Remarques algébriques sur la solution donnée par M. Fréchet à l'équation de Kolmogoroff. II.

Par J. ACZÉL à Debrecen et E. EGERVÁRY à Budapest.

Dans une note antérieure ([1][1]), citée dans ce qui suit comme I.) l'un de nous a fait — après avoir reformulés des résultats de M. FRÉCHET sur le cas régulier des procès de MARKOFF dans une forme un peu plus forte — quelques remarques aussi pour le cas singulier.

Comme nous en avons parlé dans I., la probabilité $p_{jk}(t, u)$ de transition de l'état E_j à l'état E_k au cours de l'intervalle (t, u) doit évidemment satisfaire aux équations

$$(1') \qquad p_{ik}(s, u) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(s, t) p_{jk}(t, u),$$

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t, u) = 1$$

dont la première peut être écrit dans la forme matricielle

$$(1) \qquad P(s, t) P(t, u) = P(s, u).$$

Nous parlons du cas régulier resp. singulier (de rang r) selon que les matrices $P(t, u) = \|p_{jk}(t, u)\|$ d'ordre n sont régulières ou singulières (du rang r).

Dans le § 1. de la note présente nous donnons une solution explicite (de forme différente de celle traitée dans le § 2. de I.) dans le cas singulier de rang r de l'équation matricielle (1) qui est postulée dans ce § pour des s, t, u arbitraires. Dans le § 2. nous examinons cette solution quand aussi l'équation (2) va être postulée.

Cependant dans l'interprétation probabilistique la validité de nos équations n'est garantie que pour des variables ordonnées: $s \leqq t \leqq u$. Dans le § 3. nous présentons des remarques de nature algébrique aussi pour ce cas qui montrent que nos théorèmes y restent valables.

---

[1]) Les nombres en parenthèses se rapportent à la Bibliographie à la fin de la note.

Les méthodes dont nous ferons usage sont des factorisations des matrices singulières: celle qui suit du théorème de LAGRANGE (voir p. ex. [3], pp. 58—59.) et celle à facteurs basiques (voir p. ex. [2]). Le lecteur remarquera qu'un progrés plus rapide est rendu possible par la deuxième méthode.

Les auteurs veulent remercier M. B. GYIRES pour des remarques précieux.

1. On voit aisément (voir p. ex. I.) que la solution générale de l'équation (1) est dans le cas régulier

$$P(t,u) = \Pi(t)^{-1}\Pi(u) \tag{3}$$

où $\Pi(t)$ est une matrice régulière arbitraire dont $\Pi(t)^{-1}$ est l'inverse.

Si (1) est valable pour tous les s, t, u alors à cause du théorème connu de SYLVESTER

$$\operatorname{rang} A\cdot B \leqq \min(\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B)$$

(voir p. ex. [3], p. 19.), le fait que la matrice $P(t,u)$ d'ordre n est du rang r, a pour conséquence que

$$\operatorname{rang} P(s,u) = \operatorname{rang}[P(s,t)\cdot P(t,u)] \leqq \operatorname{rang} P(t,u) = r$$

et

$$r = \operatorname{rang} P(t,u) = \operatorname{rang}[P(t,s)\cdot P(s,u)] \leqq \operatorname{rang} P(s,u)$$

donc

$$\operatorname{rang} P(s,u) = r$$

et de même

$$\begin{aligned}\operatorname{rang} P(s,v) = \operatorname{rang}[P(s,u)\cdot P(u,v)] \leqq \operatorname{rang} P(s,u) = \\ = r \leqq \operatorname{rang}[P(s,v)\cdot P(v,u)] \leqq \operatorname{rang} P(s,v),\end{aligned}$$

c'est-à-dire si une solution de (1) est de rang r pour un couple (t,u) alors elle l'est pour tous les couples (s,v). Pour cela dans nos considérations suivantes tous les matrices P seront du rang r.

Nous introduisons la notation

$$F = \langle E_r, O_{n-r}\rangle = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

pour la matrice idempotente diagonale de rang r.

