Invariante Taylorsche Reihe in einem Finslerschen Raum.

Herrn Professor László Kalmár zum 50. Geburtstag gewidmet.

Von A. RAPCSÁK in Debrecen.

Einleitung.

H. S. RUSE [1] hat die Taylorsche Reihe eines Tensors in einem Riemannschen Raum in invarianter Form bestimmt. Zur gewünschten invarianten Darstellung gelangte er durch Verwendung von Normalkoordinaten. Im Falle einer Mannigfaltigkeit von Linienelementen ist die Frage komplizierter, da in diesem Falle die Kurvenschar, die der Einführung der Normalkoordinaten zu Grunde liegt, — wie O. VARGA [1] gezeigt hat — im allgemeinen keine geodätische Schar bildet.

In vorliegender Arbeit bestimmen wir die invariante Form der Taylorschen Reihe in einem Finslerschen Raum mit Hilfe der von O. VARGA betrachteten Normalkoordinaten [1].

In § 1 stellen wir die Grundgleichungen der Finslerschen Räume zusammen, in § 2 führen wir die Normalkoordinaten ein. Wir bezeichnen die Bestimmung der Normalkoordinaten nach O. VARGA als quasigeodätisch. Die zu einem Linienelement gehörigen Quasigeodätischen bilden dann ein Kurvenfeld. Die Bogenlänge des quasigeodätischen Kurvenfeldes ist in der Umgebung des Mittelpunktes des Linienelementes eine eindeutige Ortsfunktion. Die partielle Ableitungen des mit $\frac{1}{2}$ multiplizierten Quadrates dieser Ortsfunktion liefern die Normalkoordinaten. Die auf diese Weise von neuem hergeleiteten Normalkoordinaten führen wir in § 3 ein, und bestimmen mit ihrer Hilfe in § 4 die invariante Form der Taylorschen Reihe.

Die vorkommenden Größen sollen regulär-analytische Funktionen ihrer Veränderlichen sein.

§ 1.

Ein n-dimensionaler Raum F_n, in dem das Bogenelement durch die Funktion

$$ds = L(x^1, x^2, \ldots, x^n, dx^1, \ldots, dx^n) \tag{1, 1}$$

festgelegt wird,[1]) ist ein Finslerscher Raum. Von der Funktion L fordern wir, daß sie in den dx^i positiv homogen 1-ter Ordnung sei,[2]) und daß sie zu einem regulären Variationsproblem führe.

CARTAN hat statt des n-dimensionalen Punktraumes eine $(2n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit von Linienelementen eingeführt, deren Grundelement also ein gerichtetes Linienelement (x, v) ist. Für die Parameter v^i, die die Richtung des Linienelementes bestimmen, kommt nur ihr Verhältnis in Betracht.

Alle Größen werden bezüglich eines Linienelementes definiert. Die Vektoren und die Tensoren sollen in den v^i Funktionen homogen von nullter Dimension sein.

Der metrische Grundtensor ist durch

$$g_{ik}(x, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L^2(x, v)}{\partial x^i \partial x^k} \tag{1, 2}$$

definiert, wobei

$$\det |g_{ik}| > 0$$

ist, d. h. es existiert der zu den g_{ik} reziproke Tensor g^{ik}. Die Länge λ eines Vektors $\xi^i(x, v)$ kann man mit Hilfe des metrischen Grundtensors durch die Formel

$$\lambda = +\sqrt{g_{ik}\xi^i\xi^k} = +\sqrt{\xi^i\xi_i} \tag{1, 3}$$

ausdrücken.

Der Cosinus des Winkels von zwei in demselben Linienelement angegebenen Vektoren ist:

$$\cos(\xi^i, \eta^i \sphericalangle) = \frac{\xi^i \eta_i}{\sqrt{\xi^k\xi_k}\sqrt{\eta^r\eta_r}}. \tag{1, 4}$$

Ist $l^i(x, v)$ der Einheitsvektor, dessen Richtung mit der von v^i übereinstimmt, so sind die kovarianten bzw. kontravarianten Komponenten dieses Vektors durch die Formeln

$$l_i = \frac{\partial L(x, v)}{\partial v^i} \tag{1, 5 a}$$

$$l^i = \frac{v^i}{L(x, v)} \tag{1, 5 b}$$

$$l^i l_i = 1 \tag{1, 6}$$

angegeben.

Nun gehen wir auf die Definition des invarianten Differentials eines Vektors $\xi^i(x, v)$ über. Es ist

$$D\xi^i = d\xi^i + C^i_{kl}(x, v)\xi^k dv^l + \Gamma^i_{kl}(x, v)\xi^k dx^l \tag{1, 7}$$

$$D\xi_i = d\xi_i - C^k_{il}(x, v)\xi_k dv^l - \Gamma^k_{il}(x, v)\xi_k dx^l, \tag{1, 7'}$$

wobei $C^i_{kl}(x, v)$ und $\Gamma^i_{kl}(x, v)$ die Zusammenhangsobjekte des Raumes F_n sind.

