Eine Beziehung zwischen affiner und Minkowskischer Differentialgeometrie.

Von DETLEF LAUGWITZ in Oberwolfach.

Im n-dimensionalen zentrisch-affinen Raum betrachten wir eine geschlossene konvexe Hyperfläche J, welche den Nullpunkt O im Innern enthalte und für das folgende ausreichende Differenzierbarkeitseigenschaften besitze. Eine solche Fläche gibt Veranlassung zur Einführung zweier zunächst ganz verschieden definierter Metrisierungen, nämlich einmal der Minkowskischen Metrik des Raumes, und zum zweiten der Flächenmetrik der homogen-affinen Geometrie[1]). Wir setzen uns hier das Ziel, eine Beziehung zwischen diesen beiden Maßbestimmungen herzuleiten.

Die Minkowskische Metrik $F(x)$ zur „Indikatrix" J ist definiert durch

$F(x) = 1$ für die Punkte x von J,
$F(x)$ von erster Ordnung positiv homogen.

Nach unseren Voraussetzungen über J ist F eine im ganzen Raum definierte, positiv-definite Funktion. Zu dieser Minkowskischen Metrik gehört ein Fundamentaltensor

$$g_{ik}(x) = \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^i \partial x^k}, \quad g = \frac{F^2}{2}.$$

Wir spezifizieren jetzt die noch offenen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen über J dahin, daß $g(x)$ für $x \neq 0$ viermal stetig differenzierbar sein soll, und daß $g_{ik}(x) y^i y^k$ für jedes $x \neq 0$ eine positiv-definite quadratische Form sein soll; dies sind die üblichen Voraussetzungen in der Minkowskischen Differentialgeometrie.

---

[1]) Für den Fall $n = 3$ sind die vorausgesetzten Begriffe im Lehrbuch [6. § 37] von SALKOWSKI dargestellt. Wir werden, da dies keine größeren Schwierigkeiten bedingt, eine Darstellung für den n-dimensionalen Fall geben; die Grundform der affinen Flächentheorie im n-dimensionalen homogen-affinen Raum bestimmt sich dabei in Analogie zum dreidimensionalen Fall und zur n-dimensionalen Geometrie der volumtreuen Affinitäten [1, § 65].

Andererseits gehört zur Fläche J, welche wir uns in Parameterdarstellung $x^i(u^\alpha)$ (griechische Indizes stehen für die Flächenparameter; die Tangentialvektoren $x^i_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$ seien linear unabhängig) gegeben denken, der Fundamentaltensor der homogen-affinen Flächentheorie

$$s_{\alpha\beta} = \frac{\det\{x_{\alpha\beta}, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}}{\det\{x, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}} \qquad \left(x_{\alpha\beta} \text{ für } \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}\right) \tag{1}$$

(Die Nennerdeterminante ist wegen der Konvexheit von J von 0 verschieden.) Dieser Tensor ist auf der ganzen Hyperfläche J definiert.

Um beide Maßbestimmungen vergleichen zu können, schränken wir die Minkowskische Metrik in folgender Weise auf die Hyperfläche J ein. Der Tensor $g_{ik}(x)$ definiert im ganzen Raum außer in 0 eine positiv-definite Riemannsche Metrik $ds^2 = g_{ik}(x)dx^i dx^k$ (ein Studium dieser Maßbestimmung findet man in [5]). Betrachtet man J als Untermannigfaltigkeit dieses Riemannschen Raumes, so wird auf J selbst eine Riemannsche Metrik induziert, welche den Fundamentaltensor hat

$$g_{\alpha\beta}(u) = x^i_\alpha x^k_\beta g_{ik}(x(u)) \tag{2}$$

(Diese Flächenmetrik betrachtet — unabhängig von der Metrik $g_{ik}(x)$ im Einbettungsraum — O. VARGA [8].) Man erhält so aus jedem der beiden Ansätze in (1) und (2) je eine affininvariante Riemannsche Metrik auf der Hyperfläche J.

