Remarques algébriques sur la solution donnée par M. Fréchet à l'équation de Kolmogoroff.

A Monsieur Professeur László Kalmár à l'occasion de son 50ième anniversaire.

Par J. ACZÉL à Debrecen.

A. N. KOLMOGOROFF [1], [2] [1]) a introduit pour la probabilité des événements en chaîne dans le cas inhomogène les équations fonctionnelles

$$p_{ik}(s, u)=\sum_j p_{ij}(s, t)\, p_{jk}(t, u) \qquad (s\leqq t\leqq u) \tag{1}$$

$$\sum_j p_{ij}(s, t)=1 \tag{2}$$

dont la première exprime, qu'un objet (particle, système) qui s'est trouvé au moment s dans l'état E_i et qui arrive au moment u dans l'état E_k doit être au temps intermédiaire t dans un des états possibles E_j et le deuxième affirme, qu'il doit passer au cours de l'intervalle (s, t) de l'état E_i dans un des états possibles E_j.

On voit immédiatement que l'équation (1) se laisse présenter dans la forme

$$P(s, t)\, P(t, u)=P(s, u) \tag{1'}$$

où $P(t, u)=(p_{ij}(t, u))$ est la matrice des probabilités.

B. HOSTINSKY [1], [2] a donné la première solution de cette équation au moyen d'une expression contenante une série infinie d'intégrales multiples.

M. FRÉCHET ([1], [2], [3]; A. TORTRAT [1]) a trouvé la solution continue resp. régulière la plus générale de l'équation (1) dans une forme beaucoup plus simple et il a aussi examiné les restrictions qui entrent si l'on prend en considération aussi l'équation (2).

Dans cette note (qui a pris sa naissance sans connaissance des résultats de M. FRÉCHET) après avoir reformulés ces résultats dans une forme peut-être un peu plus forte et après les avoir appliqués aux procès composés de POISSON (voir L. JÁNOSSY, A. RÉNYI, J. ACZÉL [1], J. ACZÉL [2], A. RÉNYI [1]), nous voulons examiner aussi le cas singulier. Ceci nous donne l'occasion de formuler une forme de la condition de compatibilité des équations linéaires inhomogènes qui nous semble de n'être pas assez genéralement connue.

[1]) Les nombres en paranthèses se rapportent à la Bibliographie à la fin de la note.

Nous nous bornerons au cas d'un nombre fini d'états possibles; une remarque de M. Fréchet [4] montre comment les résultats de ce genre peuvent être étendus au cas dénombrable.

À la fin de la note nous résolvons l'équation fonctionnelle

$$f(x, y) \circ f(y, z) = f(x, z)$$

dans des groupes générales et nous montrons inversement que l'existence d'une solution assez puissante de cette équation entraîne que l'opération $\circ$ satisfait aux axiomes de groupe.

§ 1.

M. Fréchet ([1], [2], [3]) a démontré, que si les fonctions $p_{ij}(t, u)$ sont continues et $p_{ij}(t, t) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ si } i = j \\ 0, \text{ si } i \neq j \end{cases}$ alors la matrice $P(t, u)$ est régulière. Nous nous occuperons dans ce § avec le cas des matrices régulières.

Théorème 1. *Si*

(1′) $$P(s, t)\, P(t, u) = P(s, u) \qquad (a \leqq s \leqq t \leqq u)$$

c'est à dire

(1) $$\sum_j p_{ij}(s, t)\, p_{jk}(t, u) = p_{ik}(s, u)$$

et

(3) $$|P(s, t)| = |p_{ij}(s, t)| \neq 0 \qquad (a \leqq s \leqq t)$$

sont remplis pour $s = a$ *et pour* t, u *arbitraires, alors* $P(s, t)$ *est régulière et* (1), (3) *sont aussi satisfaits pour tous les* s *quelconques;*

$$p_{ij}(t, t) = \delta_{ij}$$

[$P(t, t) = I$, *matrice unité*] *et la solution régulière la plus générale de* (1′)—(1) *est*

