Eine Verallgemeinerung eines Kroneckerschen Determinantensatzes.

Herrn Professor László Kalmár zum 50. Geburtstag gewidmet.

Von B. GYIRES in Debrecen.

Der wohlbekannte Determinantensatz von KRONECKER wurde nicht von ihm selbst, sondern 1858 von ZEHFUSS[1]) mitgeteilt. Weitere Beweise rühren von RADOS[2]) (1886) und HENSEL[3]) (1890) her. Der Satz wurde von RADOS[4]) in 1929 verallgemeinert. Der 1934 mitgeteilte Determinantensatz von G. HAJÓS[5]) enhält mehrere bekannten Determinantensätze, u. a. auch die Sätze von RADOS und KRONECKER als Spezialfälle. Verfasser gab 1951 eine Verallgemeinerung des Satzes von RADOS[6]). Von den beiden in dieser Arbeit behandelten Sätzen stellt der eine eine Verallgemeinerung des RADOSschen Satzes, der andere aber eine Verallgemeinerung des erwähnten, vom Verfasser herrührenden Satzes dar. Der erste dieser Sätze ist im zweiten im allgemeinen nicht enthalten. Der Beweis stützt sich in beiden Fällen auf die alternierenden Zahlen. Wir könnten auch denjenigen Weg befolgen, den der Verfasser in seiner oben erwähnten Arbeit eingeschlagen hat, aber es würden sich dann — wie dies auch dort ersichtlich wird — ziemlich langwierige Beweise ergeben.

1. Die natürlichen Zahlen r, s, n, m, p, q sollen der Bedingung

$$\frac{s}{r}=\frac{n}{m}=\frac{p}{q} \tag{1}$$

genügen. Mit Hilfe der aus q Zeilen und p Spalten bestehenden Matrix

$$A^{\alpha}_{ij}=\underset{(\alpha)}{(a^{ij}_{zt})} \tag{2}$$

$$(i=1,\ldots,s;\quad j=1,\ldots,r;\quad \alpha=1,\ldots,m;\quad z=1,\ldots,q;\quad t=1,\ldots,p)$$

---

1) *Zeitschrift für Mathematik und Physik,* **3** (1858), p. 298.

2) *Matematikai és Természettudományi Értesitő,* **4** (1886), pp. 268–278.

3) *Acta Mathematica,* **14** (1890), pp. 317–319.

4) *Matematikai és Természettudományi Értesitő,* **46** (1929), pp. 724—737.

5) *Matematikai és Természettudományi Értesitő,* **50** (1934), pp. 234—240.

6) *Acad. Repub. Pop. Române. Stud. Cerc. Mat.* **2** (1951), pp. 1—22.

und mit Hilfe der aus p Zeilen und q Spalten bestehenden Matrix

$$(3) \qquad B_{kl}^{\beta} = (\underset{(\beta)}{b_{uv}^{kl}})$$

$(k = 1, \ldots, m; \quad l = 1, \ldots, n; \quad \beta = 1, \ldots, r; \quad u = 1, \ldots, p; \quad v = 1, \ldots, q)$
bilden wir die Matrizen

$$(4) \qquad A_\alpha = \begin{pmatrix} A_{11}^{\alpha} \cdots A_{1r}^{\alpha} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ A_{s1}^{\alpha} \cdots A_{sr}^{\alpha} \end{pmatrix}$$

und

$$(5) \qquad B_\beta = \begin{pmatrix} B_{11}^{\beta} \cdots B_{1n}^{\beta} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ B_{m1}^{\beta} \cdots B_{mn}^{\beta} \end{pmatrix}.$$

Diese sind gemäß (1) quadratische Matrizen der Ordnung $pr = sq$, bzw. $mp = nq$. Mit Hilfe der ebenfalls aus den Matrizen (2) und (3) gebildeten Matrizen

$$C_{jk} = \begin{pmatrix} A_{11}^{j} B_{jk}^{1} \cdots A_{1r}^{j} B_{jk}^{r} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ A_{s1}^{j} B_{jk}^{1} \cdots A_{sr}^{j} B_{jk}^{r} \end{pmatrix}$$

(mit sq Zeilen und rq Spalten) geben wir die Matrix

$$(6) \qquad C = \begin{pmatrix} C_{11} \cdots C_{1n} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ C_{m1} \cdots C_{mn} \end{pmatrix}$$

an, die gemäß (1) quadratisch und von der Ordnung $msq = nrq$ ist. Im folgenden soll die Determinante einer Matrix M mit $|M|$ bezeichnet werden.