L'équation (1) peut être considérée comme généralisation de l'équation

$$P\cdot P = P$$

des matrices idempotentes de rang r qui peuvent être écrites, comme il est bien connu (voir p. ex. [3], p. 187.) dans la forme

(5) $$P = \Pi^{-1} F \Pi$$

où Π est une matrice régulière d'ordre n.

La solution générale singuliére de rang r de l'équation (1) que nous donnerons ici, est une généralisation immédiate de cette dernière formule et de (3):

Théorème 1. *La solution générale singulière du rang r de l'équation*

(1) $$P(s,t)\cdot P(t,u) = P(s,u)$$

équivalente à

(1′) $$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(s,t)\, p_{jk}(t,u) = p_{ik}(s,u) \qquad (i,k = 1,2,\ldots,n)$$

est

(6) $$P(t,u) = \Pi(t)^{-1} F \Pi(u),$$

ou dans une forme équivalente

(6′) $$p_{jk}(t,u) = \sum_{i=1}^{r} \Pi_{ij}(t)\, \pi_{ik}(u), \qquad (j,k = 1,2,\ldots,n)$$

où F est la matrice (4), *$\Pi(t)$ est une matrice régulière des fonctions arbitraires $\pi_{ij}(t)$ avec la matrice inverse $\Pi(t)^{-1}$ et $\Pi_{ij}(t)$ est le mineur algébrique de l'élément $\pi_{ij}(t)$ divisé par le déterminant $|\Pi(t)| = |\pi_{ij}(t)|$.*

DÉMONSTRATION. *Première methode.* Nous aurons besoin des relations simples suivantes:

a) $\begin{pmatrix} A_r & A_{12} \\ A_{21} & A_{n-r} \end{pmatrix} F = F \begin{pmatrix} B_r & B_{12} \\ B_{21} & B_{n-r} \end{pmatrix}$ *si et seulement si* $A_{21} = B_{12} = 0$, $A_r = B_r$ *et dans ce cas* $\begin{pmatrix} A_r & A_{12} \\ A_{21} & A_{n-r} \end{pmatrix} F = F \begin{pmatrix} A_r & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}$.

(C_r, C_{n-r} désigneront toujours des matrices quadratiques d'ordre r, resp $(n-r)$, les E des matrices unités.)

En effet

$$\begin{pmatrix} A_r & A_{12} \\ A_{21} & A_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_r & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_r & B_{12} \\ B_{21} & B_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_r & B_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} A_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}.$$

b) *Si* $A = \begin{pmatrix} A_r & A_{12} \\ A_{21} & A_{n-r} \end{pmatrix}$ *est régulière avec la matrice inverse* $A^{-1} = \begin{pmatrix} C_r & C_{12} \\ C_{21} & C_{n-r} \end{pmatrix}$, *alors* $C_{12} = 0$ *resp.* $C_{21} = 0$ *entraînent* $A_{12} = 0$ *resp.* $A_{21} = 0$.

En effet

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix} = E = A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} A_r & A_{12} \\ A_{21} & A_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_r & 0 \\ C_{21} & C_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_r C_r + A_{12} C_{21} & A_{12} C_{n-r} \\ A_{21} C_r + A_{n-r} C_{21} & A_{n-r} C_{n-r} \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix} = E = A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} C_r & C_{12} \\ 0 & C_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r & A_{21} \\ A_{12} & A_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_r A_r + C_{12} A_{21} & C_r A_{12} + C_{12} A_{n-r} \\ C_{n-r} A_{21} & C_{n-r} A_{n-r} \end{pmatrix},$$

d'où

$$A_{12} C_{n-r} = 0 \quad \text{resp.} \quad C_{n-r} A_{21} = 0$$

et étant que

$$|C_{n-r}| \neq 0, \quad \text{parceque} \quad |C_{n-r}|\,|C_r| = |A^{-1}| \neq 0$$

(voir p. ex. [3], p. 43.), nous pouvons multiplier avec C_{n-r}^{-1} de droit resp. de gauche:

$$A_{12} = 0 \quad \text{resp.} \quad A_{21} = 0.$$

c) $|AB + E_r| = |BA + E_p|$ (*A, B pas nécessairement quadratiques* $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{kl}\|$, $i, l = 1, 2, \ldots, r$; $j, k = 1, \ldots, p$).

