Über die autoparallele Abweichung in allgemeinen metrischen Linienelementräumen.

Von ARTHUR MOÓR in Szeged.

Einleitung.

Bei den Untersuchungen über Fragen „im Großen" der Riemannschen, bzw. Finslerschen Räume, spielt die Gleichung der geodätischen Abweichung eine fundamentale Rolle. Man kann zum Beispiel mit ihrer Hilfe beweisen, daß falls der Krümmungsskalar $K(x)$ die Relation

$$K(x) \geqq \frac{1}{A^2}$$

befriedigt, die größte Entfernung zweier beliebiger Punkte des Raumes die Zahl πA nicht übertreten kann. (Vgl. [7], § 3 und [9], § 4)[1]).

Im folgenden wollen wir die Frage untersuchen, inwieweit diese Gleichung auch in denjenigen metrischen Linienelementräumen L_n bestimmbar ist, in denen die Übertragung nicht durch die CARTANschen Übertragungsparameter Γ^{*i}_{jk} und $C_j{}^i{}_k$ (vgl. [3]) bestimmt ist. Eine derartige Geometrie haben wir in unserer Arbeit [5] entwickelt. In einem Raum L_n, wo die Übertragung nicht die CARTANsche ist, sind die Extremalen und die autoparallelen Linien im allgemeinen verschieden. Verwenden wir jetzt statt der Extremalen die autoparallelen Kurven, so erhalten wir eine Gleichung die das Analogon der Gleichung der geodätischen Abweichung ist. Diese Gleichung (vgl. (3.7)) wollen wir die Gleichung der autoparallelen Abweichung nennen.

Mit Hilfe der autoparallelen Abweichung kann eine wichtige Frage der autoparallelen Kurve beantwortet werden; es kann nämlich bestimmt werden, ob die aus einem Punkt O ausgehenden autoparallelen Kurven eine Hüllkurve besitzen, oder nicht. Im Falle, in dem die autoparallelen Kurven mit den Extremalen identisch sind, geht unsere Theorie in die bekannte Theorie der geodätischen Abweichung über.

---

[1]) Siehe die Literatur am Ende unseres Artikels.

Die Theorie der autoparallelen Abweichung werden wir für den n-dimensionalen Raum entwickeln, die Anwendungen in § 4 werden wir aber nur für den zweidimensionalen Fall behandeln. Nur in dem letzten Paragraphen wollen wir kurz auch den n-dimensionalen Fall untersuchen.

Dementsprechend werden wir in § 1 die wichtigsten Formeln der Theorie der allgemeinen metrischen Linienelementräume angeben; in § 2 entwickeln wir die Theorie der m-dimensionalen Unterräume, soweit wie wir sie benötigen werden, in § 3 werden wir die Gleichung der autoparallelen Abweichung ableiten; weiter untersuchen wir in §§ 4 und 5 mit Hilfe der Gleichung der autoparallelen Abweichung die Frage der Existenz der Hüllkurve der autoparallelen Linien in einem L_2 bzw. in einem L_n. Wir wollen noch darauf hinweisen, daß die Bestimmung der autoparallelen Abweichung *einen wesentlichen, dem Krümmungsskalar entsprechenden Skalar des Raumes L_n ergibt.* (Vgl. (4. 2), (4. 3a).)

§ 1. Grundformeln der allgemeinen metrischen Linienelementräume.

Zu Grunde gelegt sei eine $(2n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit L_n von Linienelementen (x^i, v^i)[2]. Im Raume L_n sei durch einen metrischen Grundtensor $g_{ik}(x, v)$ die Metrik des Raumes festgelegt. Die Länge eines Vektors ξ^i im Linienelement (x, v) ist demnach durch die Formel

$$(1.1) \qquad \xi \overset{\text{def}}{=} \sqrt{g_{ik}(x, v)\xi^i\xi^k}$$

definiert. Die Länge einer Kurve $x^i = x^i(t)$ zwischen den Parameterwerten t_1, t_2 in L_n bezüglich des Richtungsfeldes $v^i(t)$ ist durch

$$(1.2) \qquad s_{1,2} = \int_{t_2}^{t_1} \sqrt{g_{ik}(x(t), v(t))\dot{x}^i\dot{x}^k}\,dt, \qquad \dot{x}^j = \frac{dx^j}{dt}$$

erklärt. (Vgl. [5], § 1). Im folgenden wollen wir immer annehmen, daß das Richtungsfeld $v^i(t)$ mit dem Feld der Tagentenrichtungen $\dot{x}^i(t)$ der Kurve $x^i(t)$ zusammenfällt.