(4′) $$P(t, u) = \Pi(t)^{-1}\, \Pi(u)$$

ou ce qui revient au même

(4) $$p_{ij}(t, u) = \sum_k \Pi_{ki}(t)\, \pi_{kj}(u)$$

où $\Pi(t)$ *est une matrice régulière des fonctions arbitraires* $\pi_{ij}(t)$, $\Pi(t)^{-1}$ *est la matrice inverse de* $\Pi(t)$ *et* $\Pi_{ij}(t)$ *est le mineur algébrique de l'élément* $\pi_{ij}(t)$ *divisé par le déterminant* $|\Pi(t)| = |\pi_{ij}(t)|$.

Démonstration. Si nous envisageons l'équation (1′) avec $s = a$ et multiplions avec $P(a, t)^{-1}$ de gauche (cette matrice existe, étant que $P(a, t)$ était supposée régulière), nous obtenons

$$P(t, u) = \Pi(t)^{-1}\Pi(u)$$

après avoir introduite la notation $\Pi(t) = P(a, t)$ et c'est la formule (4') cherchée, qui est équivalente à (4). $P(t, t) = \Pi(t)^{-1}\Pi(t) = I$ est aussi immédiat. Inversement si $P(t, u)$ est de la forme (4'), alors (1') est satisfait pour des s arbitraires:

$$P(s, t)\,P(t, u) = \Pi(s)^{-1}\Pi(t)\,\Pi(t)^{-1}\Pi(u) = \Pi(s)^{-1}\Pi(u) = P(s, u)$$

c. q. f. d.

Remarques. 1. Comme M. FRÉCHET l'a montré (p. e. [3] pp. 224—225, 228) la restriction $a \leqq s$ n'est pas essentiel dans le cas régulier et la restriction $s \leqq t \leqq u$ non plus.

2. Notre théorème peut être appliqué à l'équation

$$p_k(s, u) = \sum_{j=0}^{k} p_j(s, t)\,p_{k-j}(t, u)$$

du procès composé de POISSON (voir L. JÁNOSSY, A. RÉNYI, J. ACZÉL [1], J. ACZÉL [2]) en posant

$$p_{ij}(t, u) = \begin{cases} p_{j-i}(t, u) & si\, j \geqq i, \\ 0 & si\, j < i, \end{cases}$$

Ceci présente des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} p_0\, p_1\, p_2 \cdots p_n \\ 0\;\; p_0\, p_1 \cdots p_{n-1} \\ 0\;\; 0\;\; p_0 \cdots p_{n-2} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0\;\; 0\;\; 0\; \cdots p_0 \end{pmatrix},$$

et on voit immédiatement que les produits et les inverses des matrices de ce type sont de la même forme.

On obtient ainsi comme solution la formule

$$p_j(t, u) = \sum_{k=0}^{j} \Pi_k(t)\,\pi_{j-k}(u),$$

où les fonctions $\pi_n(u)$ sont arbitraires avec la seule restriction $\pi_0(u) \neq 0$ et

$$\Pi_0(t) = \frac{1}{\pi_0(t)}, \quad \Pi_k(t) = \frac{(-1)^k}{\pi_0(t)^{k+1}} \cdot \begin{vmatrix} \pi_1(t) & \pi_2(t) & \cdots & \pi_k(t) \\ \pi_0(t) & \pi_1(t) & \cdots & \pi_{k-1}(t) \\ 0 & \pi_0(t) & \cdots & \pi_{k-2}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \pi_1(t) \end{vmatrix}$$