Ceci peut être démontré p. ex. par la méthode suivante[2]): Soit pour fixer les idées $p \leqq r$. Avec

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_r \end{pmatrix} = (A^1, \ldots, A^p), \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_p \end{pmatrix} = (B^1, \ldots, B^r)$$

nous avons

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 B^1 \ldots A_1 B^r \\ \cdots\cdots\cdots \\ A_r B^1 \ldots A_r B^r \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} B_1 A^1 \ldots B_1 A^p \\ \cdots\cdots\cdots \\ B_p A^1 \ldots B_p A^p \end{pmatrix}.$$

Alors le théorème connu de CAUCHY (voir p. ex. [3] p. 19.) donne,

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} A_{i_1} B^{i_1} \ldots A_{i_1} B^{i_m} \\ \cdots\cdots\cdots \\ A_{i_m} B^{i_1} \ldots A_{i_m} B^{i_m} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{1 \leqq j_1 \leqq \cdots \leqq j_m \leqq p} \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} \ldots a_{i_1 j_m} \\ \cdots\cdots \\ a_{i_m j_1} \ldots a_{i_m j_m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{j_1 i_1} \ldots b_{j_1 i_m} \\ \cdots\cdots \\ b_{j_m i_1} \ldots b_{j_m i_m} \end{vmatrix}, & m = 1, \ldots, p, \\ 0, & m = p+1, \ldots, r \end{cases}$$

et

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} B_{j_1} A^{j_1} \ldots B_{j_1} A^{j_m} \\ \cdots\cdots\cdots \\ B_{j_m} A^{j_1} \ldots B_{j_m} A^{j_m} \end{vmatrix} = \sum_{1 \leqq i_1 \leqq \cdots \leqq i_m \leqq r} \begin{vmatrix} b_{j_1 i_1} \ldots b_{j_1 i_m} \\ \cdots\cdots \\ b_{j_m i_1} \ldots b_{j_m i_m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} \ldots a_{i_1 j_m} \\ \cdots\cdots \\ a_{i_m j_1} \ldots a_{i_m j_m} \end{vmatrix}.$$

---

[2]) La démonstration présente était cordialement mise à notre disposition par M. B. GYIRES.

Soient

$$|AB+\lambda E_r| = \lambda^r + c_1\lambda^{r-1} + \cdots + c_r \quad \text{et} \quad |BA+\lambda E_p| = \lambda^p + d_1\lambda^{p-1} + \cdots + d_p$$

(cf. [3], p. 69.); en vertu de (7) et (8) nous avons

$$c_m = \sum_{1 \leqq i_1 \leqq \cdots \leqq i_m \leqq r} \begin{vmatrix} A_{i_1} B^{i_1} \dots A_{i_1} B^{i_m} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_{i_m} B^{i_1} \dots A_{i_m} B^{i_m} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{1 \leqq j_1 \leqq \cdots \leqq j_2 \leqq p} \begin{vmatrix} A_{i_1} B^{i_1} \dots A_{i_1} B^{i_m} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_{i_m} B^{i_1} \dots A_{i_m} B^{i_m} \end{vmatrix} = d_m, & m = 1, \dots, p, \\ 0, & m = p+1, \dots, r. \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$|AB+\lambda E_r| = \lambda^{r-p} |BA+\lambda E_p|$$

et pour $\lambda = 1$

$$|AB+E_r| = |BA+E_p|,$$

comme nous l'avons affirmé.