---

[1]) Siehe z. B. CARTAN [1] und O. VARGA [2], [3].

[2]) Lateinische Zeiger laufen im folgenden von 1 bis n.

Im folgenden fassen wir die wichtigsten Formeln der Geometrie von F_n kurz zusammen. Die Herleitung dieser Formeln und die Bestimmung des invarianten Differentials kann man z. B. in CARTAN [1] finden. Es ist

$$
(1,8) \qquad \begin{cases}
C_{ikl}(x,v) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{ik}(x,v)}{\partial v^l} \\
C^i_{kl}(x,v) = g^{ir} C_{krl} \\
\Gamma_{ikl}(x,v) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \dfrac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \dfrac{\partial g_{il}}{\partial x^k}\right) + C_{ilr} G^r_k - C_{lkr} G^r_i \\
\qquad G_r = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial^2 L^2}{\partial v^r \partial x^i} v^i - \dfrac{\partial L^2}{\partial x^r}\right) \\
\qquad G^i = g^{ir} G_r \\
\qquad G^i_r = \dfrac{\partial G^i}{\partial v^r} = v^k \Gamma^i_{kr} \\
\quad A_{irk} = L\, C_{irk}.
\end{cases}
$$

Die C_{ikl} transformieren sich wie ein Tensor dritter Stufe und sie sind in den v^i von (—1)-ter Ordnung homogen; die A_{ikl} bilden somit einen Tensor. Die Ableitungen eines Tensors nach den v^i transformieren sich wie ein Tensor, aber wegen der Homogenität (—1)-ter Ordnung der Ableitung bekommt man erst nach Multiplikation mit L einen Tensor.

Aus (1, 8), (1, 7) und (1, 7′) ergeben sich:

$$
(1,9) \qquad C_{iks} l^s = C_{iks} v^s = 0.
$$

Wir führen die in den unteren Indexen symmetrischen Größen

$$
(1,10) \qquad \Gamma^{*i}_{kl} = \Gamma^i_{kl} - C^i_{kr} \Gamma^r_{sl} v^s
$$

ein.

Aus (1, 6), (1, 7) ergibt sich für das invariante Differential des Vektors l^i der Ausdruck:

$$
(1,10') \qquad D l^i = \omega^i = d l^i + \frac{1}{L} G^i_k dx^k.
$$

Aus den Gleichungen (1, 8), (1, 9), (1, 10) bekommt man für die Γ^{*i}_{jk} die ausführliche Form:

$$
(1,11) \qquad \Gamma^{*i}_{kl} = g^{ij} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j}\right) + g^{ij} \cdot C_{klr} G^r_j - C^i_{kr} G^r_l - C^i_{lr} G^r_k.
$$

Endlich folgt aus (1, 10), (1, 9) und (1, 8):

$$
(1,11') \qquad v^k \Gamma^{*i}_{kl} = G^i_l.
$$

Das invariante Differential (1,7) läßt sich unter Beachtung von (1,10′) und (1,8) in der Form

$$
(1,12) \qquad D\xi^i = d\xi^i + [A^i_{kl} D l^k + \Gamma^{*i}_{kl} dx^k]\, \xi^l
$$

schreiben.

Ist

$$\frac{D\xi^i}{ds} = 0, \tag{1,13}$$

so ist $\xi^i(x(s), v(s))$ bezüglich der stetig differenzierbaren Folge der Linienelemente $[x(s), v(s)]$ parallel.

Ist

$$Dl^i = 0, \tag{1,14}$$

so besteht die stetige Folge $[x(s), v(s)]$ aus parallelen Linienelementen.

Aus (1,6) und (1,11) folgt unmittelbar

$$\Gamma^{*i}_{0l} = \frac{1}{L} G^i_l, \tag{1,15}$$

wobei

$$\Gamma^{*i}_{0l} = l^k \Gamma^{*i}_{kl} \tag{1,15'}$$

gilt.

Es folgt aus (1,8), (1,10), daß die Funktionen Γ^{*i}_{jk} und Γ^{*i}_{0k} in den v^i homogen nullter Ordnung sind, also

$$\left\{\begin{array}{l} \Gamma^{*i}_{jk}(x, v) = \Gamma^{*i}_{jk}(x, l) \\ \Gamma^{*i}_{0k}(x, v) = \Gamma^{*i}_{0k}(x, l) \end{array}\right. \tag{1,15''}$$

bestehen.