P. e.

$$p_2(t,u)=\frac{\pi_0(t)^2\pi_2(u)-\pi_0(t)\pi_1(t)\pi_1(u)+[\pi_1(t)^2-\pi_0(t)\pi_2(t)]\pi_0(u)}{\pi_0(t)^3}=$$

$$=\frac{\pi_0(u)}{\pi_0(t)}\left[\frac{\pi_2(u)}{\pi_0(u)}-\frac{\pi_1(t)}{\pi_0(t)}\,\frac{\pi_1(u)}{\pi_0(u)}+\left(\frac{\pi_1(t)}{\pi_0(t)}\right)^2-\frac{\pi_2(t)}{\pi_0(t)}\right]=$$

$$=e^{L(u)-L(t)}\left\{C_2(u)-C_2(t)+\frac{[C_1(u)-C_1(t)]^2}{2!}\right\}$$

avec les notations

$$L(u)=\log\pi_0(u),\ \ C_1(u)=\frac{\pi_1(u)}{\pi_0(u)},\quad C_2(u)=\frac{\pi_2(u)}{\pi_0(u)}-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi_1(u)}{\pi_0(u)}\right)^2$$

en plein accord avec la formule (1_2) p. 221. dans la note de J. Aczél [2].

Si l'on calcule tous les p_j succesivement on a par induction la formule (1) p. 220 du travail cité et, en prenant encore

$$\sum_{j=0}^{\infty}p_j(t,u)=1\ \text{ et }\ p_j(t,u)\geqq 0$$

en considération, on voit qu'on peut faire

$$\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j(t)=1\ \text{ et }\ \pi_j(t)\geqq 0,$$

d'où aussi la formule

$$\sum_{j=1}^{\infty}[C_j(u)-C_j(t)]=L(t)-L(u)$$

(voir ibidem) suit aisément.

Théorème 2. *Pour que*

$$\sum_j p_{ij}(s,t)p_{jk}(t,u)=p_{ik}(s,u)\qquad(a\leqq s\leqq t\leqq u)\tag{1}$$

$$\sum_j p_{ij}(s,t)=1\qquad (a\leqq s\leqq t)\tag{2}$$

$$|p_{ij}(s,t)|\neq 0\tag{3}$$

soient satisfaits pour $s=a$ il faut et il suffit que

$$\sum_j \pi_{kj}(t)=g_k=\text{constant}\tag{5}$$

(les $\pi_{kj}(t)$ peuvent être choisis toujours de sorte qu'il soit $g_k=1$) dans

$$p_{ij}(t,u)=\sum_k \Pi_{ki}(t)\pi_{kj}(u)\tag{4}$$

et alors (1), (2), (3) *restent vrais pour tous les valeurs possibles de s.*

Démonstration. En vertu du théorème 1, nos suppositions entraînent

$$p_{ij}(t,u)=\sum_k \Pi_{ki}(t)\pi_{kj}(u)$$

et en substituant cette formule en (2) avec $s=a$ nous obtenons

$$1=\sum_j p_{ij}(a,t)=\sum_k\sum_j \Pi_{ki}(a)\pi_{kj}(t).$$

Nous multiplions ces équations avec $\pi_{li}(a)$ et nous sommons par rapport à l'index i:

$$\sum_i \pi_{li}(a)=\sum_j\sum_k\sum_i \pi_{li}(a)\Pi_{ki}(a)\pi_{kj}(t)=\sum_j\sum_k \delta_{kl}\pi_{kj}(t)=\sum_j \pi_{lj}(t)$$

donc $\sum_j \pi_{kj}(t)$ est constant en accord avec notre assertion.

Réciproquement si $\sum_j \pi_{kj}(t)$ est constant pour chaque k, c'est à dire si

$$\sum_j \pi_{kj}(t)=\sum_j \pi_{kj}(s)$$

alors

$$\sum_j p_{ij}(s,t)=\sum_j\sum_k \Pi_{ki}(s)\pi_{kj}(t)=\sum_k [\Pi_{ki}(s)\sum_j \pi_{kj}(t)]=$$
$$=\sum_k [\Pi_{ki}(s)\sum_j \pi_{kj}(s)]=\sum_j\sum_k \Pi_{ki}(s)\pi_{kj}(s)=\sum_j \delta_{ij}=1$$

d'où (2) est satisfaite pour toutes les valeurs possibles de s et t, c. q. f. d.

