Beitrag zur Theorie der linearen partiellen Integralgleichungen.

Herrn Professor László Kalmár zum 50. Geburtstag gewidmet.

Von STEFAN FENYŐ in Budapest.

1. In der Quantenmechanik der Felder traten jüngst Funktionalgleichungen folgender Gestalt auf:

$$\varphi(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) + \lambda \int K(x_1, x_2, y)\; [\varphi(x_1, y) + \varphi(y, x_2)]\, dy. \tag{1}$$

Die Kernfunktion $K(x_1, x_2, y)$ und $f(x_1, x_2)$ is gegeben, $\varphi(x_1, x_2)$ bedeutet die unbekannte Funktion. Diese Gleichung wurde von ABDUS SALAM verallgemeinert[1]) und zwar es wurde von ihm folgende Gleichung untersucht:

$$\varphi(x_1, x_2) - \lambda \int_0^1 A(x_1, x_2, y)\, \varphi(y, x_2)\, dy - \mu \int_0^1 B(x_1, x_2, y)\, \varphi(x_1, y)\, dy = f(x_1, x_2). \tag{2}$$

λ und μ sind im allgemeinen komplexe Zahlen, $A(x_1, x_2, y)$ und $B(x_1, x_2, y)$ sind gegebene Kernfunktionen. Diese Gleichung wurde von ABDUS SALAM als *partielle Integralgleichung* bezeichnet. Das Hauptresulat der zitierten Arbeit besagt daß, falls A und B beschränkt sind, und der Betrag von λ und μ genügend klein ist, so besitzt (2) immer Lösungen, und zwar unendlich viele.

Im folgenden sei die inhomogene partielle Integralgleichung

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, x_2) - \lambda \int_0^1 A(x_1, x_2, y)\, \varphi(y, x_2)\, dy - \mu \int_0^1 B(x_1, x_2, y)\, \varphi(x_1, y)\, dy - \\ - \nu \int_0^1 \int_0^1 C(x_1, x_2, y_1, y_2)\, \varphi(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2 = f(x_1, x_2)\end{aligned} \tag{3}$$

untersucht. Sie ist natürlich eine Verallgemeinerung von (2). Wir beweisen, daß, falls $|\lambda|$, $|\mu|$ und $|\nu|$ genügend klein sind, so besitzt (3) immer eine, und nur eine Lösung. Damit wird natürlich das Ergebnis von ABDUS SALAM widerlegt.

---

[1]) ABDUS SALAM, Fredholm solution of partial integral equations. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **49** (1953), 213—217.

Einfacheitshalber setzen wir voraus, daß alle gegebene Funktionen beschränkt sind. Es sei folgende Bezeichung benützt:

$$\int_0^1 A(x_1, x_2, y)\, \varphi(y, x_2) dy = \mathfrak{A}_1 \varphi; \quad \int_0^1 B(x_1, x_2, y) \varphi(x_1, y) dy = \mathfrak{B}_2 \varphi$$

$$\int_0^1 \int_0^1 C(x_1, x_2, y_1, y_2)\, \varphi(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = \mathfrak{C}_{12} \varphi.$$

Mit dieser Bezeichnung läßt sich die untersuchte Gleichung (3) einfacher schreiben:

$$\varphi - \lambda \mathfrak{A}_1 \varphi - \mu \mathfrak{B}_2 \varphi - \nu \mathfrak{C}_{12} \varphi = f. \tag{3a}$$

2. Es sei bei festem x_2 $(0 \leqq x_2 \leqq 1)$ $\mathfrak{A}(x_2)$; die Menge der charakteristischen Zahlen des Kernes $A(x_1, x_2, y)$, lauft x_2 das Intervall $[0,1]$ ein, so sei die Vereinugungsmenge aller $\mathfrak{A}(x_2)$ durch $\mathfrak{A}$ bezeichnet. Analogerweise definieren wir $\mathfrak{B}(x_1)$ als die Menge der charakteristischen Zahlen des Kerns $B(x_1, x_2, y)$ bei festem x_1. $\mathfrak{B}$ sei die Vereinigung aller $\mathfrak{B}(x_1)$, falls x_1 das Intervall $[0, 1]$ durchläuft.