Zum Vergleich von (1) und (2) berechnen wir jetzt $s_{\alpha\beta}$ aus (1) für einen beliebigen festen Flächenpunkt $x(u)$. Die Determinante

$$\det\{a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$$

in diesem Punkte kann aufgefasst werden als Skalarprodukt des Raumvektors a mit der kovarianten Vektordichte n_i mit den $n-1$-reihigen Unterdeterminanten der Matrix $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ als Komponenten. Damit wird mit einer zunächst beliebigen euklidischen Raummetrik g_{ik}

$$s_{\alpha\beta} = \frac{g_{ik} x^i_{\alpha\beta} n^k}{g_{ik} x^i n^k}, \quad n^k = g^{kr} n_r. \tag{3}$$

Nun wollen wir für g_{ik} eine spezielle Wahl treffen: Wir nehmen für g_{ik} die zum betrachteten Flächenpunkt gehörige „oskulierende" euklidische Maßbestimmung $g_{ik}(x(u))$ der Minkowskischen Maßbestimmung. Mit dieser gilt

$$n_i x^i_\alpha = g_{ik}(x(u)) x^i_\alpha n^k = 0, \tag{4}$$

weil der links stehende Ausdruck gerade gleich der Determinante

$$\{x_\alpha, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$$

ist. Andererseits hat man aber wegen $g_{ik}(x)x^i x^k = 1$ und wegen der Eulerschen Homogenitätsrelation $g_{ijk}(x)x^k = 0$ $\left(g_{ijk} = \frac{\partial^3 g}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k}\right)$ auch die Beziehung

$$g_{ik}(x(u))x^i_\alpha x^k = 0. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt aber

$$n^i = c \cdot x^i \tag{6}$$

wobei $c \neq 0$ wegen der linearen Unabhängigkeit der $x_1, \ldots, x_{n-1}$; geometrisch bedeutet das: n^i und x^i sind senkrecht zu J in der Riemannschen Metrik $g_{ik}(x)$.

Aus (5) folgt durch Differentiation nach u^β noch

$$g_{ik}(x(u))x^i_{\alpha\beta}x^k = -g_{ik}(u))x^i_\alpha x^k_\beta, \tag{7}$$

wobei wieder die Eulersche Homogenitätsrelation verwendet wurde. Durch Einsetzen von (6) in (3) unter Beachtung von (7), (2) und der Relation

$$F^2(x) = g_{ik}(x)x^i x^k = 1 \text{ für } x = x(u)$$

ergibt sich

$$s_{\alpha\beta} = \frac{g_{ik}(x(u))x^i_{\alpha\beta}n^k}{g_{ik}(x(u))x^i n^k} = \frac{g_{ik}x^i_{\alpha\beta}x^k}{g_{ik}x^i x^k} = -g_{ik}x^i_\alpha x^k_\beta,$$

also

$$s_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta}. \tag{8}$$

Damit haben wir den

Satz. *Die auf der Indikatrix J durch die von ihr definierte Minkowskische Metrik induzierte Riemannsche Metrik* (2) *und die Metrik* (1) *der homogen-affinen Flächentheorie stimmen bis aufs Vorzeichen überein.*

Dieser Satz kann dahingehend interpretiert werden, daß die homogenaffine Differentialgeometrie der Fläche J und die Minkowskische Differentialgeometrie der Eichfläche J im wesentlichen identisch sind.[2]) Daraus ergeben sich sofort einfache Beziehungen zwischen den geometrischen Größen in beiden Auffassungen. Bekannt und wichtig ist die von A. Deicke [3] verwendete Tatsache, daß die Flächen J konstanten Affinabstandes vom Nullpunkt (die sogenannten „eigentlichen Affinsphären") und die Minkowskischen Räume mit $g^{rs}g_{rsi} = 0$ einander entsprechen, so daß die Kennzeichnung der Ellipsoide als geschlossene Affinsphären der Kennzeichnung der euklidischen Räume durch diese Tensorbeziehung korrespondiert. Entsprechend kann man sofort sehen,

[2]) Andere Zusammenhänge zwischen Minkowskischer und affiner Differentialgeometrie für $n = 2$ hat W. Süss [7] angegeben.

daß der affingeometrische Krümmungstensor von J und der Riemannsche Krümmungstensor zu (2) identisch sind. Für den letzteren hat VARGA [8] (vgl. auch [5]) gezeigt, daß er eine geometrische Deutung des einen Krümmungstensors S_{ijkl} der Theorie von CARTAN [2] liefert. Dieser letztere Tensor besitzt also nach dem Gezeigten auch eine einfache affingeometrische Bedeutung.

