Über konkave und konvexe Eikörperscharen.

Von H. HADWIGER in Bern.

1. Eine Klasse $\mathfrak{K}$ konvexer Körper (Eikörper) des k-dimensionalen euklidischen Raumes heißt *konvex*, wenn aus $A, B \in \mathfrak{K}$ auf $\alpha A \times \beta B \in \mathfrak{K}$ $(\alpha, \beta \geqq 0, \alpha + \beta = 1)$ geschlossen werden kann, wo die rechts dargestellte Eikörperverknüpfung die MINKOWSKIsche Linearkombination bedeutet [1]). Eine in einem Parameterintervall $\lambda \in J$ definierte einparametrige Schar $A(\lambda) \in \mathfrak{K}$ von Eikörpern einer konvexen Klasse $\mathfrak{K}$ heißt in J *konkav* bzw. *konvex*, wenn für $\xi, \eta \in J$ beliebig, stets

$$A(\alpha\xi + \beta\eta) \supset \alpha A(\xi) \times \beta A(\eta) \tag{1}$$

bzw.

$$A(\alpha\xi + \beta\eta) \subset \alpha A(\xi) \times \beta A(\eta) \tag{2}$$

ausfällt, wo $\alpha, \beta \geqq 0, \alpha + \beta = 1$ ist [2]). Eine Schar, die zugleich konkav und konvex ist heißt *linear*. Die triviale Schar $A(\lambda) = A$ ist linear.

Unsere Betrachtungen beziehen sich insbesondere auf *Kanalklassen*. Eine Kanalklasse $\mathfrak{K}$ soll die Gesamtheit aller Eikörper des Raumes umfassen, deren Normalrisse auf eine feste Ebene E^0 alle zusammenfallen. Dieser gemeinsame Normalriß ist ein $(k-1)$-dimensionaler Eikörper $P^0 \subset E^0$. Die durch den Ursprung 0 des Raumes gelegte, auf E^0 orthogonal stehende Gerade G^0 soll *Kanalachse* heißen; die durch die Punkte von P^0 gelegten, zu G^0 parallelen Geraden G, die *Kanalgeraden*, erfüllen einen konvexen Zylinder Z, den *Kanal*, der allen Eikörpern $A \in \mathfrak{K}$ umschrieben ist.

Die Kanalklasse $\mathfrak{K}$ ist eine konvexe Klasse. Bezeichnet E_i eine durch die Kanalgerade G hindurchgelegte i-dimensionale Ebene $(1 \leqq i \leqq k)$, so bilden die Durchschnitte $A \cap E_i$ $(A \in \mathfrak{K})$ eine i-dimensionale Kanalklasse $\mathfrak{K}_i$, die dem Zylinder $Z_i = Z \cap E_i$ zugeordnet ist.

Eine in einem Intervall J definierte einparametrige Schar von Eikörpern $A(\lambda) \in \mathfrak{K}$ der Kanalklasse $\mathfrak{K}$ nennen wir *Kanalschar*. Eine solche heißt *voll-*

[1]) Der Begriff wurde von BLASCHKE [2], Seite 111, eingeführt.

[2]) Der Begriff der konkaven Schar wird bei BONNESEN—FENCHEL [3], Seite 32, erörtert.