Aus (1,15) und (1,14) ergibt sich im Falle paralleler Linienelemente:

$$Dl^i = dl^i + \Gamma^{*i}_{0l}\, dx^l = 0. \tag{1.16}$$

Endlich folgt aus (1,16), (1,15) und (1,6), wenn das Linienelement parallel verschoben wird:

$$dv^i = v^i \frac{1}{L} dL - G^i_l\, dx^l. \tag{1,17}$$

§ 2.

Wir führen nun in den Finslerschen Raum F_n Normalkoordinaten ein. Wir benutzen die Methode, die O. Varga [1] im Falle der affinzusammenhängenden Mannigfaltigkeiten von Linienelementen angewandt hat.

Wir betrachten ein Linienelement $(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l})$, und einen in diesem Linienelement definierten Vektor $\xi^i(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l})$. Bestimmen wir nun diejenige Kurve, die durch den Punkt $\underset{(0)}{x}^i$ hindurchgeht, und die die Eigenschaft hat, daß wenn $\underset{(0)}{l}^i$ längs dieser Kurve parallel verschoben wird, die Tangentenvektoren $\frac{dx^i}{ds}$ in Bezug auf die erhaltene stetige Folge von Linienelementen $(x(s), l(s))$ eine parallele Vektorfolge bilden.

Die gesuchte Kurve und die stetige Folge $[x(s), l(s)]$ können wir auf Grund von (1,16), (1,13) und (1,15) durch das Differentialgleichungssystem

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = -\Gamma^{*i}_{kl}(x, l)\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} \tag{2,1}$$

$$\frac{dl^i}{ds} = -\Gamma^{*i}_{0l}(x, l)\frac{dx^l}{ds}, \tag{2,1'}$$

mit

$$x^i(s_0) = \underset{(0)}{x^i}$$

$$\frac{dx^i(s_0)}{ds} = \underset{(0)}{\xi^i}$$

$$l^i(s_0) = \underset{(0)}{l^i}$$

als Anfangsbedingungen eindeutig bestimmen.

Variiert man den Vektor $\underset{(0)}{\xi^i}$, so bekommt man, falls das Linienelement festgehalten wird, eine Kurvenschar, die eine gewisse Umgebung des Punktes $\underset{(0)}{x^i}$ schlicht bedeckt.

Die regulären Lösugen von (2,1) und (2,1′) sind für hinreichend kleines $|s-s_0|$ durch die konvergenten Reihen:

$$x^i(s) = \underset{(0)}{x^i} + \underset{(0)}{\xi^i}(s-s_0) - \frac{1}{2!}\Gamma^{*i}_{k_1 k_2}(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l})\underset{(0)}{\xi^{k_1}}\underset{(0)}{\xi^{k_2}}(s-s_0) - \tag{2,2}$$
$$- \cdots - \frac{1}{n!}\Gamma^{*i}_{k_1 \ldots k_n}(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l})\underset{(0)}{\xi^{k_1}} \cdots \underset{(0)}{\xi^{k_n}}(s-s_0)^n - \cdots,$$

$$l^i(s) = \underset{(0)}{l^i} - \Gamma^{*i}_{0k_1}(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l})\underset{(0)}{\xi^{k_1}}(s-s_0) - \frac{1}{2!}\Gamma^{*i}_{0k_1 k_2}(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l})\underset{(0)}{\xi^{k_1}}\underset{(0)}{\xi^{k_2}}(s-s_0)^2 -$$
$$- \cdots - \frac{1}{n!}\Gamma^{*i}_{0 k_1 k_2 \ldots k_n}(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l})\underset{(0)}{\xi^{k_1}}\underset{(0)}{\xi^{k_2}} \cdots \underset{(0)}{\xi^{k_n}}(s-s_0)^n - \cdots \tag{2,3}$$

bestimmt, wobei

$$\Gamma^{*i}_{k_1 \ldots k_n} = \frac{1}{n!}\sum_{P(k_1 \ldots k_n)}\left[\frac{\partial \Gamma^{*i}_{h_1 \ldots k_{n-1}}}{\partial x^{k_n}} - L\frac{\partial \Gamma^{*i}_{k_1 \ldots k_{n-1}}}{\partial v^r}\Gamma^{*r}_{0k_n} - (n-1)\Gamma^{*i}_{rk_1 \ldots k_{n-1}}\Gamma^{*r}_{k_{n-1}k_n}\right]$$

$$\Gamma^{*i}_{0k_1 \ldots k_n} = \frac{1}{n!}\sum_{P(k_1 \ldots k_n)}\left[\frac{\partial \Gamma^{*i}_{0k_1 \ldots k_{n-1}}}{\partial x^{k_n}} - L\frac{\partial \Gamma^{*i}_{0k_1 \ldots k_{n-1}}}{\partial v^r}\Gamma^{*r}_{0k_n} - (n-1)\Gamma^{*i}_{0rk_1 \ldots k_{n-2}}\Gamma^{*r}_{k_{n-1}k_n}\right].$$