Nun läßt sich (3a) in folgender Form schreiben:

$$\varphi - \lambda \mathfrak{A}_1 \varphi - \mu \mathfrak{B}_2 \varphi + \lambda \mu \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 \varphi = f + \nu \mathfrak{C}_{12} \varphi + \lambda \mu \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 \varphi. \tag{4}$$

Wird durch $\mathfrak{E}$ der Identitätsoperator bezeichnet, so besitzt die vorige Gleichung folgende Form:

$$(\mathfrak{E} - \lambda \mathfrak{A}_1)\ (\mathfrak{E} - \mu \mathfrak{B}_2) \varphi = f + \nu \mathfrak{C}_{12} \varphi + \lambda \mu \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 \varphi. \tag{5}$$

Falls $\lambda \notin \mathfrak{A}$ und $\mu \notin \mathfrak{B}$, so existiert der inverse Operator von $(\mathfrak{E} - \lambda \mathfrak{A}_1)(\mathfrak{E} - \mu \mathfrak{B}_2)$. Der lösende Kern von A sei $\alpha(x_1, x_2, y; \lambda)$, die Resolvente von B sei $\beta(x_1, x_2, y; \mu)$, so ist

$$[(\mathfrak{E} - \lambda \mathfrak{A}_1)\ (\mathfrak{E} - \mu \mathfrak{B}_2)]^{-1} = (\mathfrak{E} + \mu \beta_2)\ (\mathfrak{E} + \lambda \alpha_1).$$

Hier ist α_1 bzw. β_2 der zu α bzw. β gehörende Operator. Nun erhalten wir aus (5):

$$\begin{aligned} \varphi &= (\mathfrak{E} + \mu \beta_2)\ (\mathfrak{E} + \lambda \alpha_1)\ [f + \nu \mathfrak{C}_{12} \varphi + \lambda \mu \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 \varphi] = \\ &= f + \lambda \alpha_1 f + \mu \beta_2 f + \lambda \mu \beta_2 \alpha_1 f + \nu \mathfrak{C}_{12} \varphi + \lambda \nu \alpha_1 \mathfrak{C}_{12} \varphi + \mu \nu \beta_2 \mathfrak{C}_{12} \varphi + \\ &+ \lambda \mu \nu \beta_2 \alpha_1 \mathfrak{C}_{12} \varphi + \lambda \mu \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 \varphi + \lambda^2 \mu \alpha_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 \varphi + \lambda \mu^2 \beta_2 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 \varphi + \lambda^2 \mu^2 \beta_2 \alpha_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 \varphi. \end{aligned} \tag{6}$$

Das ist aber eine Fredholmsche Integralgleichung bezüglich der unbekannten Funktion φ. Und zwar entspricht der Kern dieser Integralgleichung dem folgendem Operator:

$$\lambda \mu (\mathfrak{E} + \mu \beta_2)\ (\mathfrak{E} + \lambda \alpha_1) \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 + \nu (\mathfrak{E} + \mu \beta_2)\ (\mathfrak{E} + \lambda \alpha_1) \mathfrak{C}_{12}.$$

Nach der bekannten Eigenschaft eines Fredholmschen lösenden Kern ist

$$(\mathfrak{E} + \lambda \alpha_1) \mathfrak{A}_1 = \alpha_1,$$

also ist der obige Operator

$$\lambda \mu (\mathfrak{E} + \mu \beta_2) \alpha_1 \mathfrak{B}_2 + \nu (\mathfrak{E} + \mu \beta_2)\ (\mathfrak{E} + \lambda \alpha_1) \mathfrak{C}_{12}. \tag{6a}$$

Dann ist der ihm entsprechende Kern:

$$P(x_1, x_2; y_1, y_2; \lambda, \mu, \nu) = \lambda\mu\alpha(x_1, x_2, y_1; \lambda) B(y_1, x_2, y_2) +$$

$$+ \lambda\mu^2 \int_0^1 \beta(x_1, x_2; t; \mu)\alpha(x_1, t, y_1; \lambda) B(y_1, t, y_2)\, dt +$$

$$+ \nu C(x_1, x_2, y_1, y_2) + \nu \int_0^1 \alpha(x_1, x_2, t; \lambda)\; C(t, x_2, y_1, y_2) dt +$$

$$+ \mu\nu \int_0^1 \beta(x_1, x_2, t; \mu)\, C(x_1, t, y_1, y_2)\, dt +$$

$$+ \lambda\mu\nu \int_0^1\int_0^1 \beta(x_1, x_2, t; \mu)\, \alpha(x_1, t, \tau; \lambda)\, C(\tau, t, y_1, y_2)\, dt d\tau.$$