§ 2.

Dans le cas où la fonction $|P(a,s)|=|\Pi(s)|$ a des racines, mais $|\Pi(t)|\neq 0$, toutes les considérations du § précédent restent valables.

Avant que nous traitions le cas où la matrice $\Pi(t)$ est singulière, nous observons, que pourque l'équation

$$AX=B, \tag{6}$$

où la matrice A est singulière, admette une solution X, il faut et il suffit, que la condition de compatibilité soit satisfaite. Une forme généralement connue (voir p. e. R. ZURMÜHL [1]) de cette condition est que les matrices A et $(A\,B)$ soient du même rang. Une autre forme plus explicite de la condition de compatibilité peut être obtenue ainsi:

Nous désignons par r le rang de la matrice A, par A^1 le mineur différent de zéro d'ordre r et nous regardons la partition suivante de cette matrice

$$A=\begin{pmatrix}A^1 & A^3\\ A^2 & A^4\end{pmatrix}.$$

et des matrices

$$X=\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}B_1\\ B_2\end{pmatrix}$$

(X_1, B_1 ont r lignes). Ainsi nous avons

$$\begin{pmatrix}A^1 & A^3\\ A^2 & A^4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1\\ B_2\end{pmatrix}. \tag{7}$$

Nous multiplions cette équation de gauche avec la matrice

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -A^2(A^1)^{-1} & I \end{pmatrix}$$

(0 est une matrice nulle, les I sont des matrices unités) différente de zéro, laquelle n'altère pas le rang du multiplicande, parce qu'elle a des 1 dans la diagonale principale et des 0 à un côté de cette diagonale (cf. A. C. AITKEN [1]). Ainsi nous obtenons

$$\begin{pmatrix} A^1 & A^3 \\ 0 & -A^2(A^1)^{-1}A^3+A^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 \\ -A^2(A^1)^{-1}B_1+B_2 \end{pmatrix}.$$

Mais, comme nous l'avons observé, la nouvelle matrice

$$\begin{pmatrix} A^1 & A^3 \\ 0 & -A^2(A^1)^{-1}A^3+A^4 \end{pmatrix}$$

doit être du même rang r que $\begin{pmatrix} A^1 & A^3 \\ A^2 & A^4 \end{pmatrix}$ ce qui n'est possible que si

$$-A^2(A^1)^{-1}A^3+A^4=0.$$

(A. C. AITKEN [1]). Ainsi nous concluons, que

$$\begin{pmatrix} A^1 & A^3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2-A^2(A^1)^{-1}B_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A^1X_1+A^3X_2 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2-A^2(A^1)^{-1}B_1 \end{pmatrix}$$

d'où la condition de compatibilité prend la forme plus explicite (peut-être moins-généralement connue):

(8) $$B_2=A^2(A^1)^{-1}B_1.$$

En même temps nous voyons, que si cette condition est remplie, alors la solution de (6) est

(9) $$X_1=(A^1)^{-1}\ (B_1-A^3X_2).$$

ce qui était évident déjà de (7). Il est immédiat, que si (8) est rempli, alors (9) satisfait à l'équation (7):

$$\begin{pmatrix} A^1 & A^3 \\ A^2 & A^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (A^1)^{-1}(B_1-A^3X_2) \\ X_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 \\ A^2(A_1)^{-1}B_1+(-A^2(A^1)^{-1}A^3+A^4)X_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}.$$

