# Lösbarkeit eines Gleichungssystems über einem Ringe.

Herrn Professor László Kalmár zum 50. Geburtstag gewidmet.

Von G. POLLÁK in Szeged.

Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem über einem beliebigen Ringe $R$

(1) $$f_\gamma(\ldots, x_\delta, \ldots) = b_\gamma \qquad (b_\gamma \in R, \gamma \in \Gamma, \delta \in \Delta),$$

wo $f_\gamma$ eine lineare Form[1]) der Unbestimmten $x$ mit Koeffizienten aus dem Ringe $R$ ist, während $\Gamma$ und $\Delta$ zwei beliebige Indexmengen sind. Nach A. KERTÉSZ [1] nennen wir das System (1) *kompatibel*, wenn die Abbildung $f_\gamma \to b_\gamma$ einen Operatorhomomorphismus des von den sämtlichen $f_\gamma$ erzeugten $R$-Linksmoduls in $R^+$ definiert. Besitzt $R$ ein Einselement, so geht die Frage der Lösbarkeit des kompatiblen Systems (1) darauf hinaus, ob der Homomorphismus $f_\gamma \to b_\gamma$ sich zu einem Homomorphismus des durch die sämtlichen $x_\delta$ erzeugten freien $R$-Linksmoduls $M(\ldots, x_\delta, \ldots)$ in $R^+$ erweitern läßt oder nicht.[2])

In der vorliegenden Arbeit werden wir eine Verallgemeinerung der Kompatibilitätsbedingung geben für den Fall *beliebiger* Gleichungssysteme und Ringe. Und zwar beweisen wir den

**Satz.** *Es sei ein algebraisches Gleichungssystem*

(2) $$F_\gamma(\ldots, x_\delta, \ldots) = 0 \qquad (\gamma \in \Gamma, \delta \in \Delta)$$

*gegeben, wo $F_\gamma(\ldots, x_\delta, \ldots)$ ein beliebiges Element des freien Polynomringes[3]) $R(\ldots, x_\delta, \ldots)$ über dem Ringe $R$ ist, $\Gamma, \Delta$ zwei beliebige Indexmengen sind. Damit es eine Erweiterung des Ringes $R$ gibt, in der das System* (2) *lösbar ist, ist notwendig und hinreichend, daß das durch die $F_\gamma(\ldots, x_\delta, \ldots)$ erzeugte*

---

1) Jede einzelne lineare Form $f_\gamma$ enthält nur eine endliche Anzahl der Unbestimmten.

2) Wie A. KERTÉSZ bemerkt hat, ist die Existenz des Einselementes in $R$ wesentlich. Näheres darüber siehe in [2].

3) Der freie Polynomring über $R$ wird definiert, als ein durch Gleichungen definierter Ring, der für erzeugende Elemente die Elemente des Ringes $R$ und die sämtlichen $x_\delta$, für definierende Gleichungen die Cayleyschen Tafeln für Addition und Multiplikation in $R$ hat. Es läßt sicht zeigen, daß der freie Polynomring $R(\ldots, x_\delta, \ldots)$ den Ring $R$ als Unterring enthält.

*Ideal $I$ des Ringes $R(\ldots, x_\delta, \ldots)$ die Bedingung*

$$I \cap R = 0 \tag{3}$$

*erfüllt.*

*Beweis.* Die Notwendigkeit der Bedingung ist trivial. Umgekehrt, wenn diese Bedingung erfüllt ist, so bilden die Restklassen $r \pmod I$ einen mit $R$ isomorphen Unterring von $R(\ldots, x_\delta, \ldots)/I$ $(r \in R)$. Nach Einbettung entsteht ein Erweiterungsring von $R$, in dem (2) offenbar lösbar ist. Somit ist der Satz bewiesen.

Es ist klar, daß jeder engste Oberring von $R$ mit der geforderten Eigenschaft ein homomorphes Bild des erwähnten Faktorringes ist. Andererseits ist der Ring $R(\ldots, x_\delta, \ldots)/I$ selbst ein homomorphes Bild des Ringes $R(\ldots, x_\delta, \ldots)$, somit ist das Gleichungssystem (2) dann und nur dann lösbar in $R$, wenn es eine homomorphe Abbildung von $R(\ldots, x_\delta, \ldots)$ auf $R$ gibt mit den Eigenschaften, daß die Elemente von $R$ lauter Fixelemente sind und der Kern der Abbildung das Ideal $I$ enthält.

Zum Schluß weisen wir auf die Arbeit von K. Shoda [3] hin, wo Untersuchungen zwar nicht ähnlichen Inhalts, doch aber teilweise mit ähnlichen Methoden ausgeführt sind, und auf einen bisher noch nicht publizierten Satz von J. Łoś im Gebiete der mathematischen Logik, welcher den obigen Satz zur Folgerung hat.

## Literaturverzeichnis.

[1] A. Kertész, Operátormodulusok és féligegyszerű gyűrűk. Kandidátusi disszertáció, 1954.

[2] A. Kertész, The general theory of linear equation systems over semi-simple rings. *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* **4** (1955), 79—86.

[3] K. Shoda, Zur Theorie der algebraischen Erweiterungen. *Osaka Math. J.* **4** (1952), 133—143.

*(Eingegangen am 28. Dezember, 1954.)*