Pour démontrer notre théorème nous remarquons maintenant, qu'en vertu de (1) nous avons

$$P(t,u) = P(t,a)\,P(a,a)\,P(a,u) \tag{9}$$

et la matrice idempotente

$$P(a,a) = P(a,a)\,P(a,a)$$

peut être représentée par la formule (5):

$$P(a,a) = \Pi^{-1} F \Pi. \tag{10}$$

En désignant

$$\Pi P(a,u) = \Pi_{\rm I}(u), \qquad P(t,a)\Pi^{-1} = \Pi_{\rm II}(t), \tag{11}$$

(9) devient

$$P(t,u) = \Pi_{\rm II}(t)\, F\, \Pi_{\rm I}(u) \tag{12}$$

où à cause de (1), (10) et (11)

$$\begin{gathered} \Pi_{\rm I}(t)\,\Pi_{\rm II}(t) = \Pi P(a,t) P(t,a) \Pi^{-1} = \Pi P(a,a) \Pi^{-1} = \Pi \Pi^{-1} F \Pi \Pi^{-1}, \\ \Pi_{\rm I}(t)\,\Pi_{\rm II}(t) = F. \end{gathered} \tag{13}$$

On voit tout de suite que (12) avec (13) satisfait toujours à (1).

D'autre part, étant qu'à cause de (11) $\Pi_{\rm I}$ est aussi du rang r, il est possible de lui donner une représentation de LAGRANGE (voir p. ex. [3], pp. 58—59.):

$$\Pi_{\rm I} = AFA', \qquad |A| \neq 0,\ |A'| \neq 0. \tag{14}$$

En écrivant encore

$$A'\Pi_{\rm II} = B$$

il suit de (13) que

$$AFB = F \quad \text{c'est-à-dire} \quad CF = FB \qquad (C = A^{-1})$$

donc par a) $C_{21} = 0$ et par b) aussi $A_{21} = 0$ ce qui n'est possible que si $|A_r| \neq 0$, parce que $|A_r||A_{n-r}| = |A| \neq 0$ ([3], p. 43.).

Ceci entraîne qu'à l'aide de a) (14) se laisse mettre dans la forme

$$\Pi_{\mathrm{I}} = AFA' = F\begin{pmatrix} A_r & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix} A'.$$

En désignant

$$\Pi(t) = \begin{pmatrix} A_r & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix} A' \qquad (|\Pi(t)| = |A_r||A'| \neq 0)$$

cela devient

(15) $$\Pi_{\mathrm{I}}(t) = F\Pi(t).$$

De même

(16) $$\Pi_{\mathrm{II}}(t) = \Pi'(t)F \qquad (|\Pi'(t)| \neq 0)$$

et de (12)

(17) $$P(t, u) = \Pi'(t)F\Pi(t), \qquad (|\Pi(t)| \neq 0,\ |\Pi'(t)| \neq 0)$$

résulte. Cependant (13), (15), (16) donnent

$$F = F\Pi(t)\Pi'(t)F,$$

ou avec $\Pi(t)\Pi'(t) = G = \begin{pmatrix} G_r & G_{12} \\ G_{21} & G_{n-r} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G_r & G_{12} \\ G_{21} & G_{n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc

(18) $$G_r = E_r.$$

Pour achever, examinons à quelle mesure Π et Π' se trouvent déterminées par (15) et (16). Nous écrivons

$$\Pi = \begin{pmatrix} C \\ X \end{pmatrix}, \qquad \Pi' = (D, Y)$$

(C resp. X ont r resp. $n-r$ lignes, D resp. Y ont r resp. $n-r$ colonnes). (15) et (16) donnent

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix} = \Pi_{\mathrm{I}} \quad \text{resp.} \quad (D, Y)\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (D, 0) = \Pi_{\mathrm{II}}$$

ce qui montre que les éléments de X et Y peuvent être choisis arbitrairement.