Satz 1. *Es gilt*

$$(7) \qquad |C| = |A_1| \cdots |A_m| \, |B_1| \cdots |B_r|.$$

Beweis. Wir führen die alternierenden Einheiten

$$(8) \qquad \underset{(\alpha)}{e_{z+(i-1)q}}$$

in der Reihenfolge

$$\alpha = 1, \ldots, m; \quad i = 1, \ldots, s; \quad z = 1, \ldots, q$$

ein, und aus diesen, sowie aus den Elementen den Matrizen (2) bilden wir die alternierenden Zahlen

$$(9) \qquad \underset{(\alpha)}{A_t^j} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{z=1}^{q} \underset{(\alpha)}{a_{zt}^{ij}} \underset{(\alpha)}{e_{z+(i-1)q}}$$

in der Reihenfolge

$$\alpha = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, r; \quad t = 1, \ldots, p.$$

Nach dem bekannten Satze von Grassmann gilt dann

$$(10) \qquad \prod_{j=1}^{r} \prod_{t=1}^{p} \underset{(\alpha)}{A_t^j} = |A_\alpha| \prod_{i=1}^{s} \prod_{z=1}^{q} \underset{(\alpha)}{e_{z+(i-1)q}}.$$

Bilden wir nun aus den Elementen der Matrizen (3) mit den alternierenden Zahlen (9) als Einheiten die alternierenden Zahlen

$$\underset{(\beta)}{B_v^l} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{u=1}^{p} \underset{(\beta)}{b_{uv}^{kl}} \underset{(k)}{A_u^\beta} \tag{11}$$

in der Reihenfolge

$$\beta = 1, \ldots, r; \quad l = 1, \ldots, n; \quad v = 1, \ldots, q,$$

dann gilt, wiederum nach dem GRASSMANNschen Satze,

$$\prod_{l=1}^{n} \prod_{v=1}^{q} \underset{(\beta)}{B_v^l} = |B_\beta| \prod_{l=1}^{m} \prod_{v=1}^{p} \underset{(l)}{A_v^\beta}. \tag{12}$$

Auf Grund von (10) und (9) ist dann

$$\prod_{\beta=1}^{r} \prod_{l=1}^{n} \prod_{v=1}^{q} \underset{(\beta)}{B_v^l} = \prod_{\beta=1}^{r} \prod_{l=1}^{n} \prod_{v=1}^{q} \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{s} \sum_{z=1}^{q} \left(\sum_{u=1}^{p} \underset{(k)}{a_{zu}^{i\beta}} \underset{(\beta)}{b_{uv}^{kl}} \right) \underset{(k)}{e_{z+(i-1)q}}. \tag{13}$$

Da auf der rechten Seite dieser Gleichung das allgemeine Glied der Matrix (6) auftritt, so gilt, mit Rücksicht auf das Bildungsgesetz der Matrix (6) auf Grund des GRASSMANNschen Satzes

$$(-1)^\varepsilon |C| \prod_{\alpha=1}^{m} \prod_{i=1}^{s} \prod_{z=1}^{q} \underset{(\alpha)}{e_{z+(i-1)q}} = \prod_{\beta=1}^{r} \prod_{l=1}^{n} \prod_{v=1}^{q} \underset{(\beta)}{B_v^l}, \tag{14}$$

wo ε die Anzahl der Faktorenwechsel bedeutet, die wir vorzunehmen haben, falls wir auf der rechten Seite von (13) die Multiplikation für l mit derjenigen für β vertauschen. Mit Rücksicht auf (12) kann die rechte Seite von (14) in der Form

$$\prod_{\beta=1}^{r} |B_\beta| \cdot \prod_{\beta=1}^{r} \prod_{l=1}^{m} \prod_{v=1}^{p} \underset{(l)}{A_v^\beta}$$

geschrieben werden. Indem wir hier die Multiplikation für l mit derjenigen für β vertauschen und (10) berücksichtigen, erhalten wir statt der rechten Seite von (14) den Ausdruck

$$(-1)^\varepsilon \prod_{\beta=1}^{r} |B_\beta| \cdot \prod_{\alpha=1}^{m} |A_\alpha| \cdot \prod_{\alpha=1}^{m} \prod_{i=1}^{s} \prod_{z=1}^{q} \underset{(\alpha)}{e_{z+(i-1)q}}.$$

Dann ergibt aber (14) auf Grund des GRASSMANNschen Satzes gerade das zu beweisende Resultat.

