Sur la definition fonctionnelle des fonctions trigonometriques.

Par M. GHERMĂNESCU à Bucarest.

1. Dans un travail récent, [1], MM. J. ACZÉL et O. VARGA ont été conduits aux équations fonctionnelles

$$f(x)+f(y)=f(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}), \tag{1}$$

$$f(x)+f(y)=f(xy+\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1}), \tag{2}$$

dont ils déterminent les solutions continues et strictement monotones, données respectivement par

$$f(x)=k \text{ arc} \cos x, \qquad f(x)=k \text{ arc ch} \, x, \tag{3}$$

avec k constante arbitraire.

C'est, pour nous, l'occasion de revenir sur le problème de la définition fonctionnelle des fonctions trigonométriques, considéré dans un travail antérieur [2], et que nous abordons ici d'une manière nouvelle.

En effet, MM. J. ACZÉL et O. VARGA déduisent, de la continuité et de la monotonie stricte — imposées aux solutions $f(x)$ de (1) ou de (2) — que ces fonctions admettent des fonctions inverses $g(u)$, qui satisfont respectivement aux équations fonctionnelles suivantes $[g^2(u)=g(u)^2]$:

$$g(u+v)=g(u)g(v)-\sqrt{1-g^2(u)}\cdot\sqrt{1-g^2(v)}, \tag{4}$$

$$g(u+v)=g(u)g(v)+\sqrt{g^2(u)-1}\cdot\sqrt{g^2(v)-1}, \tag{5}$$

dont ils déterminent les ensembles des solutions continues, par un artifice très ingénieux.

Nous voulons déterminer ces ensembles par une voie différente, utilisable encore dans d'autres cas. Nous déterminerons ensuite les solutions des équations fonctionnelles (1) et (2), aussi sans avoir besoin de l'hypothèse de la monotonie stricte, mais seulement de celle de la continuité et de la réalité des solutions.

Le résultat obtenu conduit facilement aux ensembles des solutions réelles et mesurables des équations citées.

Nous démontrons d'abord les propriétés suivantes:

1°. *On a* $g(0)=1$. En effet, en faisant $v=0$ dans (4), on obtient, puisque $g(u)$ est continue, $g(u+0)=g(u)$,

$$g(u)=g(u)g(0)-\sqrt{1-g^2(0)}\cdot\sqrt{1-g^2(u)}.$$

Mais $g(0)$ est fini, en vertu de la continuité; on en déduit

$$[1-g(0)]\,[2g^2(u)-1-g(0)]=0,$$

qui donne $g(0)=1$ ou

$$2g^2(u)=1+g(0).$$

La deuxième conclusion est à réjeter, car $g(u)$ est supposée continue et différente d'une constante, qui est une solution banale, de sorte qu'il reste $g(0)=1$.

2°. $g(u)$ *est fonction paire en* u. En faisant $v=-u$ dans (4), on obtient, avec $g(0)=1$,

$$1=g(u)g(-u)-\sqrt{1-g^2(u)}\cdot\sqrt{1-g^2(-u)},$$

équation algébrique en $g(-u)$, qui montre que $g(-u)$ existe en même temps que $g(u)$. On en déduit $[g(-u)-g(u)]^2=0$, donc $g(-u)=g(u)$.

3°. *La fonction* $h(u)=\sqrt{1-g^2(u)}$ *est impaire en* u. En remplaçant, dans (4), $g(u)$ par $\sqrt{1-h^2(u)}$, on est conduit à l'équation fonctionnelle

$$\sqrt{1-h^2(u+v)}=\sqrt{1-h^2(u)}\cdot\sqrt{1-h^2(v)}-h(u)h(v), \tag{6}$$

qui devient, pour $v=-u$ et avec $h(0)=0$,

$$[h(u)+h(-u)]^2=0,$$

donc $h(-u)=-h(u)$.