konkav bzw. *vollkonvex,* wenn für $i = 1, \ldots, k$ die durch Schnittbildung $A_i(\lambda) = A(\lambda) \cap E_i$ erzeugte i-dimensionale Kanalschar für jede durch eine Kanalgerade G hindurchgelegte Ebene E_i eine konkave bzw. konvexe Schar der durch den Schnitt mit E_i aus $\mathfrak{K}$ hervorgehenden Kanalklasse $\mathfrak{K}_i$ ist. Eine Kanalklasse, die vollkonkav und zugleich vollkonvex ist, nennen wir *vollinear.* Es zeigt sich, daß es für die Kennzeichnung der Vollkonkavität genügt, die Schnittbedingung lediglich für $i = k$ zu stellen; die andern sind dann von selbst erfüllt. Für die Vollkonvexität genügt die Schnittbedingung für $i = 1$; daß die andern erfüllt sind, läßt sich wieder folgern. Die triviale Kanalschar $A(\lambda) = A$ $(A \in \mathfrak{K})$ ist vollinear. — Mit einfachen Überlegungen bestätigt man, daß die beiden definierten Eigenschaften von Kanalscharen sich beim Schneiden und Projizieren im folgenden Sinn erhalten: (*a*) Ist $k \geqq 2$ und wird eine $(k-1)$-dimensionale Ebene E durch eine Kanalgerade gelegt, so ist die durch Schnittbildung aus der vollkonkaven bzw. vollkonvexen Kanalschar $A(\lambda)$ entstehende $(k-1)$-dimensionale Schar $A'(\lambda) = A(\lambda) \cap E$ wieder vollkonkav bzw. vollkonvex. (*b*) Ist wieder $k \geqq 2$ und ist E eine beliebige $(k-1)$-dimensionale Ebene im Raum, so ist die durch orthogonale Projektion der Körper der vollkonkaven bzw. vollkonvexen Kanalschar $A(\lambda)$ auf E entstehende Schar der $(k-1)$-dimensionalen Normalrisse $A'(\lambda) = A(\lambda) | E_i$ auch vollkonkav bzw. vollkonvex. Liegt E zu E^0 parallel, so ist die projizierte Schar $A'(\lambda)$ trivial.

2. Die vorstehend erörterten Begriffe erlauben es, die beiden sich auf die MINKOWSKIschen Quermaßintegrale $W_i(A)$ beziehenden Sätze auszusprechen:

Satz I. *Ist $A(\lambda)$ eine im Intervall $\lambda \in J$ definierte vollkonkave Kanalschar, so ist das i-te Quermaßintegral $W_i[A(\lambda)]$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$ eine im Intervall J konkave Funktion des Scharparameters λ.*

Satz II. *Ist $A(\lambda)$ eine im Intervall $\lambda \in J$ definierte vollkonvexe Kanalschar, so ist das i-te Quermaßintegral $W_i[A(\lambda)]$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$ eine im Intervall J konvexe Funktion des Scharparameters λ.*

BEWEISE. Für $k = 1$ sind die Aussagen trivial. Es ist $W_0(A) = a$, wo a die Länge der Strecke A bezeichnet. Die Behauptungen für $i = 0$ ergeben sich mit der Bemerkung, daß $\alpha A \times \beta B$ eine Strecke der Länge $\alpha a + \beta b$ ist. Ferner ist $W_1(A) = 2$ (konstant), und die Behauptungen für $i = 1$ sind trivial.

Es sei jetzt $k > 1$, und wir nehmen an, daß die Sätze I und II schon für alle Dimensionen bewiesen seien, die kleiner als k sind. Es liege nun eine k-dimensionale Kanalschar $A(\lambda)$ vor. Für $i = 0$ gilt

$$W_0[A(\lambda)] = V[A(\lambda)] = \int s[A(\lambda) \cap G]\, dG \qquad (G \in Z).$$

Hierbei bedeutet V das Volumen, s die Länge der von einer Kanalgeraden G

aus $A(\lambda)$ ausgeschnittenen Sehne, und dG die Translationsdichte der verschiebbaren Geraden G; die Integration erstreckt sich über alle Kanalgeraden. Die Behauptungen ergeben sich mit der Bemerkung, daß der Integrand nach Definition der Schareigenschaften bereits konkav oder konvex ist, je nachdem die Schar vollkonkav oder vollkonvex ist. Für $i=1,\ldots,k$ greifen wir auf die Integralrekursion von KUBOTA, wonach

$$W_i[A(\lambda)]=\frac{1}{k\omega_{k-1}}\int W'_{i-1}[A'(\lambda;u)]\,du \qquad (u\in\Omega)$$

ist. Hierbei bedeuten ω_{k-1} das Volumen der $(k-1)$-dimensionalen Einheitskugel, W'_{i-1} das $(i-1)$-te Quermaßintegral bezogen auf den $(k-1)$-dimensionalen Raum und $A'(\lambda;u)$ den Normalriß des Scharkörpers $A(\lambda)$ auf eine zur Raumrichtung u orthogonal stehenden Ebene E, und du die Richtungsdichte; die Integration erstreckt sich über die volle Richtungssphäre Ω. Bei fester Richtung ist nun aber $A'(\lambda;u)$ eine $(k-1)$-dimensionale Kanalschar, die ebenfalls vollkonkav oder vollkonvex ist, je nachdem die Schar $A(\lambda)$ die erste oder die zweite Eigenschaft hat. Auf Grund der induktiven Annahme ist der Integrand im ersten Fall eine konkave, im zweiten Fall eine konvexe Funktion von λ. Damit resultieren die Behauptungen, und der Beweis ist beendet.