Ist in (2) bzw. in (3)

$$A_{ij}^\alpha = A_{ij} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m),$$

$$B_{kl}^\beta = B_{kl} \qquad (\beta = 1, \ldots, r)$$

und bezeichnen wir die mit diesen Elementen gebildeten Matrizen (4) bzw. (5) mit A, bzw. B, dann gilt auf Grund von (7)

$$|C| = |A|^m |B|^r,$$

und das ist gerade die verallgemeinerte Form des Satzes von KRONECKER.

2. Seien

$$r_1 \geqq \cdots \geqq r_m$$

natürliche Zahlen und sei m_i die Anzahl derjenigen unter diesen, die nicht kleiner als i sind $(i=1,2,\ldots,r;\ r=r_1)$, $m=m_1$.

Mit Hilfe der quadratischen Matrizen der Ordnung p

$$A_{ij}^{\alpha}=(\underset{(\alpha)}{a_{st}^{ij}}) \tag{15}$$

$$(i=1,\ldots,r_\alpha;\quad j=1,\ldots,r;\quad \alpha=1,\ldots,m)$$

und

$$B_{kl}^{\beta}=(\underset{(\beta)}{b_{uv}^{kl}}) \tag{16}$$

$$(k=1,\ldots,m;\quad l=1,\ldots,m_\beta;\quad \beta=1,\ldots,r)$$

bilden wir die Matrizen

$$C_{ik}=\begin{pmatrix} A_{11}^{i}\,B_{ik}^{1} & \cdots & A_{1r_k}^{i}\,B_{ik}^{r_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r_i1}^{i}\,B_{ik}^{1} & \cdots & A_{r_ir_k}^{i}\,B_{ik}^{r_k} \end{pmatrix}$$

und mit Hilfe dieser die Matrix

$$C=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{m1} & \cdots & C_{mm} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Falls wir noch die Bezeichnungen

$$A_\alpha=\begin{pmatrix} A_{11}^{\alpha} & \cdots & A_{1r_\alpha}^{\alpha} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r_\alpha1}^{\alpha} & \cdots & A_{r_\alpha r_\alpha}^{\alpha} \end{pmatrix} \tag{18}$$

und

$$B_\beta=\begin{pmatrix} B_{11}^{\beta} & \cdots & B_{1m_\beta}^{\beta} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{m_\beta1}^{\beta} & \cdots & B_{m_\beta m_\beta}^{\beta} \end{pmatrix} \tag{19}$$

einführen, so können wir folgendes behaupten:

Satz 2. *Auch für* (17), (18) *und* (19) *gilt die Gleichung* (7).

Beweis. Der befolgte Gedankengang stimmt im wesentlichen mit denjenigen des vorhergehenden Beweises überein.

Wir führen die alternierenden Einheiten (8) in der Reihenfolge

$$\alpha=1,\ldots,m;\quad i=1,\ldots,r_\alpha;\quad s=1,\ldots,p$$

ein und mit Hilfe dieser, sowie der Matrizen (15) bilden wir die alternierenden Zahlen

$$\underset{(\alpha)}{A_t^j}=\sum_{i=1}^{r_\alpha}\sum_{s=1}^{p}\underset{(\alpha)}{a_{st}^{ij}}\,\underset{(\alpha)}{e_{s+(i-1)p}} \tag{20}$$

in der Reihenfolge

$$\alpha = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, r; \quad t = 1, \ldots, p.$$

Kraft des GRASSMANNschen Satzes gilt dann

$$\prod_{j=1}^{r_\alpha} \prod_{t=1}^{p} \underset{(\alpha)}{A_t^j} = |A_\alpha| \prod_{i=1}^{r_\alpha} \prod_{s=1}^{p} \underset{(\alpha)}{e_{s+(i-1)p}}. \tag{21}$$