Ces propriétés établies, on déduit de (4),

$$g(u-v)=g(u)g(v)+\sqrt{1-g^2(u)}\cdot\sqrt{1-g^2(v)}$$

qui, ajoutée à (4), donne l'équation fonctionnelle

$$g(u+v)+g(u-v)=2g(u)g(v), \tag{7}$$

qui n'est autre que l'équation bien connue de D'ALEMBERT et POISSON, cas particulier de la suivante

$$g(u+v)+g(u-v)=2\varphi(v)g(u), \tag{8}$$

dont M. S. KACZMARCZ a donné l'ensemble des solutions mesurables, [4], sous la forme

$$\begin{aligned} g(u)&=Ae^{au}+Be^{-au}, & 2\varphi(v)&=e^{av}+e^{-av}, \\ g(u)&=Au+B, & \varphi(v)&=1, \end{aligned} \tag{9}$$

où A, B et a sont des constantes arbitraires, après avoir préalablement démontré que cet ensemble coïncide avec celui des solutions continues de la même équation. Ce résultat a été retrouvé aussi par nous, [3].

On déduit, pour l'équation fonctionnelle (7),

$$2g(u) = e^{au} + e^{-au},$$

qui satisfait aussi à (4) lorsque $a = ik$, avec k réel, ce qui conduit à

$$g(u) = \cos ku.$$

En partant de l'équation fonctionnelle (5), on est conduit, par une voie analogue, à

$$g(u) = \operatorname{ch} ku.$$

Nous avons démontré ainsi la proposition suivante:

I. *Les ensembles des solutions continues des équations fonctionnelles* (4) *et* (5) *sont donnés par*

$$g(u) = \cos ku, \tag{10}$$

dans laquelle k désigne une constante arbitraire, réelle pour (4) *et imaginaire pour* (5).

2. Si l'on considère, toujours, seulement les solutions réelles de l'équation fonctionnelle (4), celle-ci montre qu'on a $|g(u)| < 1$, de sorte que l'ensemble des solutions réelles et mesurables de (4) coïncide avec celui des solutions bornées et mesurables de celle-ci, ensemble que nous pouvons déterminer aisément.

En effet, dans ce dernier cas, il existe une valeur λ, telle que les intégrales

$$\int_0^\lambda g^\alpha(t)\,dt, \qquad \alpha = 1,2,$$

existent, au sens de Lebesgue, sans être identiquement nulles, (autrement on arrive à la même conclusion pour $g(u)$). En intégrant donc par rapport à v, dans les deux membres de (4), on obtient

$$\int_0^\lambda g(u+v)\,dv = g(u)\int_0^\lambda g(v)\,dv - \sqrt{1-g^2(u)}\int_0^\lambda \sqrt{1-g^2(v)}\,dv,$$

car $\sqrt{1-g^2(v)}$ est aussi sommable, avec son carré. Cette équation s'écrit encore

$$\int_u^{u+\lambda} g(t)\,dt = g(u)\int_0^\lambda g(v)\,dv - \sqrt{1-g^2(u)}\int_0^\lambda \sqrt{1-g^2(v)}\,dv,$$

qui montre que $g(u)$ est continue et dérivable, de sorte que

II. *L'ensemble des solutions réelles et mesurables de l'équation fonctionnelle (4) coïncide avec celui des solutions continues de la même équation.*

On arrive à la même conclusion, en ce qui concerne l'équation fonctionnelle (5), en y posant $g(u)=\frac{1}{h(u)}$.

Il est facile maintenant de retrouver le résultat des MM. J. Aczél et O. Varga: les solutions (10) des équations fonctionnelles (4) et (5) admettent évidemment des fonctions inverses,

$$ku = f(x) = \text{arc}\cos x, \qquad ku = f(x)\,\text{ar ch}\, x,$$

qui seront les solutions continues et strictement monotones des équations fonctionnelles (1) et (2). Ces équations n'admettent pas d'autres solutions continues et strictement monotones car, leurs inverses, qui existent, seront comprises dans (10).

L'étude directe de l'une des équations fonctionnelles (1) ou (2) me paraît assez délicate, à cause de la présence des radicaux, ce qui fait prévoir les solutions multiformes. Mais si l'on peut faire le changement de variables, $x=\cos u$, $y=\cos v$, qui correspond à une variation dans le même sens des variables x et y, on obtient

$$f(\cos u)+f(\cos v) = f[\cos(u+v)],$$

que le changement de fonction $f(\cos t)=F(t)$ ramène à l'équation de Cauchy

$$F(u)+F(v)=F(u+v),$$

dont l'ensemble des solutions continues est donné par $F(t)=k't$, qui conduit aux solutions (3).