Überhaupt ist evident, daß unser Satz gerade für die Finslerräume von Interesse sein wird. Denn dort handelt es sich ja — im Tangentialraum jedes Punktes des Finslerschen Raumes — um zentrisch-affine Räume, in denen eine Fläche J ausgezeichnet ist. In der lokal-Minkowskischen Auffassung der Finslerschen Räume (RUND, BUSEMANN, BARTHEL u. a.) faßt man J als Indikatrix auf und macht den Tangentialraum dadurch zu einem Minkowskischen Raum. Diese Auffassung ist geometrisch befriedigend, führt aber rechnerisch oft auf schwer zu behandelnde nichtlineare Probleme. Die Auffassung von É. CARTAN ist dagegen zwar kalkülmäßig wesentlich leichter zu behandeln, wird aber oft als geometrisch unbefriedigend empfunden, weil Gegenstand dieser Theorie nicht der Raum selbst, sondern das über ihm als Basisraum errichtete Faserbündel der Richtungselemente ist. Die Ergebnisse aus [8], [5] und der hier bewiesene Satz legen nun die folgende Auffassung der Finslerräume nahe. Der Finslerraum werde — genau wie in der lokal-Minkowskischen Auffassung — als ein Punktraum aufgefasst, in dessen zentrisch-affinen Tangentialräumen in jedem Punkte eine Fläche J ausgezeichnet ist. Diese Fläche definiert nun aber außer der Minkowskischen Metrik mit J als Indikatrix noch eine affininvariante Riemannsche Metrik (unser $g_{ik}(x)$). Dies hat den Vorteil, daß alle Ergebnisse der CARTANschen Theorie hier in einem Punktraum einen geometrischen Sinn erhalten, wodurch eine Synthese der beiden Auffassungen erreicht wird. Außerdem erreichen wir den praktischen Vorteil, daß die Ergebnisse und Formeln der homogen-affinen Differentialgeometrie uns hier nützlich sind

Umgekehrt scheint der bewiesene Satz auch für die *Affingeometrie* insofern eine begriffliche Verbesserung zu ergeben, als der Ausdruck $-g_{\alpha\beta}$ für die Fundamentaltensor oft rechnerisch handlicher ist als der schwerfällige Determinantenausdruck. Der Tensor $g_{\alpha\beta}$ ist außerdem nicht explizit dimensionsabhängig; das ermöglicht einen Aufbau der homogen-affinen Geometrie der Hyperflächen in unendlichdimensionalen affinen Räumen mittels des Kalküls der Arbeit [4]. Die in der letztgenannten Arbeit eingeführte invariante Deutung der Tensorrechnung erlaubt es übrigens, auch im endlichdimensionalen Fall die Formeln der homogen-affinen Geometrie „basisfrei“ zu lesen, ohne daß das Erscheinungsbild der Formeln abzuändern wäre. Man kann also direkt mit Vektoren rechnen, wodurch Invarianzbeweise wegfallen.

ZUSATZ bei der Korrektur am 4. Mai 1957. Inzwischen ist eine Arbeit von A. KAWAGUCHI erschienen (On the theory of non-linear connections II. Theory of Minkowski space and of non-linear connections in a Finsler space, *Tensor N. S.* **6** (1956), 165—199), in welcher verwandte Fragen behandelt werden. Auf S. 173 dieser Arbeit wird der hier bewiesene Satz ebenfalls gezeigt, allerdings ohne unsere geometrische Interpretation in der homogenaffinen Geometrie. KAWAGUCHI deutet vielmehr einige Größen der Minkowskischen Geometrie im Rahmen von BLASCHKES Geometrie der *inhaltstreuen* Affinitäten und kann daher natürlich dort keine Deutung der Flächenmetrik geben, da diese eine invariante Bedeutung nur gegenüber der tatsächlich wesentlichen Gruppe, nämlich der der *homogenen* Affinitäten, hat. — Weitere Zusammenhänge mit der radial-affinen Geometrie gebe ich in einer anderen Arbeit an (*Mat. Z.* **67** (1957), 63—74).

Literatur.

[1] W. BLASCHKE, Differentialgeometrie II, *Berlin*, 1923.
[2] E. CARTAN, Les espaces de Finsler, *Paris*, 1934.
[3] A. DEICKE, Über die Finsler-Räume mit $A_i = 0$, *Arch. d. Math.* **4** (1953), 45—51.
[4] D. LAUGWITZ, Differentialgeometrie ohne Dimensionsaxiom I, II, *Math. Z.* **61** (1954), 100—118 und 131—147.
[5] E. R. LORCH und D. LAUGWITZ, Riemann metrics associated with convex bodies and normed spaces, *Amer. J. Math.* **78** (1956), 889—894.
[6] E. SALKOWSKI, Affine Differentialgeometrie, *Berlin—Leipzig*, 1934.
[7] W. SÜSS, Affine und Minkowskische Geometrie eines ebenen Variationsproblems, *Arch. d. Math.* **5** (1954), 441—446.
[8] O. VARGA, Die Krümmung der Eichfläche des Minkowskischen Raumes, *Abh. Math. Sem. Hamb.* **20** (1955), 41—51.

(Eingegangen am 16. Februar 1956.)