Nous voulons les choisir de telle manière qu'il soit

(19) $$G = \Pi\Pi' = E_n.$$

Il suit de

$$(20) \qquad \begin{pmatrix} G_r & G_{12} \\ G_{21} & G_{n-r} \end{pmatrix} = \Pi\Pi' = \begin{pmatrix} C \\ X \end{pmatrix} (D, Y) = \begin{pmatrix} CD & CY \\ XD & XY \end{pmatrix}$$

en vertu de (18) que

$$(21) \qquad CD = E_r$$

ce qui entraîne que C et D sont tous les deux de rang r. Leurs colonnes resp. lignes peuvent donc être rearrangées de la façon suivante:

$$C = (C_r, C_{12}), \quad |C_r| \neq 0, \quad D = \begin{pmatrix} D_r \\ D_{21} \end{pmatrix}, \quad |D_r| \neq 0,$$

ce qui n'a influence que sur l'ordre des éléments de X et Y.

Nous voyons de (20) qu'après avoir constaté (21) il ne nous reste qu'à assurer

$$(22) \qquad CY = XD = 0, \quad XY = E_{n-r}$$

pour arriver à (19). En écrivant aussi

$$X = (X_{21}, X_{n-r}), \quad Y = \begin{pmatrix} Y_{12} \\ Y_{n-r} \end{pmatrix},$$

il faudrait donc assurer qu'ils soient

$$C_r Y_{12} + C_{12} Y_{n-r} = 0, \qquad X_{21} D_r + X_{n-r} D_{21} = 0,$$
$$X_{21} Y_{12} + X_{n-r} Y_{n-r} = E_{n-r}.$$

Les deux premières équations sont satisfaites par

$$(23) \qquad Y_{12} = -C_r^{-1} C_{12} Y_{n-r} \quad \text{et} \quad X_{21} = -X_{n-r} D_{21} D_r^{-1},$$

tellement que la troisième se transforme à

$$(24) \qquad X_{n-r}(D_{21} D_r^{-1} C_r^{-1} C_{12} + E_{n-r}) Y_{n-r} = E_{n-r}.$$

Mais de (21)

$$C_r D_r + C_{12} D_{21} = E_r,$$

c'est-à-dire la matrice

$$E_r + C_r^{-1} C_{12} D_{21} D_r^{-1} = C_r^{-1} D_r^{-1}$$

est regulière, donc en vertu de c)

$$H = D_{21} D_r^{-1} C_r^{-1} C_{12} + E_{n-r}$$

dans (24) l'est aussi et (19) est satisfait par (23) et p. ex.

$$Y_{n-r} = H^{-1} X_{n-r}^{-1}$$

(ils restent encore $(n-r)^2$ paramétres arbitraires).

(17) et (19) donnent (6) c. q. f. d.

Deuxième méthode. Dans l'équation

$$P(t, u) = P(t, a)\, P(a, a)\, P(a, u) \tag{9}$$

qui suit de (1) nous donnons à la matrice idempotente $P(a, a)$ la représentation à facteurs basiques (voir [2]):

$$P(a, a) = P_1 P_2^* \quad \text{avec} \quad P_2^* P_1 = E_r, \tag{25}$$

d'où en écrivant

$$P(t, a) P_1 = \Pi_1(t), \quad P_2^* P(a, t) = \Pi_2^*(t). \tag{26}$$

(9) entraîne

$$P(t, u) = \Pi_1(t) \Pi_2^*(u). \tag{27}$$

Ici

$$\Pi_2^*(t) \Pi_1(t) = P_2^* P(a, t) P(t, a) P_1 = P_2^* P(a, a) P_1 = P_2^* P_1 P_2^* P_1 = E_r, \tag{28}$$

en vertu de (26), (1) et (25), ce qui montre que la solution générale (27) de (1) peut être considérée comme généralisation de (25).

Étant que la représentation (27) peut être écrite comme

$$P(t, u) = (\Pi_1(t),\, X_1(t)) \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_2^*(u) \\ X_2^*(u) \end{pmatrix} \tag{29}$$

avec des matrices arbitraires X_1, X_2^* à $(n-r)$ colonnes resp. lignes et à n lignes resp. colonnes, — il ne nous reste donc qu'à montrer qu'elles peuvent être choisies de telle façon que

$$E_n = (\Pi_1(t), X_1(t)) \begin{pmatrix} \Pi_2^*(t) \\ X_2^*(t) \end{pmatrix} = \Pi_1(t) \Pi_2^*(t) + X_1(t) X_2^*(t). \tag{30}$$