On arrive au même résultat par l'un des changements $x=\sin u$, $y=\sin v$, $x=\cos u$, $y=\sin v$; $x=\sin u$, $y=\cos v$, correspondant à d'autres modes de variation des variables x et y.

Bibliographie.

[1] J. Aczél et O. Varga, Bemerkung zur Cayley—Kleinschen Maßbestimmung, *Publ. Math. Debrecen* 4 (1955), 3—15.

[2] M. Ghermanescu, Caractérisation fonctionnelle des fonctions trigonométriques, *Bull. de l'Ecole Polytechnique de Jassy*, 4 (1949), 362—368.

[3] M. Ghermanescu, Ecuaţii funcţionale lineare, *Bull. Acad. R. P. R.* 3 (1951), 245—259.

[4] S. Kaczmarcz, Sur l'équation fonctionnelle $f(x)+f(x+y)=\varphi(y)f\left(x+\frac{y}{2}\right)$, *Fund. Math.* 6 (1924), 122—129.

(*Reçu le 17 mai 1956.*)

Über konkave und konvexe Eikörperscharen.

Von H. HADWIGER in Bern.

1. Eine Klasse $\mathfrak{K}$ konvexer Körper (Eikörper) des k-dimensionalen euklidischen Raumes heißt *konvex*, wenn aus $A, B \in \mathfrak{K}$ auf $\alpha A \times \beta B \in \mathfrak{K}$ $(\alpha, \beta \geqq 0, \alpha + \beta = 1)$ geschlossen werden kann, wo die rechts dargestellte Eikörperverknüpfung die MINKOWSKIsche Linearkombination bedeutet[1]). Eine in einem Parameterintervall $\lambda \in J$ definierte einparametrige Schar $A(\lambda) \in \mathfrak{K}$ von Eikörpern einer konvexen Klasse $\mathfrak{K}$ heißt in J *konkav* bzw. *konvex*, wenn für $\xi, \eta \in J$ beliebig, stets

$$A(\alpha\xi + \beta\eta) \supset \alpha A(\xi) \times \beta A(\eta) \tag{1}$$

bzw.

$$A(\alpha\xi + \beta\eta) \subset \alpha A(\xi) \times \beta A(\eta) \tag{2}$$

ausfällt, wo $\alpha, \beta \geqq 0, \alpha + \beta = 1$ ist[2]). Eine Schar, die zugleich konkav und konvex ist heißt *linear*. Die triviale Schar $A(\lambda) = A$ ist linear.

Unsere Betrachtungen beziehen sich insbesondere auf *Kanalklassen*. Eine Kanalklasse $\mathfrak{K}$ soll die Gesamtheit aller Eikörper des Raumes umfassen, deren Normalrisse auf eine feste Ebene E^0 alle zusammenfallen. Dieser gemeinsame Normalriß ist ein $(k-1)$-dimensionaler Eikörper $P^0 \subset E^0$. Die durch den Ursprung 0 des Raumes gelegte, auf E^0 orthogonal stehende Gerade G^0 soll *Kanalachse* heißen; die durch die Punkte von P^0 gelegten, zu G^0 parallelen Geraden G, die *Kanalgeraden*, erfüllen einen konvexen Zylinder Z, den *Kanal*, der allen Eikörpern $A \in \mathfrak{K}$ umschrieben ist.

Die Kanalklasse $\mathfrak{K}$ ist eine konvexe Klasse. Bezeichnet E_i eine durch die Kanalgerade G hindurchgelegte i-dimensionale Ebene $(1 \leqq i \leqq k)$, so bilden die Durchschnitte $A \cap E_i$ $(A \in \mathfrak{K})$ eine i-dimensionale Kanalklasse $\mathfrak{K}_i$, die dem Zylinder $Z_i = Z \cap E_i$ zugeordnet ist.

Eine in einem Intervall J definierte einparametrige Schar von Eikörpern $A(\lambda) \in \mathfrak{K}$ der Kanalklasse $\mathfrak{K}$ nennen wir *Kanalschar*. Eine solche heißt *voll-*

[1]) Der Begriff wurde von BLASCHKE [2], Seite 111, eingeführt.