Mit Hilfe der Elemente der Matrizen (16), und mit den alternierenden Zahlen (20) als Einheiten bilden wir die alternierenden Zahlen

$$\underset{(\beta)}{B_v^l} = \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{t=1}^{p} \underset{(\beta)}{b_{tv}^{\alpha l}} \underset{(\alpha)}{A_t^\beta} \tag{22}$$

in der Reihenfolge

$$\beta = 1, \ldots, r; \quad l = 1, \ldots, m_\beta; \quad v = 1, \ldots, p.$$

Auf Grund von (22) und (20) gilt dann

$$\prod_{\beta=1}^{r} \prod_{l=1}^{m_\beta} \prod_{v=1}^{p} \underset{(\beta)}{B_v^l} = \prod_{\beta=1}^{r} \prod_{l=1}^{m_\beta} \prod_{v=1}^{p} \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{i=1}^{r_\alpha} \sum_{s=1}^{p} \left(\sum_{t=1}^{p} \underset{(\alpha)}{a_{st}^{i\beta}} \underset{(\beta)}{b_{tv}^{\alpha l}} \right) \underset{(\alpha)}{e_{s+(i-1)p}}.$$

Aus denselben Gründen, die uns den Übergang von (13) auf (14) ermöglichten, und da mit Rücksicht auf die Darstellung der Zahlen m_β mittels der Zahlen r_α für die alternierenden Zahlen $c_{\alpha\beta}$ die Gleichung

$$\prod_{\alpha=1}^{m} \prod_{\beta=1}^{r_\alpha} c_{\alpha\beta} = (-1)^\varepsilon \prod_{\beta=1}^{r} \prod_{\alpha=1}^{m_\beta} c_{\alpha\beta} \tag{23}$$

gilt, wo ε die Anzahl der vorzunehmenden Faktorenwechsel bedeutet, falls wir die Multiplikation für α mit derjenigen für β vertauschen, so gilt die Gleichung

$$(-1)^\varepsilon |C| \prod_{\alpha=1}^{m} \prod_{i=1}^{r_\alpha} \prod_{s=1}^{p} \underset{(\alpha)}{e_{s+(i-1)p}} = \prod_{\beta=1}^{r} \prod_{l=1}^{m_\beta} \prod_{v=1}^{p} \underset{(\beta)}{B_v^l}. \tag{24}$$

Da wir die Zahlen (22) mit Hilfe der alternierenden Einheiten (20) gebildet haben, können wir den Satz von GRASSMANN auf der rechten Seite von (24) nur dann anwenden, falls die obere Schranke des zweiten Produktes nicht m_β, sondern m ist. Um dies zu erreichen, führen wir die Größen

$$\underset{(\beta)}{B_v^l} = \underset{(l)}{A_v^\beta} \tag{25}$$

$$(\beta = 1, \ldots, r; \quad l = m_\beta + 1, \ldots, m; \quad v = 1, \ldots, p)$$

ein. Durch Anwendung des GRASSMANNschen Satzes erhalten wir

$$\prod_{l=1}^{m} \prod_{v=1}^{p} \underset{(\beta)}{B_v^l} = |B_\beta| \prod_{l=1}^{m} \prod_{v=1}^{p} \underset{(l)}{A_v^\beta},$$

woraus sich, mit Rücksicht auf (25),

$$\prod_{l=1}^{m_\beta} \prod_{v=1}^{p} \underset{(\beta)}{B_v^l} = |B_\beta| \prod_{l=1}^{m_\beta} \prod_{v=1}^{p} \underset{(l)}{A_v^\beta}$$

ergibt.

Setzen wir dies auf der rechten Seite von (24) ein, und berücksichtigen wir nochmals (23), so kann die rechte Seite von (24) auf Grund von (21) in der Form

$$(-1)^{\varepsilon} \prod_{\beta=1}^{r} |B_\beta| \cdot \prod_{\alpha=1}^{m} \prod_{\beta=1}^{r_\alpha} \prod_{\varrho=1}^{p} \underset{(\alpha)}{A_\varrho^\beta} =$$

$$= (-1)^{\varepsilon} \prod_{\beta=1}^{r} |B_\beta| \cdot \prod_{\alpha=1}^{m} |A_\alpha| \cdot \prod_{\alpha=1}^{m} \prod_{i=1}^{r_\alpha} \prod_{s=1}^{p} \underset{(\alpha)}{e_{s+(i-1)p}}$$

geschrieben werden. Setzen wir dies in (24) ein, so liefert die erhaltene Gleichung den Beweis unseres Satzes.

(Eingegangen am 30. November 1954.)