Führt man die Größen

$$\overline{x}^i = \underset{(0)}{\xi^i}(s-s_0) \tag{2,4}$$

als neue Veränderliche in (2,2) *und* (2,3) *ein, so haben diese Gleichungen die*

Gestalt:

$$x^i = \underset{(0)}{x^i} + \bar{x}^i - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} \Gamma^{*i}_{k_1 \ldots k_j} \bar{x}^{k_1} \cdots \bar{x}^{k_j} \tag{2,5}$$

$$l^i = \underset{(0)}{l^i} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \Gamma^{*i}_{0k_1 \ldots k_j} \bar{x}^{k_1} \cdots \bar{x}^{k_j}. \tag{2,5'}$$

Die $\bar{x}^i$ sind Normalkoordinaten in Bezug auf das Anfangslinienelement $(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{v})$ und auf die Koordinaten x^i mit dem Transformationsgesetz (2,5).

Die Normalkoordinaten des Anfangslinienelementes sind $(0, \underset{(0)}{l^i})$.

Nach (2,5) ist

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\right)_{\bar{x}^k = 0} = \delta^i_k. \tag{2,6}$$

§ 3.

Wir nennen die im vorigen § für die Einführung der Normalkoordinaten benutzten Kurven $x^i = x^i(s)$ quasigeodätische Kurven. (Diese sind im allgemeinen von den geodätischen Kurven verschieden!) Mit s bezeichnen wir die Bogenlänge dieser Kurven.

Wir führen für die Bogenlänge der quasigeodätischen Kurven die folgende Bezeichnung ein:

$$(2\Omega)^{\frac{1}{2}} = \int_{s_0}^{s_1} ds = s_1 - s_0, \tag{3, 1}$$

d. h.

$$\Omega = \frac{1}{2} (s_1 - s_0)^2, \tag{3, 1'}$$

wobei

$$\begin{cases} s = s(t) \qquad s(t_0) = s_0 \qquad s(t_1) = s_1. \\ \dfrac{ds}{dt} = \sqrt{g_{ik}(x, l(x)) \dfrac{dx^i}{dt} \dfrac{dx^k}{dt}} \end{cases} \tag{3, 2}$$

ist, und t einen allgemeinen Parameter bedeutet. Es ist also nach (3, 1) und (3, 2)

$$(2\Omega)^{\frac{1}{2}} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt}}\, dt. \tag{3, 3}$$

Wir wählen nun in einer hinreichend kleinen Umgebung des Punktes $\underset{(0)}{x^i}$ einen Punkt $\underset{(1)}{x^i}$, dann hängt die Bogenlänge der quasigeodätischen Kurve durch die Punkten $\underset{(1)}{x^i}$ und $\underset{(0)}{x^i}$ von $\underset{(0)}{x^i}, \underset{(1)}{x^i}$ und $\underset{(0)}{l^i}$ ab. Nach (3, 3) ist also

$$\Omega = \Omega(\underset{0}{x}, \underset{(1)}{x}, \underset{(0)}{l}). \tag{3, 4}$$

Hilfssatz: *Die Funktion* (3, 4) *ist nach* $\underset{(0)}{x^i}$ *und* $\underset{(1)}{x^i}$ *partiell ableitbar, und es ist*

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \underset{(0)}{x^i}} = -g_{ik}(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l}) \frac{d\underset{(0)}{x^k}}{ds}(s_1 - s_0), \tag{3, 5}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \underset{(1)}{x^i}} = g_{ik}(\underset{(1)}{x}, \underset{(1)}{l}) \frac{d\underset{(1)}{x^k}}{ds}(s_1 - s_0). \tag{3, 5'}$$

Beweis. Durch Auflösung der Gleichungen (2, 1) und (2, 1′) erhält man die Werte x^i, l^i als Funktionen von $\underset{(0)}{x^i}, \underset{(1)}{x^i}, \underset{(0)}{l^i}$ und s, also es ist

$$x^i = x^i(s, \underset{(0)}{x}, \underset{(1)}{x}, \underset{(0)}{l}) \tag{3, 6}$$

und

$$l^i = l^i(x) = l^i(x(s, \underset{(0)}{x}, \underset{(1)}{x}, \underset{(0)}{l})),$$

wo noch

$$\underset{(0)}{x^i} = x^i(s_0) \tag{3, 6'}$$

gilt. Führt man einen zulässigen Parameter t ein, so ergibt sich

$$x^i = x^{*i}(t, \underset{(0)}{x}, \underset{(1)}{x}, \underset{(0)}{l}) \tag{3, 7}$$