Mit Hilfe des metrischen Grundtensors g_{ik} kann man im Raum L_n auch eine Fundamentalfunktion durch die Formel

$$(1.3) \qquad F(x, v) \overset{\text{def}}{=} \sqrt{g_{ik}(x, v)v^i v^k}$$

definieren. Mit Hilfe von (1.3) könnte man in unserem Raum L_n auch eine FINSLERsche Metrik definieren. Dazu müßte man nur statt des Tensors g_{ik}

[2]) Die lateinischen Indizes laufen immer von 1 bis n.

den Tensor

$$\gamma_{ik}(x, v) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial v^i \partial v^k} \tag{1.4}$$

für den metrischen Grundtensor des Raumes L_n wählen. Die durch (1.4) definierte Metrik wäre mit der von g_{ik} bestimmten Metrik nur dann identisch falls

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial v^m} v^i = 0$$

gültig wäre. (Vgl. [5], § 4). Wenn nicht nachdrücklich betont wird, werden wir aber immer die durch g_{ik} bestimmte Metrik benützen.

Die Winkelmetrik werden wir jetzt für ein L_2 anders definieren, als in unserer Arbeit [5]. Unsere folgende Definition ist die Verallgemeinerung derjenigen von H. RUND (vgl. [10], § 2).

Die CARATHÉODORYsche Indikatrix eines Linienelementraumes L_2 im Punkte $\underset{(0)}{x^i}$ hat die Gleichung

$$F(\underset{(0)}{x}, \xi) = 1,$$

wo die Funktion $F(x, v)$ durch die Formel (1.3) bestimmt ist. Die ξ^i bezeichnen die laufenden Koordinaten der Indikatrix. Wir bezeichnen ferner mit η^i und $\eta^i + d\eta^i$ noch zwei infinitesimal benachbarten Einheitsvektoren im Punkte $\underset{(0)}{x^i}$ die die Richtung ihrer Stützelemente haben. Offenbar befriedigen diese Vektoren die Gleichung der Indikatrix, da

$$F^2(\underset{(0)}{x}, \eta) \equiv g_{ik}(\underset{(0)}{x}, \eta)\eta^i \eta^k = 1$$

und analog für $(\eta^i + d\eta^i)$

$$F^2(\underset{(0)}{x}, \eta + d\eta) = 1$$

besteht; η^i und $(\eta^i + d\eta^i)$ waren nämlich nach unserer Annahme Einheitsvektoren.

Die Vektoren η^i und $(\eta^i + d\eta^i)$ bestimmen somit zwei Punkte der Indikatrix, die die Entfernung

$$d\bar{\theta} = \sqrt{g_{ik}(\underset{(0)}{x}, d\eta)\, d\eta^i d\eta^k} \tag{1.5}$$

haben. $d\bar{\theta}$ kann schon als ein Winkelmaß betrachtet werden, das durch (1.5) auch im $(2n-1)$-dimensionalen L_n definiert ist. Ist in einem L_2 die Länge der Indikatrix gleich σ, so ist

$$d\theta \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\sigma} d\bar{\theta} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{g_{ik}(\underset{(0)}{x}, d\eta) d\eta^i d\eta^k} \tag{1.6}$$

ein normiertes Winkelmaß, das dieselbe Eigenschaft hat, wie das Winkelmaß von H. RUND (vgl. [10], § 2), d. h. der Winkel von zwei entgegensetzten parallelen Richtungen ist gleich $\frac{1}{2}$. Der Unterschied besteht darin, daß in unserem L_2 der Normierungsfaktor σ vom Orte $\underset{(0)}{x^i}$ abhängig ist. σ ist nur dann von $\underset{(0)}{x^i}$ unabhängig, falls auch g_{ik} von x^i unabhängig ist.

Im folgenden brauchen wir noch die Formel des invarianten Differentials eines Vektors ξ^i. Nach der Definition (vgl. [5], Formeln (2.4) und (2.5)) ist:

$$D\xi^i \overset{\text{def}}{=} d\xi^i + L_j^{*i}{}_k \xi^j dx^k + M_j^{*i}{}_k \xi^j \omega^k(d), \tag{1.7}$$

wo $L_j^{*i}{}_k$ und $M_j^{*i}{}_k$ die Übertragungsparameter bedeuten, und

$$\omega^k(d) = Dl^k, \qquad l^k = \frac{v^k}{F(x, v)}$$

ist. Für die expliziten Formeln von $L_j^{*i}{}_k$ und $M_j^{*i}{}_k$ verweisen wir auf die Relationen (2.16) und (2.24) unserer Arbeit [5]; hier bemerken wir nur soviel, daß diese Übertragung metrisch ist, d h.

$$Dg_{ik} = 0$$

besteht. Aus dieser Bedingung ist $L_j^{*i}{}_k$ und $M_j^{*i}{}_k$ nur bis auf einen in (i, j) schiefsymmetrischen Tensor σ_{ijk} bestimmt. Z. B. wird $L_j^{*i}{}_k$ die Form:

$$L_j^{*i}{}_k = \Gamma_j^{*i}{}_k - A_j{}^i{}_r J_t^r o_o{}^t{}_k + \sigma_j{}^i{}_k, \qquad A_{jir} = \frac{1}{2} g_{ji}\|_r \tag{1.8}$$

haben (vgl. [5], Gleichung (2.24)). Die Operation $\|_r$ bedeutet die partielle Ableitung nach v^r multipliziert mit F.