Mais avec $\Pi_1(t), \Pi_2^*(t)$ étant en vertu de (27) et (1) [voir aussi (28)] une matrice idempotente de rang r, $E_n - \Pi_1(t)\Pi_2^*(t)$ reste une matrice idempotente de rang $n-r$ et une couple X_1, X_2^* arbitraire des facteurs basiques de cette matrice $(X_1 X_2^* = E_n - \Pi_1 \Pi_2^*)$ satisfait à (30). Avec

$$\Pi(t) = \begin{pmatrix} \Pi_2^*(t) \\ X_2^*(t) \end{pmatrix},$$

nous avons donc

$$P(t, u) = \Pi(t)^{-1} F \Pi(u)$$

de (29), c. q. f. d.

Il est évident que (6) satisfait à (1):

$$\begin{aligned} P(s, t) P(t, u) &= \Pi(s)^{-1} F \Pi(t) \Pi(t)^{-1} F \Pi(u) = \\ &= \Pi(s)^{-1} F E F \Pi(u) = \Pi(s)^{-1} F \Pi(u) = P(s, u). \end{aligned}$$

(6) est naturellement équivalent à (6′)

2. Nous passons à l'équation

$$\sum_{k=1}^{n} p_{jk}(t, u) = 1, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Dans 1. nous avons montré, que dans le cas régulier cette équation est satisfaite si et seulement si dans la matrice $\Pi(t) = \|\pi_{ij}(t)\|$ de (3) nous avons

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_{ij}(t) = \text{constant}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Comme généralisation nous démontrons le

Théorème 2. *Pour que*

$$p_{ik}(s, u) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(s, t) p_{jk}(t, u), \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1'}$$

$$\sum_{k=1}^{n} p_{jk}(t, u) = 1, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

et

$$\operatorname{rang} \|p_{ij}(t, u)\| = r$$

soient satisfaites il faut et il suffit que

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_{ij}(t) = \begin{cases} \text{constant}, & i = 1, 2, \ldots, r, \\ 0, & i = r+1, \ldots, n \end{cases} \tag{31}$$

dans

$$p_{jk}(t, u) = \sum_{i=1}^{r} \Pi_{ij}(t) \pi_{ik}(u). \tag{6'}$$

DÉMONSTRATION. En vertu du Théorème 1. nos suppositions entraînent (6′) et en substituant cette formule dans (2) nous obtenons

$$1 = \sum_{k=1}^{n} p_{jk}(t, u) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{r} \Pi_{ij}(t) \pi_{ik}(u) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Multiplions ces équations avec $\pi_{lj}(t)$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$ et sommons par rapport à j:

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_{lj}(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} \pi_{lj}(t) \Pi_{ij}(t) \pi_{ik}(u) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{r} \delta_{li} \pi_{ik}(u) =$$
$$= \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \pi_{lk}(u), & l = 1, 2, \ldots, r, \\ 0, & l = r+1, \ldots, n \end{cases}$$

donc (31) se trouve démontré.

Réciproquement (31) entraîne

$$\sum_{k=1}^{n} \pi_{ik}(t) = \sum_{k=1}^{n} \pi_{ik}(u), \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} \pi_{ik}(t) = 0, \qquad (i = r+1, \ldots, n)$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n} p_{jk}(t, u) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{r} \Pi_{ij}(t) \pi_{ik}(u) = \sum_{i=1}^{r} \left[\Pi_{ij}(t) \sum_{k=1}^{n} \pi_{ik}(u) \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \left[\Pi_{ij}(t) \sum_{k=1}^{n} \pi_{ik}(t) \right] +$$

$$+ \sum_{i=r+1}^{n} \left[\Pi_{ij}(t) \sum_{k=1}^{n} \pi_{ik}(t) \right] = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \Pi_{ij}(t) \pi_{ik}(t) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{jk} = 1,$$

c. q. f. d.