Après ces préparations nous avons le

Théorème 3. *Si les équations*

(1) $$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(s,t)p_{jk}(t,u)=p_{ik}(s,u)\qquad (i,k=1,2,\ldots,n;\ s\leqq t\leqq u),$$

c'est à dire

(1') $$P(s,t)P(t,u)=P(s,u),$$

sont satisfaites pour $s=a$ *et pour tous les* t, u *possibles et si* $P(a,t)=\Pi(t)$ *est une matrice singulière du rang* r *dont* $\Pi(t)$ *est un mineur différent de zéro d'ordre* r

$$\Pi(t)=\begin{pmatrix}\Pi^1(t) & \Pi^3(t)\\ \Pi^2(t) & \Pi^4(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Pi_1(t)\\ \Pi_2(t)\end{pmatrix}$$

et

$$P(t,u)=\begin{pmatrix}P_1(t,u)\\ P_2(t,u)\end{pmatrix},$$

alors

$$P_1(t,u)=\Pi^1(t)^{-1}\Pi_1(u)-\Pi^1(t)^{-1}\Pi^3(t)P_2(t,u) \tag{10'}$$

et

$$\text{rang }(\Pi(t)\ \Pi(u))=\text{rang }\Pi(t)$$

ou ce qui revient au même

$$\Pi_2(u)=\Pi^2(t)\Pi^1(t)^{-1}\Pi_1(u) \tag{11'}$$

[$\Pi^2(t)\Pi^1(t)^{-1}\Pi_1(u)$ *est indépendante de* t] *c'est à dire* [$\Pi^1_{ij}(t)$ *est dans* $\Pi^1(t)$ *le mineur algébrique de* $\pi_{ij}(t)$ *divisé par* $|\Pi^1(t)|$]:

$$p_{ij}(t,u)=\sum_{k=1}^{r}\Pi^1_{ki}(t)\left(\pi_{kj}(u)-\sum_{m=r+1}^{n}\pi_{km}(t)p_{mj}(t,u)\right) \tag{10}$$
$$(i=1,2,\ldots,r;\ j=1,2,\ldots,n)$$

et

$$\pi_{mj}(u)-\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{r}\pi_{mi}(t)\Pi^1_{ki}(t)\pi_{kj}(u)=f_{mj}(t,u) \tag{11}$$
$$(j=1,2,\ldots,n;\ m=r+1,\ldots,n)$$

[$f_{mj}(t,u)$ *est indépendante de* t].

Si nous avons encore

$$\sum_{j=1}^{n}p_{ij}(t,u)=1 \qquad (i=1,2,\ldots,r;\ t\leq u) \tag{2'}$$

alors

$$\sum_{j=1}^{n}\pi_{lj}(u)-\sum_{i=1}^{r}\pi_{li}(t)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=r+1}^{n}\pi_{lm}(t)p_{mj}(t,u)=g_l(t,u) \qquad (l=1,\ldots,r) \tag{12}$$

[$g_l(t,u)$ *est indépendant de* t].

On voit avec les notations

$$P(a,t)=\Pi(t)=A,\ P(a,u)=\Pi(u)=B,\ P(t,u)=X,$$

que (8) resp. (9) donne (11') resp. (10'), qui sont équivalentes à (11) et (10). Aussi rang $(A\ B)=$ rang A donne:

$$\text{rang }(\Pi(t)\ \Pi(u))=\text{rang }\Pi(t).$$

D'autre part si l'on substitue (10) dans (2')

$$1=\sum_{j=1}^{n}p_{ij}(t,u)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}\Pi^1_{ki}(t)\left[\pi_{kj}(u)-\sum_{m=r+1}^{n}\pi_{km}(t)p_{mj}(t,u)\right],$$

alors en multipliant avec $\pi_{li}(t)$ $(l=1,2,\ldots,r)$ et en sommant par rapport à i on obtient

$$\sum_{i=1}^{r} \pi_{li}(t) = \sum_{j=1}^{n} \pi_{lj}(u) - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=r+1}^{n} \pi_{lm}(t) p_{mj}(t,u)$$

et cette équation est équivalente à (12), c. q. f. d.