$$l^i = l^{*i}(X),$$

wobei

$$\left\{\begin{aligned} \underset{(0)}{x^i} &= x^{*i}(t_0, \underset{(0)}{x}, \underset{(1)}{x}, \underset{(0)}{l}) \\ \underset{(1)}{x^i} &= x^{*i}(t_1, \underset{(0)}{x}, \underset{(1)}{x}, \underset{(0)}{l}) \end{aligned}\right. \tag{3, 8}$$

sind. Dann folgen aus den Identitäten (3, 6) durch Differentiation die Gleichungen:

$$\frac{\partial x^i(s_k)}{\partial \underset{(j)}{x^i}} = \delta_{kj} \qquad \frac{\partial x^p(s_k)}{\partial \underset{(k)}{x^r}} = \delta^p_r. \qquad (k, j = 0, 1). \tag{3, 9}$$

(Nicht summieren nach i und k!)

Es sei

$$l^i = l^i(x) \tag{3, 10}$$

eine Lösung von (2, 1), (2, 1′), dann folgt aus (2, 1′) und (3, 10)

$$dl^i = -\Gamma^{*i}_{0p}(x, l)\, dx^p, \tag{3, 11}$$

d. h.

$$\frac{\partial l^i}{\partial x^p} = -\Gamma^{*i}_{0p}(x, l). \tag{3, 11'}$$

Aus (3, 10) und (3, 11) folgt

$$\frac{\partial l^i}{\partial \underset{(j)}{x^a}} = \frac{\partial l^i}{\partial x^p} \cdot \frac{\partial \underset{(j)}{x^p}}{\partial x^a} = -\Gamma^{*i}_{0p}(x, l)\frac{\partial \underset{(j)}{x^p}}{\partial x^a} \qquad (j=0, 1) \tag{3, 11''}$$

Wir betrachten nun das zu dem Linienelement $(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l})$ gehörige Feld von Quasigeodätischen und messen auf jeder den festen Bogen s_1 auf. Bei der Parametrisierung $s=s(t)$ entspreche t_1 dem Werte s_1. In dem Integral (3, 3) ist dann t_1 ein fester Wert. Ist P_1 irgendein fester Punkt der auf der bei der obigen Konstruktion gewonnen „Kugeloberfläche" liegt, so wiederholen wir die obige Konstruktion, wobei dann P_1 der „Kugelmittelpunkt" sei. Daraus ergibt sich nun für das Integral (3, 3) wenn wir beide Fälle gleichzeitig behandeln:

$$\frac{\partial s}{\partial \underset{(j)}{x^a}} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2\sqrt{g_{ik}(x^*, l^*)\frac{\partial x^{*i}}{\partial t}\cdot\frac{\partial x^{*k}}{\partial t}}}\left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^{*s}}\frac{\partial \underset{(j)}{x^{*s}}}{\partial x^a}\frac{\partial x^{*i}}{\partial t}\frac{\partial x^{*k}}{\partial t} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial g_{ik}}{\partial l^{*s}}\frac{\partial \underset{(j)}{l^{*s}}}{\partial x^a}\frac{\partial x^{*i}}{\partial t}\frac{\partial x^{*k}}{\partial t} + 2g_{ik}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{d \underset{(j)}{x^{*i}}}{\partial x^a}\frac{\partial x^{*k}}{\partial t}\right)\right]dt \qquad (j=0, 1). \tag{3, 12}$$

Führen wir die Bogenlänge s als Parameter in (3, 12) ein, so folgt:

$$\frac{\partial s}{\partial \underset{(j)}{x^a}} = \int_{s_0}^{s_1}\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{ik}(x, l)}{\partial x^s}\frac{\partial \underset{(j)}{x^s}}{\partial x^a}\frac{\partial x^i}{\partial s}\frac{\partial x^k}{\partial s} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial l^s}\frac{\partial \underset{(j)}{l^s}}{\partial x^a}\frac{\partial x^i}{\partial s}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial s} + \right.$$
$$\left. + 2g_{ik}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \underset{(j)}{x^i}}{\partial x^a}\right)\frac{\partial x^k}{\partial s}\right]ds. \tag{3, 13}$$

Wenden wir die Methode der partiellen Integration auf das letzte Glied an, so folgt aus (3, 13), (3, 6), (3, 10) und (3, 11''):

$$\frac{\partial s}{\partial \underset{(j)}{x^a}} = \left[g_{ik}(x, l)\frac{\partial \underset{(j)}{x^i}}{\partial x^a}\frac{\partial x^k}{\partial s}\right]_{s_0}^{s_1} +$$
$$+ \int_{s_0}^{s_1}\left\{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^s} - \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{is}}{\partial x^k}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{sk}}{\partial l^r}\Gamma^{*r}_{0i} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{si}}{\partial l^r}\Gamma^{*r}_{0k} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial l^r}\Gamma^{*r}_{0s}\right]\frac{\partial x^i}{\partial s}\frac{\partial x^k}{\partial s} - g_{sp}\frac{\partial^2 x^p}{\partial s^2}\right\}\frac{\partial \underset{(j)}{x^s}}{\partial x^a}ds. \qquad (j=0, 1)$$