Aus den beiden Sätzen ergibt sich noch das

Korollar III. *Ist $A(\lambda)$ eine vollineare Kanalschar, so sind die Quermaßintegrale $W_i[A(\lambda)]$ $(i=0,1,\ldots k)$ lineare Funktionen des Scharparameters λ.*

3. Aus der Vielfalt spezieller Kanalscharen, auf welche unsere beiden Sätze I und II angewandt werden können, greifen wir drei besondere heraus, die einerseits die drei erörterten Schareigenschaften illustrieren, andererseits innerhalb geläufiger Fragenkreise zu teilweise neuen Resultaten führen.

Die erste Schar, durch

$$A(\lambda)=(1-\lambda)A\times\lambda B \qquad (A,B\in\mathfrak{K}) \tag{3}$$

erklärt, stellt eine im Intervall $J(0\leqq\lambda\leqq 1)$ definierte und dort — wie man mühelos bestätigt — vollkonkave Kanalschar dar, die zwischen den beiden Eikörpern A und B einer Kanalklasse $\mathfrak{K}$ eine stetige Verbindung schafft.

Die Anwendung von Satz I ergibt die Beziehung

$$W_i(\alpha A\times\beta B)\geqq\alpha\,W_i(A)+\beta W_i(B) \qquad (\alpha,\beta\geqq 0,\ \alpha+\beta=1), \tag{4}$$

welche den Satz von FENCHEL und ALEXANDROFF für den besonderen Fall verschärft, wo die beiden beteiligten Eikörper A und B einen übereinstimmenden Normalriß aufweisen[3]) Falls $i=0$ ist, handelt es sich um die bekannte Verschärfung des BRUNN—MINKOWSKIschen Satzes[4]).

Setzt man speziell $B=\tilde{A}$, wo $\tilde{A}$ das Spiegelbild von A bezüglich der Eben E^0 bezeichnet, so stellt die Schar (3) eine kontinuierliche Interpolation der BLASCHKEschen Symmetrisierung dar[5]). Die Quermaßintegrale sind demnach konkave Funktionen des Symmetrisierungsparameters λ. Für den bezüglich E^0 symmetrischen Körper $\bar{\bar{A}}=(1/2)A\times(1/2)\tilde{A}$, der durch die Symmetrisierung aus A hervorgeht, gilt nach (4) also

$$W_i(\bar{\bar{A}}) \geqq W_i(A) \qquad (i=0, 1, \ldots k), \tag{5}$$

womit ausgesagt ist, daß die BLASCHKEsche Symmetrisierung die Quermaßintegrale nicht verkleinert[6]). Das Gleichheitszeichen gilt in (5) für alle Körper A im trivialen Fall $i=k$ und dann noch für $i=k-1$, d. h. für die Norm, die proportional der mittleren Breite ist.

Eine zweite spezielle Schar erklären wir mit

$$A(\lambda)=U[(1-\lambda)(G\cap A)\times\lambda(G\cap B)] \quad (A, B\in\mathfrak{K};\, G\in Z), \tag{6}$$

wo die Bildung der Vereinigungsmenge U sich über alle Kanalgeraden G erstrecken soll. Sie ist ebenfalls im Intervall $J(0\leqq\lambda\leqq 1)$ definiert und stellt dort — wie unmittelbar aus der Definition folgt — eine vollkonvexe Kanalschar dar, die wieder eine stetige Verbindung zwischen den beiden Eikörpern A und B einer Kanalklasse $\mathfrak{K}$ herstellt. Nach Satz II sind die Quermaßintegrale der Körper dieser Schar konvexe Funktionen von λ.