Nun ist unsere Gleichung (6) explizit ausgeschrieben von folgender Form:

$$\varphi(x_1, x_2) - \int_0^1\int_0^1 P(x_1, x_2; y_1, y_2; \lambda, \mu, \nu)\, \varphi(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2 = F(x_1, x_2), \tag{7}$$

hier ist

$$F(x_1, x_2) = (\mathfrak{E} + \mu\beta_2)\; (\mathfrak{E} + \lambda\alpha_1) f = f + \lambda \int_0^1 \alpha(x_1, x_2, y; \lambda) f(y, x_2)\, dy +$$

$$+ \mu \int_0^1 \beta(x_1, x_2, y; \mu) f(x_1, y)\, dy + \lambda\mu \int_0^1\int_0^1 \beta(x_1, x_2, t; \mu)\, \alpha(x_1, t, \tau; \lambda) f(\tau, t)\, dt d\tau.$$

Gehören die Parameterwerte λ und μ nicht zu den Mengen $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$, so ist die Gleichung (3) mit der Gleichung (6) äquivalent. Es folgt ferner aus der Annahme über λ und μ, daß wenn $f \not\equiv 0$ ist, auch F nicht identisch verschwinden kann.

Wir können nun folgenden Satz aussprechen:

Satz 1. *Sind die Parameterwerte λ, μ, ν so beschaffen, daß*

a) $\lambda \notin \mathfrak{A}$ *und* $\mu \notin \mathfrak{B}$,

b) 1 *kein Charakteristischer Wert von* $P(x_1, x_2; y_1, y_2; \lambda, \mu, \nu)$ *ist, so hat die inhomogene Gleichung* (3) *eine einzige Lösung. Die Bedingungen* a) *und* b) *sind sicher erfüllt, falls*

$$|\lambda| U + |\mu| V + |\nu| W < 1 \tag{7}$$

ist. ($|A| \leqq U; |B| \leqq V; |C| \leqq W$).

Der erste Teil des Satzes is evident aus den Tatsachen, welche wir bisher festgestellt haben. Zu beweisen ist nur der zweite Teil.

Die Bedingungen a) sind sicher erfüllt, wenn

$$|\lambda| < \frac{1}{U} \quad \text{und} \quad |\mu| < \frac{1}{V}$$

ist. Dann ist aber nach einem klassischem Satz der Theorie der Integralgleichungen

$$(8) \qquad |\alpha| < \frac{U}{1-|\lambda|U} \quad \text{und} \quad |\beta| < \frac{V}{1-|\mu|V}.$$

Die Bedingung b) ist erfüllt, wenn ν so beschaffen ist, daß

$$|P(x_1, x_2; y_1, y_2; \lambda, \mu, \nu)| < 1$$

ist. Nach (6a) ist aber

$$|P| \leqq |\lambda|\,|\mu| \frac{1}{1-|\mu|V} \frac{UV}{1-|\lambda|U} + |\nu| \frac{W}{(1-|\lambda|U)(1-|\mu|V)}.$$

Die rechte Seite ist kleiner als 1, wenn

$$|\lambda|\,|\mu|UV + |\nu|W < (1-|\lambda|U)(1-|\mu|V) = 1-|\lambda|U-|\mu|V+|\lambda|\,|\mu|UV$$

ist, und daraus folgt die Ungleichung (7).

3. Die Gleichung (3) bzw. (3a) kann auch durch Addition von $\lambda\mu\mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_1\varphi$ gelöst werden statt $\lambda\mu\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2\varphi$ zu addieren, wie wir es unter **2** getan haben. Dadurch gelangen wir zur Fredholmschen Gleichung

$$(9) \qquad \varphi(x_1, x_2) - \int_0^1\!\!\int_0^1 Q(x_1, x_2; y_1, y_2; \lambda, \mu, \nu)\varphi(y_1, y_2)\,dy_1, dy_2 = G(x_1, x_2),$$

wo der Kern Q der Folgende ist:

$$(10) \qquad \begin{aligned} Q(x_1, x_2; y_1, y_2; \lambda, \mu, \nu) &= \lambda\mu\beta(x_1, x_2, y_2; \mu)\,A(x_1, y_2; y_1) + \\ &+ \lambda^2\mu\int_0^1 \alpha(x_1, x_2, t; \lambda)\,\beta(t, x_2, y_2; \mu)\,A(t, y_2, y_1)\,dt + \nu C(x_1, x_2; y_1, y_2) + \\ &+ \lambda\nu\int_0^1 \alpha(x_1, x_2, t; \lambda)C(t, x_2; y_1, y_2)dt + \mu\nu\int_0^1 \beta(x_1, x_2, t; \mu)C(x_1, t, y_1, y_2)dt + \\ &+ \lambda\mu\nu\int_0^1\!\!\int_0^1 \alpha(x_1, x_2, t; \lambda)\beta(t, x_2, \tau; \mu)\,C(t, \tau; y_1, y_2)\,dt\,d\tau, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2) &= (\mathfrak{E} + \lambda\alpha_1)(\mathfrak{E} + \mu\beta_2)f = \\ &= f + \lambda\int_0^1 \alpha(x_1, x_2, y; \lambda)f(y, x_2)\,dy + \mu\int_0^1 \beta(x_1, x_2, y; \mu)f(x_1, y)\,dy + \\ &+ \lambda\mu\int_0^1\!\!\int_0^1 \alpha(x_1, x_2, t; \lambda)\,\beta(t, x_2, \tau)f(t, \tau)\,dt\,d\tau \end{aligned}$$