Es folgt aus (3, 14), (1, 11), (1, 8) und (1, 15):

$$\frac{\partial s}{\partial \underset{(j)}{x^a}} = \left[g_{ik}(x, l)\frac{\partial \underset{(j)}{x^i}}{\partial x^a}\frac{\partial x^k}{\partial s}\right]_{s_0}^{s_1} + \int_{s_0}^{s_1} - g_{sp}\left\{\frac{\partial^2 x^p}{\partial s^2} + \Gamma^{*p}_{ik}\frac{\partial x^i}{\partial s}\frac{\partial x^k}{\partial s}\right\}\frac{\partial \underset{(j)}{x^s}}{\partial x^a}ds \tag{3, 15}$$
$$(j=0, 1).$$

Ferner folgt noch aus (3, 15), (2, 1) und (3, 9):

$$(3,16)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial \underset{(0)}{x^i}} = -g_{ik}(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l}) \dfrac{d\underset{(0)}{x^k}}{ds}, \\[2ex] \dfrac{\partial s}{\partial \underset{(1)}{x^i}} = g_{ik}(\underset{(1)}{x}, \underset{(1)}{l}) \dfrac{d\underset{(1)}{x^k}}{ds}. \end{cases}$$

Endlich bekommt man aus (3, 1') und (3, 16):

$$(3,17)\quad \frac{\partial \Omega}{\partial \underset{(0)}{x^i}} = -g_{ik}(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l}) \frac{d\underset{(0)}{x^k}}{ds}(s_1 - s_0)$$

$$(3,18)\quad \frac{\partial \Omega}{\partial \underset{(1)}{x^i}} = g_{ik}(\underset{(1)}{x}, \underset{(1)}{l}) \frac{d\underset{(1)}{x^k}}{ds}(s_1 - s_0),$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Wir führen nun die folgende Bezeichnungen ein:

$$(3,19)\quad \begin{cases} \underset{(1)}{x^i} = x^i \qquad \underset{(1)}{l^i} = l^i \\[1ex] \dfrac{\partial \Omega}{\partial \underset{(0)}{x^i}} = \Omega_i \qquad g^{ik}\Omega_i = \Omega^k \\[2ex] \dfrac{\partial \Omega}{\partial x^i} = \Omega_{(i)} \qquad g^{ik}\Omega_{(i)} = \Omega^{(k)} \\[2ex] g^{rk}(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l}) \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial x^i \partial \underset{(0)}{x^r}} = \Omega^r_{(i)} \qquad g^{rk}(x, l) \dfrac{\partial^0 \Omega}{\partial x^r \partial \underset{(0)}{x^i}} = \Omega_i^{(r)}. \end{cases}$$

Est folgt aus (3, 17) und (3, 19)

$$(3,20)\quad \bar{x}^k = -\Omega^k.$$

Auf Grund der Gleichungen (3, 20) *erhalten die Normalkoordinaten folgende neue geometrische Deutung:*

Satz: *Die Normalkoordinaten sind die partiellen Ableitungen der Funktion*

$$\frac{1}{2}s^2 = \Omega$$

nach den Veränderlichen $\underset{(0)}{x^i}$, *wenn man noch diese Ableitung mit den* $-\, g_{ik}(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l})$ *komponiert.*

§ 4.

Es sei $\lambda^i(x, l)$ ein Vektorfeld. Bezeichnet man mit $(\bar{x}^i, \bar{l}^i)$ die zu dem Linienelement $(\underset{(0)}{x^i}, \underset{(0)}{l^i})$ und zu den Koordinaten x^i gehörigen Normalkoordinaten, so gilt nach den Transformationsregeln der Vektoren

$$\bar{\lambda}_i(\bar{x}, \bar{l}) = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \lambda_k(x, l) \tag{4, 1}$$

$$\lambda^i(x, l) = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}_k} \bar{\lambda}^k(\bar{x}, \bar{l}). \tag{4, 1'}$$

Es folgt aus (3, 20) und (4, 1):

$$\lambda_i(x, l) = -\Omega^k_{(i)} \bar{\lambda}_k(\bar{x}, \bar{l}). \tag{4, 2}$$

Wegen (2, 6) und (4, 1) besteht noch

$$\bar{\lambda}_i(0, \underset{(0)}{l}) = \delta^k_i \lambda_k(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l}) = \lambda_i(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l}). \tag{4, 3}$$

(Die Normalkoordinaten des Anfangslinienelementes sind $(0, \underset{(0)}{l^i})$!)