Setzt man speziell $B=\tilde{A}$, wo $\tilde{A}$ wie oben das Spiegelbild von A in bezug auf E^0 bezeichnet, so stellt die Schar (6) eine kontinuierliche Interpolation der STEINERschen Symmetrisierung dar[7]). Die Quermaßintegrale sind hier konvexe Funktionen des Symmetrisierungsparameters λ. Für den bezüglich E^0 symmetrischen Körper $\bar{A}$, der durch Symmetrisierung aus A hervorgeht, resultiert

$$W_i(\bar{A}) \leqq W_i(A) \qquad (i=0, 1, \ldots, k), \tag{7}$$

---

[3]) Die Aussage (4) ist stärker als diejenige, die aus ihr dadurch hervorgeht, daß man aus den W_i die $(k-i)$-ten Wurzeln zieht. Diese schwächere Form ihrerseits, die dann allerdings ohne Nebenbedingung gilt, ist ein Sonderfall des sich auf allgemeine Mischvolumina beziehenden im Text erwähnten Satzes. Die Beweisskizzen finden sich bei FENCHEL [4] und ALEXANDROFF [1].

[4]) Vgl. die Darstellung bei BONNESEN—FENCHEL [3], Seite 94.

[5]) Vgl. Begriff und Anwendung bei BLASCHKE [2], Seite 103.

[6]) Bei BONNESEN—FENCHEL [3], Seite 73, wird das monotone Verhalten nur für Inhalt und Oberfläche erwähnt.

[7]) Über zahlreiche Anwendungen dieser Transformation vgl. PÓLYA—SZEGŐ [5], Seite 200—204.

womit ausgesagt wird, daß die STEINERsche Symmetrisierung die Quermaßintegrale nicht vergrößert[8]). Abgesehen vom trivialen Fall $i=k$ steht das Gleichheitszeichen in (7) für alle Körper A für $i=0$, d. h. für das Volumen.

Endlich bilden wir die Schar

$$A(\lambda)=A\times\lambda S \tag{8}$$

wo S eine in der Kanalachse G^0 liegende Einheitsstrecke ist. Diese im Intervall $J(0\leqq\lambda<\infty)$ definierte Kanalschar, deren Körper durch „teleskopartiges Ausziehen" aus A hervorgehen, ist vollinear, wie man direkt aus den Defitionen ablesen kann. Nach Korollar III sind die Quermaßintegrale lineare Funktionen von λ. In der Tat gilt die bekannte Beziehung

$$W_i(A\times\lambda S)=W_i(A)+[(k-i)/k]\,W_i'(A')\lambda, \tag{9}$$

wo W' das Quermaßintegral bezogen auf den $(k-1)$-dimensionalen Raum bezeichnet und A' der Nomralriß von A in der Richtung der Kanalachse ist.

Literatur.

[1] A. ALEXANDROFF, Neue Ungleichungen für die Mischvolumen konvexer Körper, *C. R. Acad. Sci. URSS.* (*N. S.*) **14** (1937), 155—157.

[2] W. BLASCHKE, Kreis und Kugel (3. Aufl.), *Berlin*, 1956.

[3] T. BONNESEN—W. FENCHEL, Theorie der konvexen Körper, *Berlin*, 1934.

[4] W. FENCHEL, Inégalités quadratiques entre les volumes mixtes des corps convexes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **203** (1936), 647—650.

[5] G. PÓLYA—G. SZEGŐ, Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics, *Princeton*, 1951.

[6] K. VOSS, Einige differentialgeometrische Kongruenzsätze für geschlossene Flächen und Hyperflächen, *Math. Ann.* **131** (1956), 180—218.

(Eingegangen am 7. Juli 1956.)

[8]) Es scheint, daß diese an sich plausible Tatsache bisher, abgesehen von den trivialen Fällen $W_0=V$ (Inhalt) und $W_k=\omega_k$ (Konstante), nur noch für $W_1=(1/k)\,F$ ($F=$ Oberfläche) und $W_{k-1}=(1/k)\,N$ ($N=$ Norm) bewiesen worden ist. In diesen Fällen gelingt der Nachweis mit Hilfe der STEINERschen Formel für das Volumen der äußeren Parallelkörper. Für Eikörper mit regulärem Rand (im Sinne der Differentialgeometrie) folgt die Konvexität der W_i bei der kontinuierlichen Symmetrisierung auch aus allgemeineren Ergebnissen von VOSS [6], Seite 214, (Satz X), die in jüngster Zeit mit Verwendung analytischer Hilfsmittel gewonnen wurden.