Théorème 4. *Si $\Pi(t)$ est du rang r et $\Pi^1(t)$ est un de ses mineur différent de zéro, alors* (10') *et* (11') *entraînent*

$$\Pi(t)P(t,u) = \Pi(u). \tag{13}$$

Si encore $\Pi(s)$ a le même rang et le mineur correspondant $\Pi^1(s)$ est différent de zéro, nous avons

$$\Pi(s)P(s,t)P(t,u) = \Pi(s)P(s,u) \qquad (s \leqq t \leqq u) \tag{14}$$

D'autre part (10) *et* (12) *entraînent* (2').

Démonstration. Comme nous avons vu dans la première partie de ce §, (10') et (11') entraînent

$$\Pi(t)P(t,u) = \Pi(u). \tag{13}$$

De même

$$\Pi(s)P(s,t) = \Pi(t) \tag{15}$$

Si nous multiplions (15) avec $P(t,u)$ de droite en prenant aussi (13) en considération, nous avons la formule (14) cherchée.

De (10) et (12) on obtient

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t,u) = \sum_{k=1}^{r} \Pi_{ki}^1(t)\left[\sum_{j=1}^{n} \pi_{kj}(u) - \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=r+1}^{n} \pi_{km}(t)\, p_{mj}(t,u)\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \Pi_{ki}^1(t)\left[\sum_{l=1}^{r} \pi_{kl}(t) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=r+1}^{n} \pi_{km}(t)\, p_{mj}(t,u) - \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=r+1}^{n} \pi_{km}(t)\, p_{mj}(t,u)\right] = 1,$$
$$(i=1,2,\ldots,r),$$

c. q. f. d.

§ 3.

L'équation (1') et sa solution peuvent être géneralisées largement à des variétés algébriques:

Théorème 5. *Si l'ensemble A forme un groupe sous l'opération $\circ$, alors l'équation fonctionnelle*

$$f(x,y) \circ f(y,z) = f(x,z) \tag{16}$$

(où x, y et z sont éléments d'un ensemble B) a toujours une solution.

La solution générale de (16) *est*

$$f(x,y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)^{-1}$$

De plus, si A est un groupe et (16) est satisfait pour un $z=\alpha$ et tous les x, y de B, alors il reste vrai aussi pour tous les $z \in B$.

DÉMONSTRATION. Nous écrivons (16) avec $z=\alpha$

$$f(x, y) \circ f(y, \alpha)=f(x, \alpha)$$

et en désignant $f(x, \alpha)=\varphi(x)$ nous multiplions cette équation avec l'inverse $\varphi(y)^{-1}$ de $\varphi(y)$ ce qui nous conduit à

$$f(x, y)=\varphi(x) \circ \varphi(y)^{-1}$$

et c'est ce que nous avons voulu montrer.

Inversement, si $f(x, y)$ est de cette forme, alors, A étant un groupe sous l'opération $\circ$, nous avons

$$f(x, y) \circ f(y, z)=\varphi(x) \circ \varphi(y)^{-1} \circ \varphi(y) \circ \varphi(z)^{-1}=f(x, z)$$

c. q. f. d.

Cependant la possibilité de résoudre l'équation homogéne analogue à (16),

$$f(x) \circ f(y)=f(x+y),$$

est caractéristique aux groupes continus à une dimension (voir p. e. L. E. J. BROUWER [1]). Le théorème 5 a aussi un inverse dans un certain sens:

Théorème 6. *S'il existe un ensemble B et une fonction $f(x, y)$ définie dans B, dont les valeurs sont éléments de A, telle que l'opération $\circ$ soit définie pour tous les $f(x, y), f(y, z)$ et*

(16) $$f(x, y) \circ f(y, z)=f(x, z)$$

soit satisfait pour tous les x, y et z dans B et telle que $f(x, y)$ parcourt pour tout x fixe en variant y et pour un $y=\alpha$ en variant x l'ensemble A entier, — alors A est un groupe sous l'opération $\circ$.

DÉMONSTRATION. Nous avons à montrer, que

1. Avec a et b aussi le produit $a \circ b$ appartient à A.
2. $(a \circ b) \circ c=a \circ(b \circ c)$ pour tous les a, b, c éléments de A.
3. Il'y a un élément e dans A tel que $e \circ a=a$ pour tout $a \in A$.
4. Il'y a pour tout $a \in A$ un élément $a^{-1} \in A$ tel que $a^{-1} \circ a=e$.