Entwickeln wir den Vektor $\bar{\lambda}_i(\bar{x}, \bar{l})$ in eine Taylorsche Reihe in der Umgebung des Linienelementes $(\underset{(0)}{x}, \underset{(0)}{l})$, so ist

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_i(\bar{x}, \bar{l}) = \Bigg\{ & \bar{\lambda}_i(0, \underset{(0)}{l}) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial \bar{\lambda}_i(0, \underset{(0)}{l})}{\partial \bar{x}^k} \bar{x}^k + \frac{\partial \bar{\lambda}_i(0, \underset{(0)}{l})}{\partial \bar{l}^k} (\bar{l}^k - \underset{(0)}{l^k})\right] + \\ & + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 \bar{\lambda}_i(0, \underset{(0)}{l})}{\partial \bar{x}^{k_1} \partial \bar{x}^{k_2}} \bar{x}^{k_1} \bar{x}^{k_2} + \frac{\partial^2 \bar{\lambda}_i(0, \underset{(0)}{l})}{\partial \bar{x}^{k_1} \partial \bar{l}^{k_2}} \bar{x}^{k_1} (\bar{l}^{k_2} - \underset{(0)}{l^{k_2}}) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 \bar{\lambda}_i(0, \underset{(0)}{l})}{\partial \bar{l}^{k_1} \partial \bar{l}^{k_2}} (\bar{l}^{k_1} - \underset{(0)}{l^{k_1}})(\bar{l}^{k_2} - \underset{(0)}{l^{k_2}}) + \cdots \right. \Bigg\}. \end{aligned} \tag{4, 4}$$

Die in (4, 4) vorkommenden Größen

$$\frac{\partial \bar{\lambda}_i(0, \underset{(0)}{l})}{\partial \bar{x}^k}, \quad \frac{\partial^2 \bar{\lambda}_i(0, \underset{(0)}{l})}{\partial \bar{x}^{k_1} \partial \bar{x}^{k_2}}, \cdots$$

sind die Erweiterungen des Vektors λ_i.

Da die Größen, die durch Anwendung der Operation $\frac{\partial}{\partial l^k}$ entstehen, Tensoren sind, ist

$$\frac{\partial^2 \bar{\lambda}_i(0, \underset{(0)}{l})}{\partial \bar{l}^k \partial \bar{x}^s}$$

die Erweiterung von $\frac{\partial \bar{\lambda}_i}{\partial \bar{l}^k}$.

Wir führen für die durch die Erweiterung entstehenden Tensoren die Bezeichnung

$$\lambda_{i,\,k_1\ldots k_r}(\underset{(0)}{x},\underset{(0)}{l})=\frac{\partial^r\bar{\lambda}_i(0,\underset{(0)}{l})}{\partial\bar{x}^{k_1}\ldots\partial\bar{x}^{k_r}}$$

$$\lambda_{i/k_1\ldots k_r/,\,k_{r+1}\ldots k_s}(\underset{(0)}{x},\underset{(0)}{l})=\frac{\partial^{r+s}\bar{\lambda}_i(0,\underset{(0)}{l})}{\partial\bar{l}^{k_1}\ldots\partial\bar{l}^{k_r}\partial\bar{x}^{k_{r+1}}\ldots\partial\bar{x}^{k_s}}$$

ein, und setzen

$$\bar{l}^k-\underset{(0)}{l^k}=\psi^k.$$

Mit diesen Bezeichnungen bekommt man aus (3, 20), (4, 2) und (4, 3), (4, 4):

$$\begin{aligned}\lambda_i(x,l)=-\Omega^l_{(i)}\Big\{&\lambda_l(\underset{(0)}{x},\underset{(0)}{l})+\frac{1}{1!}[-\lambda_{l,\,k_1}(\underset{(0)}{x},\underset{(0)}{l})\Omega^{k_1}+\lambda_{l/k_1}(\underset{(0)}{x},\underset{(0)}{l})\psi^{k_1}]+\\&+\frac{1}{2!}[\lambda_{l,\,k_1k_2}(\underset{(0)}{x},\underset{(0)}{l})\Omega^{k_1}\Omega^{k_2}-\lambda_{l/k_1/k_2}(\underset{(0)}{x},\underset{(0)}{l})\cdot\Omega^{k_2}\psi^{k_1}+\lambda_{l/k_1k_2}(\underset{(0)}{x},\underset{(0)}{l})\psi^{k_1}\psi^{k_2}]+\cdots\Big\}.\end{aligned}\tag{4, 9}$$

Die Form (4, 9) ist die gesuchte invariante Formel.