[2]) Der Begriff der konkaven Schar wird bei BONNESEN—FENCHEL [3], Seite 32, erörtert.

konkav bzw. *vollkonvex,* wenn für $i=1,\ldots,k$ die durch Schnittbildung $A_i(\lambda)=A(\lambda)\cap E_i$ erzeugte i-dimensionale Kanalschar für jede durch eine Kanalgerade G hindurchgelegte Ebene E_i eine konkave bzw. konvexe Schar der durch den Schnitt mit E_i aus $\mathfrak{K}$ hervorgehenden Kanalklasse $\mathfrak{K}_i$ ist. Eine Kanalklasse, die vollkonkav und zugleich vollkonvex ist, nennen wir *vollinear.* Es zeigt sich, daß es für die Kennzeichnung der Vollkonkavität genügt, die Schnittbedingung lediglich für $i=k$ zu stellen; die andern sind dann von selbst erfüllt. Für die Vollkonvexität genügt die Schnittbedingung für $i=1$; daß die andern erfüllt sind, läßt sich wieder folgern. Die triviale Kanalschar $A(\lambda)=A$ $(A\in\mathfrak{K})$ ist vollinear. — Mit einfachen Überlegungen bestätigt man, daß die beiden definierten Eigenschaften von Kanalscharen sich beim Schneiden und Projizieren im folgenden Sinn erhalten: (*a*) Ist $k\geqq 2$ und wird eine $(k-1)$-dimensionale Ebene E durch eine Kanalgerade gelegt, so ist die durch Schnittbildung aus der vollkonkaven bzw. vollkonvexen Kanalschar $A(\lambda)$ entstehende $(k-1)$-dimensionale Schar $A'(\lambda)=A(\lambda)\cap E$ wieder vollkonkav bzw. vollkonvex. (*b*) Ist wieder $k\geqq 2$ und ist E eine beliebige $(k-1)$-dimensionale Ebene im Raum, so ist die durch orthogonale Projektion der Körper der vollkonkaven bzw. vollkonvexen Kanalschar $A(\lambda)$ auf E entstehende Schar der $(k-1)$-dimensionalen Normalrisse $A'(\lambda)=A(\lambda)|E_i$ auch vollkonkav bzw. vollkonvex. Liegt E zu E^0 parallel, so ist die projizierte Schar $A'(\lambda)$ trivial.

2. Die vorstehend erörterten Begriffe erlauben es, die beiden sich auf die Minkowskischen Quermaßintegrale $W_i(A)$ beziehenden Sätze auszusprechen:

Satz I. *Ist $A(\lambda)$ eine im Intervall $\lambda\in J$ definierte vollkonkave Kanalschar, so ist das i-te Quermaßintegral $W_i[A(\lambda)]$ $(i=0,1,\ldots,k)$ eine im Intervall J konkave Funktion des Scharparameters λ.*

Satz II. *Ist $A(\lambda)$ eine im Intervall $\lambda\in J$ definierte vollkonvexe Kanalschar, so ist das i-te Quermaßintegral $W_i[A(\lambda)]$ $(i=0,1,\ldots,k)$ eine im Intervall J konvexe Funktion des Scharparameters λ.*

Beweise. Für $k=1$ sind die Aussagen trivial. Es ist $W_0(A)=a$, wo a die Länge der Strecke A bezeichnet. Die Behauptungen für $i=0$ ergeben sich mit der Bemerkung, daß $\alpha A\times\beta B$ eine Strecke der Länge $\alpha a+\beta b$ ist. Ferner ist $W_1(A)=2$ (konstant), und die Behauptungen für $i=1$ sind trivial.

Es sei jetzt $k>1$, und wir nehmen an, daß die Sätze I und II schon für alle Dimensionen bewiesen seien, die kleiner als k sind. Es liege nun eine k-dimensionale Kanalschar $A(\lambda)$ vor. Für $i=0$ gilt

$$W_0[A(\lambda)]=V[A(\lambda)]=\int s[A(\lambda)\cap G]\,dG \qquad (G\in Z).$$

Hierbei bedeutet V das Volumen, s die Länge der von einer Kanalgeraden G