En vertu des suppositions faites dans notre théorème il'y a un y tel que $f(\alpha, y)=a$, un z tel que $f(y, z)=b$ et un t tel que $f(z, t)=c$. Donc en appliquant (16) nous avons

1. $$a \circ b=f(\alpha, y) \circ f(y, z)=f(\alpha, z) \in A,$$

2. $$(a \circ b) \circ c=[f(\alpha, y) \circ f(y, z)] \circ f(z, t)=f(\alpha, z) \circ f(z, t)=f(\alpha, t)= \\ =f(\alpha, y) \circ f(y, t)=f(\alpha, y) \circ[f(y, z) \circ f(z, t)]=a \circ(b \circ c)$$

et

3. $$a=f(\alpha, y)=f(\alpha, \alpha) \circ f(\alpha, y)=f(\alpha, \alpha) \circ a$$

pour tout $a \in A$, donc $f(\alpha, \alpha)=e$.

De même, il'y a pour tout $a \in A$ un η tel que $f(\eta, \alpha) = a$ et donc

4. $$f(\alpha, \eta) \circ a = f(\alpha, \eta) \circ f(\eta, \alpha) = f(\alpha, \alpha) = e$$

c'est à dire $f(\alpha, \eta) = a^{-1}$, c. q. f. d.

Bibliographie.

L. Jánossy, A. Rényi, J. Aczél, [1] On composed Poisson distributions. I., *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **1** (1950), 209—224.

J. Aczél, [2] On composed Poisson-distributions. III., *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **3** (1952), 219—224.

A. C. Aitken, [1] Determinants and matrices. (Edinburgh—London, 1948), pp. 45, 67—70.

L. E. J. Brouwer, [1] Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen unabhängig von den Axiomen von Lie, *Math. Annalen,* **67** (1909), 246—267. — Voir aussi B. L. v. d. Waerden, Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen. (Göttingen, 1929), pp. 90—96.

M. Fréchet, [1] Sur la solution continue la plus générale d'une équation fonctionnelle de la théorie des probabilités en chaîne, *Comptes Rendus, Paris,* **195** (1932), 639—641. — Voir aussi A. N. Kolmogoroff, Zentralblatt für Math. **5** (1933), 255.
[2] Solution continue la plus générale d'une équation fonctionnelle de la théorie des probabilités en chaîne, *Bull. Soc. Math. France,* **60** (1932), 242—277. — Supplément ibidem, **61** (1933), 182—185.
[3] Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités. II. — Méthode des fonctions arbitraires. Théorie des événements en chaîne dans le cas d'un nombre fini d'états possibles. (Paris, 1938), Chapitre II., Section II.
[4] Solution générale de l'équation de Chapman—Kolmogoroff, *Annali Scuola Norm. Sup. Pisa,* (2) **5** (1936), 143—158.

B. Hostinsky, [1] Sur une équation fonctionnelle de la théorie des probabilités, *Public. Fac. Sc. Univ. Mas.,* (Brno), **156** (1932), 4—12.
[2] Sur une classe d'équations fonctionnelles, *Journal de Math.* **16** (1937), 267—284.

A. N. Kolmogoroff, [1] Analytische Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Math. Annalen,* **104** (1931), 415—438. — En particulier p. 427.
[2] Zur Theorie der Markoffschen Ketten, *Math. Annalen* **112** (1935), 155—160.

A. Rényi, [1] On composed Poisson-distributions. II., *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **2** (1951), 83—98.

A. Tortrat, [1] Sur les fonctions de corrélation des processus de Markoff, *Comptes Rendus, Paris,* **228** (1949), 1559—1561.

R. Zurmühl, [1] Matrizen. (Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1950), pp. 242—243.

(Reçu le 10 juin 1954.)