Wir überschieben (4, 9) mit $g^{ik}(x,l)$:

$$\begin{aligned}\lambda^k(x,l)=-\Omega^{(k)}_l\Big\{&\lambda^l(\underset{(0)}{x},\underset{(0)}{l})+\frac{1}{1!}[-\lambda^l_{,\,k_1}(\underset{(0)}{x},\underset{(0)}{l})\Omega^{k_1}+\lambda^l_{/k_1}(\underset{(0)}{x},\underset{(0)}{l})\psi^{k_1}]+\\&+\frac{1}{2!}[\lambda^l_{,\,k_1k_2}(\underset{(0)}{x},\underset{(0)}{l})\Omega^{k_1}\Omega^{k_2}-\lambda^l_{/k_1/,\,k_2}(\underset{(0)}{x},\underset{(0)}{l})\Omega^{k_2}\psi^{k_1}+\lambda^l_{/k_1k_2}(\underset{(0)}{x},\underset{(0)}{l})\psi^{k_1}\psi^{k_2}]+\cdots\Big\},\end{aligned}\tag{4,10}$$

wobei nach (3, 19)

$$g^{ik}(x,l)\Omega^l_{(i)}\lambda_l(\underset{(0)}{x},\underset{(0)}{l})=g^{lm}(\underset{(\ )}{x},\underset{(0)}{l})\Omega^{(k)}_m\cdot\lambda_l(\underset{(\ )}{x},\underset{(0)}{l})=\Omega^{(k)}_m\lambda^m(\underset{(0)}{x},\underset{(0)}{l})$$

ist.

Eine ähnliche Reihenentwicklung gilt für einen beliebigen Tensor. Es sei $T_{a_1\ldots a_r}{}^{b_1\ldots b_s}(x,l)$ ein Tensorfeld, so ist

$$\begin{aligned}T_{a_1\ldots a_r}{}^{b_1\ldots b_s}(x,l)=(-1)^{r+s}\prod_{l=1}^{s}\Omega^{(b_l)}_{d_l}\prod_{m=1}^{r}\Omega^{c_m}_{(a_m)}\Big\{&T_{c_1\ldots c_r}{}^{d_1\ldots d_s}(\underset{(0)}{x},\underset{(0)}{l})+\\&+\frac{1}{1!}[-T_{c_1\ldots c_r,\,k_1}{}^{d_1\ldots d_s}(\underset{(0)}{x},\underset{(0)}{l})\Omega^{k_1}+T_{c_1\ldots c_r/k_1}{}^{d_1\ldots d_s}(\underset{(0)}{x},\underset{(0)}{l})\psi^{k_1}]+\cdots\Big\}.\end{aligned}\tag{4,11}$$

Ist $S(x,l)$ ein Skalarfeld, dann gilt:

$$\begin{aligned}S(x,l)=S(\underset{(0)}{x},\underset{(0)}{l})&+\frac{1}{1!}[-S_{,\,k_1}(\underset{(0)}{x},\underset{(0)}{l})\Omega^{k_1}+S_{/k_1}(\underset{(0)}{x},\underset{(0)}{l})\psi^{k_1}]+\frac{1}{2!}[S_{,\,k_1k_2}(\underset{(0)}{x},\underset{(0)}{l})\Omega^{k_1}\Omega^{k_2}-\\&-S_{/k_1/,\,k_2}(\underset{(0)}{x},\underset{(0)}{l})\Omega^{k_2}\psi^{k_1}+S_{/k_1k_2}(\underset{(0)}{x},\underset{(0)}{l})\psi^{k_1}\psi^{k_2}]+\cdots\Big\}.\end{aligned}$$

Schriftverzeichnis.

E. Cartan: [1] Les espaces de Finsler. *Act. Sci. Industrielles.* (Paris, 1934).

P. Finsler: [1] Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen. *Dissertation.* (Göttingen, 1918.)

H. S. Ruse: [1] Taylors theorem in the tensor calculus. *Proc. London Math. Soc.* **32** (1931), 87—92.

O. Varga: [1] Normalkoordinaten in allgemeinen Differentialgeometrischen Räumen und ihre Verwendung zur Bestimmung sämtlicher Differentialinvarianten. *Comptes Rendus du premier congrès des mathematiciens hongrois* (Budapest, 1952) 131—146.

[2] Über eine Klasse von Finslerschen Räumen, die die nichteuklidischen verallgemeinern. *Comm. Math. Helv.* **19** (1946), 367—380.

[3] Zur Differentialgeometrie der Hyperflächen in Finslerschen Räumen. *Deutsche Math.* **6** (1941), 192—212.

O. Veblen: [1] Normal coordinates for the geometry of paths. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **8** (1922), 192—197.

(Eingegangen am 7. Oktober, 1954.)