3. Jusqu'ici nous avons fait usage de l'équation (1) pour des s, t, u arbitraires. Si, en accord avec l'interprétation probabilistique, les fonctions $p_{jk}(t, u)$ ne sont définies que pour $t \leqq u$ et (1) ne vaut que pour $s \leqq t \leqq u$ alors *il faut définir $P(t, a)$ pour $t > a$ (a est un nombre fixé, t variable) de telle façon que*

$$P(t, a) P(a, t) = P(t, t), \tag{32}$$

$$P(a, t) P(t, a) = P(a, a) \tag{33}$$

soient satisfaites. Savoir nous avons faits usagè de (1) pour des s, t, u pas tous les trois égaux seulement dans (9), (13), (28). (Ici nous supposons en avance que $P(t, u)$ est de même rang pour tous les couples (t, u)). (33) suffit pour que (13) et (28) soient valables et de notre nouveau point de vue nous n'avons besoin de (9) que pour $t \leqq u$ et pour ce cas (32) suffit. Pour montrer cela nous distinguons trois cas:

A) Pour $t \leqq a \leqq u$ il n'y a rien à démontrer parce que (1) reste postulée pour $s \leqq t \leqq u$.

B) $a < t \leqq u$:

$$P(t, a)[P(a, a) P(a, u)] = P(t, a) P(a, u) = P(t, a) \cdot P(a, t) P(t, u) =$$
$$= P(t, t) P(t, u) = P(t, u);$$

C) $t \leqq u < a$:

$$[P(t, a) P(a, a)] P(a, u) = P(t, a) P(a, u) = P(t, u) P(u, a) \cdot P(a, u) =$$
$$= P(t, u) P(u, u) = P(t, u),$$

en vertu de (32) et de l'équation (1) aux $s \leqq t \leqq u$.

Le problème de définir $P(t, a)$ de telle façon, qu'elle satisfasse à (32) et (33) conduit au problème général de trouver une solution commune aux équations

$$AX = P, \quad XB = Q \tag{34}$$

(dans notre cas spécial $A=B$ et P, Q sont des matrices idempotentes). Nous examinerons ce problème (cf. [4], p. 90; [5], [6]).

Soient

$$A=A_1A_2^*,\quad B=B_1B_2^*,\quad P=P_1P_2^*,\quad Q=Q_1Q_2^* \tag{35}$$

les représentations à facteurs basiques (voir [2]) des matrices connues dans les équations (34) qui deviennent ainsi

$$A_1A_2^*X=P_1P_2^*,\quad XB_1B_2^*=Q_1Q_2^*, \tag{36}$$

d'où ([2])

$$P_1=A_1T_1,\quad Q_2^*=T_2B_2^*, \tag{37}$$

$$X=Q_1YP_2^* \tag{38}$$

avec des T_1, Y, T_2 réguliers d'ordre r. En substituant (37), (38), dans (36) nous avons

$$A_1A_2^*Q_1YP_2^*=A_1T_1P_2^*,\quad Q_1YP_2^*B_1B_2^*=Q_1T_2B_2^*$$

et étant que A_1, Q_1 resp. B_2^*, P_2^* sont invertables de gauche resp. de droit (il y a des matrices avec lesquels ils peuvent être multipliés de gauche resp. de droit tellement que les produits soient des matrices unités) nous arrivons à

$$A_2^*Q_1Y=T_1,\quad YP_2^*B_1=T_2. \tag{39}$$

Mais avec $|T_1|\neq 0$, $|T_2|\neq 0$ aussi $|A_2^*Q_1|\neq 0$, $|P_2^*B_1|\neq 0$ donc Y peut être exprimé de tous les deux équations (39) et pour que (34) ait une solution il faut que

$$(A_2^*Q_1)^{-1}T_1=Y=T_2(P_2^*B_1)^{-1}. \tag{40}$$

La solution

$$X=Q_1(A_2^*Q_1)^{-1}T_1P_2^*=Q_1T_2(P_2^*B_1)^{-1}P_2^*,$$

qui suit de (38) et (40) satisfait à (34) si (37) est rempli:

$$AX=A_1A_2^*Q_1(A_2^*Q_1)^{-1}T_1P_2^*=P_1P_2^*=P,$$
$$XB=Q_1T_2(P_2^*B_1)^{-1}P_2^*B_1B_2^*=Q_1Q_2^*=Q.$$

Nous avons donc trouvé que *pour que* (34) *ait une solution il faut et il suffit que dans la représentation* (35) *des matrices donnés*

$$P_1=A_1T_1,\quad Q_2^*=T_2B_2^*,\quad T_1P_2^*B_1=A_2^*Q_1T_2$$

($T_1, T_2, P_2^*B_1, A_2^*Q_1$ *réguliers*) *soient satisfaites et alors*

$$X=Q_1(A_2^*Q_1)^{-1}T_1P_2^*=Q_1T_2(P_2^*B_1)^{-1}P_2^*$$

est une solution.

Dans une forme equivalente nous pouvons énoncer, que *pour que* (34) *avec des matrices A, B, P, Q de rang r ait une solution du rang r il faut et* *il suffit qu'il soit*

$$PB = AQ$$

avec tous les deux côtés de rang r.

En effet les équations

$$P_1 = A_1 T_1, \quad Q_2^* = T_2 B_2^*, \quad T_1 P_2^* B_1 = A_2^* Q_1 T_2$$

ont pour conséquence

$$P_1 P_2^* B_1 B_2^* = A_1 A_2^* Q_1 Q_2^*, \quad PB = AQ,$$

(ce que nous obtenons en multipliant avec A_1 et B_2^* de gauche resp. de droit) et à cause de la régularité supposée de $P_2^* B_1$, $A_2^* Q_1$ les deux côtés de cette équation sont de rang r.

Vice versa $PB = AQ$ avec des côtés de rang r a pour conséquence [en appliquant les propriétés fondamentales de la factorisation à facteurs basiques (voir [2])]:

$$\begin{array}{ll} P_1 P_2^* B_1 B_2^* = A_1 A_2^* Q_1 Q_2^*, & |P_2^* B_1| \neq 0, \ |A_2^* Q_1| \neq 0 \\ P_1 = A_1 T_1, \ Q_2^* = T_2 B_2^*, & |T_1| \neq 0, \ |T_2| \neq 0 \\ A_1 T_1 P_2^* B_1 B_2^* = A_1 A_2^* Q_1 T_2 B_2^*, & T_1 P_2^* B_1 = A_2^* Q_1 T_2, \end{array} \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Dans notre cas special nous avons

$$A = B = P(a, t), \quad P = P(a, a), \quad Q = P(t, t) \qquad (a \leqq t)$$

ce qui montre que la condition

$PB = AQ$, $P(a, a) P(a, t) = P(a, t) P(t, t) = P(a, t)$, rang $PB = \text{rang} P(a, t) = r$

est à cause de (1) $(s \leqq t \leqq u)$ évidemment remplie, ce qui donne le

Théorème 3. *Les théorèmes 1., 2. restent valables pour des* $p_{jk}(t, u)$ $(t \leqq u)$ *si* (1) *et* (2) *ne sont postulés que pour des* $s \leqq t \leqq u$.

Bibliographie.

[1] J. Aczél, Remarques algébriques sur la solution donnée par M. Fréchet à l'équation de Kolmogoroff. I., *Publ. Math. Debrecen* **4** (1955), 33—42.

[2] E. Egerváry, Über die Faktorisation von Matrizen und ihre Anwendung auf die Lösung von linearen Gleichungssystemen, *Z. Angew. Math. Mech.* **35** (1955), 111—118.

[3] Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, Москва, 1953.

[4] C. C. Mac Duffee, The theory of matrices, *Berlin*, 1953.

[5] F. Cecioni, Sopra alcune operazioni algebriche sulle matrici, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **11** (1910), Suppl., surtout 17—20.

[6] R. Penrose, A generalized inverse for matrices, *Proc. Cambridge Phylos. Soc.* **51** (1955), 406—413.

(Reçu le 2 février 1956.)