ist.

Wir können ebenso wie im Paragraph **2** einsehen, daß die Gleichung (9) mit (3) äquivalent ist. Daraus folgt, daß die Gleichungen (7) und (10) die selben Lösungen haben. Denn wären sie verschieden, so hätte die Gleichung (3) zwei verschiedene Lösungen. Da aber jede Lösung von (3) auch eine Lösung von (7) ist, so hätte auch (7) zwei verschiedene Lösungen. Genügen aber die Parameterwerte den Bedingungen a) und b) des Satzes 1, so ist das nach dem klassischem Satze von FREDHOLM unmöglich.

4. Die eindeutige Lösung von (3) kann nicht gesichert werden falls: 1° $\lambda \in \mathfrak{A}$ oder $\mu \in \mathfrak{B}$. Ist $A(x_1, x_2, y)$ bzw. $B(x_1, x_2, y)$ stetig in seinen Variabeln, so bestehet die Menge $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$. im allgemeinen aus abzählbar unendlich vielen Kurven in der komplexen λ—(bzw. μ—) Ebene. In diesem Falle existieren für alle $x_1, x_2; y_1, y_2$ Werte die Kerne P und Q gar nicht. 2°. Es ist zwar $\lambda \notin \mathfrak{A}$ und $\mu \notin \mathfrak{B}$, doch sind λ, μ und ν so beschaffen, daß 1 ein charakteristischer Wert von P (und natürlich dann auch von Q) ist. Diese Werte sind natürlich von x_1 und x_2 unabhängig. Die Menge dieser Zahlentripel (λ, μ, ν) sei durch $\mathfrak{C}$ bezeichnet. Ist $\lambda \notin \mathfrak{A}$, $\mu \notin \mathfrak{B}$ doch $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathfrak{C}$, so existiert die Lösung der Gleichung (7) (und (9)) falls $f(x_1, x_2) \equiv 0$ ist. Diese Eigenfunktionen von (7) sind die Lösungen der homogenen Gleichung

$$\varphi - \lambda \mathcal{A}_1 \varphi - \mu \mathcal{B}_1 \varphi - \nu \mathcal{C}_{12} \varphi = 0.$$

Die Anzahl der linearen unabhängigen Lösungen ist in diesem Falle natürlich endlich. Es ist vielleicht von Interesse zu erwähnen, daß zu dieser endlichen Anzahl von Eigenfunktionen im allgemeinem unendlich viele „charakteristische Tripel" (λ, μ, ν) gehören. Denn es sei $D(\lambda, \mu, \nu; \zeta)$ die Fredholmsche Determinante des Kernes P (die unabhängige Veränderliche ist ζ; λ, μ, ν sind vom Kern abhängende Parameterwerte). Wir erhalten „charakteristische Tripel", wenn wir solche Lösungen der Gleichung

$$D(\lambda, \mu, \nu; 1) = 0$$

bestimmen, bei welchen λ und μ nicht zu $\mathfrak{A}$ bzw. zu $\mathfrak{B}$ gehören.

Mit weiteren — etwas verwickelten — Fragen der homogenen partiellen Integralgleichungen beschäftigen wir uns diesmal nicht.

5. Der lösende Kern kann auch in der Theorie der partiellen Integralgleichungen definiert werden, folgenderweise.

Es sei folgende Funktion betrachtet:

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2; t_1, t_2) &= \lambda\mu A(x_1, x_2; t_2)\, \beta(t_1, x_2, t_2; \mu) + \\ &+ \lambda\mu B(x_1, x_2, t_1)\, \alpha(x_1, t_2, t_1; \lambda) + \nu C(x_1, x_2; t_1, t_2) + \\ &+ \lambda\nu \int_0^1 C(x_1, x_2; y, t_1)\, \alpha(y, t_1, t_2; \lambda)\, dy + \\ &+ \nu\mu \int_0^1 C(x_1, x_2; t_1, y)\, \beta(t_1, y, t_2; \mu)\, dy, \end{aligned} \tag{11}$$

und suchen die Lösung folgender Integralgleichung bei beliebigen, aber festen t_1 und t_2 $(0 \leqq t_1, t_2 \leqq 1)$:

$$R - \lambda \mathcal{A}_1 R - \mu \mathcal{B}_2 R - \nu \mathcal{C}_{12} R = \Phi. \tag{12}$$

