geht klar hervor, daß man zum n-gliedrigen System jedesmal einen durch das System mindestens $S(n)$-fach überdeckten Punkt finden kann.

Dem 6-gliedrigen Punktsystem ist in der angegebenen Weise die Matrix

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} + & + & + \\ + & + & - \\ - & - & - \end{pmatrix}$$

zugeordnet. Nun ist $S(D_0)=0+2+0+2+2+2=8$. Man findet also zu jedem 6-gliedrigen System einen 8-fach überdeckten Punkt, die Formel (11) zeigt aber, daß es in keinem 6-gliedrigen Punktsystem einen mehr als 8-fach überdeckten Punkt gibt.

(Eingegangen am 19. Februar, 1954.)