Die Funktion R existiert, falls $\lambda \notin \mathfrak{A}$, $\mu \notin \mathfrak{B}$, $(\lambda, \mu, \nu) \notin \mathfrak{C}$ ist, sie hängt außer x_1 und x_2 auch von t_1 und t_2 und von den Parameterwerten λ, μ, ν ab:

$$R = R(x_1, x_2; t_1, t_2; \lambda, \mu, \nu).$$

Sie ist eindeutig in λ, μ und ν in den Komplememtärmengen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$. Nennen wir R den lösenden Kern der partiellen Integralgleichung. Der zur Funktion R gehörende Integraloperator

$$\int_0^1 \int_0^1 R(x_1, x_2, y_1, y_2; \lambda, \mu, \nu) f(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2$$

sei durch $\mathfrak{R}_{12} f$ bezeichnet. Wir behaupten nun

Satz 2. *Ist $f(x_1, x_2)$ eine beliebige, beschränkte Funktion, so ist die Lösung von* (3) *die folgende*

$$\varphi(x_1, x_2) = f + \lambda \alpha_1 f + \mu \beta_2 f + \mathfrak{R}_{12} f. \tag{13}$$

Setzen wir (13) in (3), so haben wir

$$\begin{aligned} & f + \lambda\alpha_1 f + \mu\beta_2 f + \mathfrak{R}_{12} f - \lambda\mathfrak{A}_1 f - \lambda^2\mathfrak{A}_1\alpha_1 f - \lambda\mu\,\mathfrak{A}_1\beta_2 f - \lambda\mathfrak{A}_1\mathfrak{R}_{12} f - \\ & - \mu\mathfrak{B}_2 f - \lambda\mu\,\mathfrak{B}_2\alpha_1 f - \mu^2\mathfrak{B}_2\beta_2 f - \mu\mathfrak{B}_2\mathfrak{R}_{12} f - \nu\mathfrak{C}_{12} f - \lambda\nu\mathfrak{C}_{12}\alpha_1 f - \\ & - \nu\mu\,\mathfrak{C}_{12}\beta_2 f - \nu\mathfrak{C}_{12}\mathfrak{R}_{12} f = (\mathfrak{E} + \lambda\alpha_1 - \lambda\mathfrak{A}_1 - \lambda^2\mathfrak{A}_1\alpha_1) f + \\ & + (\mathfrak{E} + \mu\beta_2 - \mu\mathfrak{B}_2 - \mu^2\mathfrak{B}_2\beta_2) f + (\mathfrak{R}_{12} - \lambda\mathfrak{A}_1\mathfrak{R}_{12} - \mu\mathfrak{B}_2\mathfrak{R}_{12} - \nu\mathfrak{C}_{12}\mathfrak{R}_{12} - \\ & - \lambda\mu\,\mathfrak{A}_1\beta_2 - \lambda\mu\,\mathfrak{B}_2\alpha_1 - \nu\mathfrak{C}_{12} - \lambda\nu\mathfrak{C}_{12}\alpha_1 - \mu\nu\mathfrak{C}_{12}\beta_2) f - f. \end{aligned}$$

Die Ausdrücke in der ersten und zweiten Klammer an der rechten Seite können auf folgenden Gestalt gebracht werden:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{E} + \lambda\alpha_1 - \lambda\mathfrak{A}_1 - \lambda^2\mathfrak{A}_1\alpha_1) f &= (\mathfrak{E} - \lambda\mathfrak{A}_1)(\mathfrak{E} + \lambda\alpha_1) f = f \\ (\mathfrak{E} + \mu\beta_2 - \mu\mathfrak{B}_2 - \mu^2\mathfrak{B}_2\beta_2) f &= (\mathfrak{E} - \mu\mathfrak{B}_2)(\mathfrak{E} + \mu\beta_2) f = f \end{aligned}$$

und zwar auf Grund der Definition des lösenden Kerns α und β. Der Ausdruck im dritten Klammer der rechten Seite verschwindet identisch wegen (11) und (12). Demnach ist die rechte Seite gleich $f + f - f = f$, w. z. b. w.

(Eingegangen am 31. Dezember, 1954.)