Die Gleichung der autoparallelen Linien — falls für Parameter die Bogenlänge gewählt wird, und das Richtungsfeld $v^i(s)$ mit dem Feld der Tangentenvektoren $\frac{dx^i}{ds}$ zusammenfällt — ist:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + L_j^{*i}{}_k \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0 \tag{1.9}$$

(vgl. [5], Gleichung (5.5a)). Eine kurze Rechnung zeigt, daß (1.9) mit

$$\frac{\omega^i(d)}{ds} = 0 \tag{1.10}$$

äquivalent ist (vgl. [5], § 5). Wir bemerken noch, daß nach (1.2) und (1.3)

$$\frac{dx^j}{ds} = l^j\left(x, \frac{dx}{ds}\right) \tag{1.11}$$

besteht, da s die Bogenlänge bedeutet.

Der Hauptkrümmungstensor $\bar{R}_{j\ km}^{\ i}$ des Raumes ist durch die Formel

$$\bar{R}_{j\ km}^{\ i} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial L_{j\ k}^{*i}}{\partial x^m} - L_{j\ k}^{*i}\|_r L_{o\ m}^{*r} + L_{j\ k}^{*r} L_{r\ m}^{*i} - [k|m] \tag{1.12}$$

bestimmt, wo $[k|m]$ den vorangehenden Ausdruck, aber mit vertauschten Indizes (k,m) bedeutet (vgl. [5], Formel (7.7)).

§ 2. Grundzüge der Theorie der m-dimensionalen Unterräume.

In diesem Paragraphen entwickeln wir einige Fundamentalrelationen der Theorie der Unterräume, soweit wir sie im folgenden brauchen können.

Ein m-dimensionaler Unterraum U_m ist durch das Gleichungssystem

$$x^i = x^i(u^1, u^2, \dots, u^m) \tag{2.1}$$

angegeben. Die Größen

$$B_\alpha^i \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}, \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, m)^{3)}$$

bestimmen die m Tangentenvektoren der Fläche, die die Richtung der Parameterlinien haben.

Den durch das Gleichungssystem (2.1) angegebene Unterraum U_m erweitern wir zu einer $(2m-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit der Linienelemente $(u^\alpha, \dot{u}^\alpha)$, indem wir zu jedem Punkt u^α von U_m eine Richtung $\dot{u}^\alpha$ zuordnen. Wir fordern, daß die durch $\dot{u}^\alpha$ bestimmte Richtung zur m-dimensionalen Hyperfläche tagential sei. Analytisch bedeutet das im L_n für die Raumkomponenten v^i von $\dot{u}^\alpha$ das Bestehen der Relationen

$$v^i = B_\alpha^i \dot{u}^\alpha \tag{2.2}$$

(vgl. [4], Gl. (3)). Die Gleichungen (2.1) und (2.2) bestimmen somit eine Teilmannigfaltigkeit des Linienelementraumes L_n.

Die Metrik von L_n induziert nun eine Metrik in der durch (2.1) und (2.2) bestimmten Mannigfaltigkeit der Linienelemente. Der Metrische Grundtensor wird:

$$g_{\alpha\beta}(u, \dot{u}) \overset{\text{def}}{=} g_{ij}(x(u), v(u, \dot{u})) B_\alpha^i B_\beta^j, \tag{2.3}$$

wo die $x^i(u)$ und die $v^i(u, \dot{u})$ durch (2.1) und (2.2) bestimmt sind. Die griechischen Indizes bedeuten in der Gleichung (2.3), sowie auch im folgenden, daß es sich um Hyperflächentensoren handelt, während die lateinischen Indizes die im L_n-Raum angegebenen Komponenten der Tensoren bedeuten.

---

3) Die griechischen Indizes bedeuten in diesem Paragraphen immer die Zahlen $1, 2, \dots, m$.

Auf Grund von (2. 2) und (2. 3) wurde aus dem Unterraum U_m ein *metrischer Linienelementraum,* den wir mit $\bar{L}_m$ bezeichnen wollen. Mit Hilfe von $g_{\alpha\beta}$ kann man eine Übertragungstheorie der Vektoren und Tensoren im Raum $\bar{L}_m$ ebenso entwickeln, wie das im L_n-Raum in [5], § 2 durchgeführt wurde. Die Form des invarianten Differentials eines Hyperflächenvektors ξ^α wird die Form:

$$\bar{D}\xi^\alpha = d\xi^\alpha + L^{*\ \alpha}_{\varrho\ \sigma}\xi^\varrho du^\sigma + M^{*\ \alpha}_{\varrho\ \sigma}\xi^\varrho \omega^\sigma(d), \qquad \omega^\sigma \overset{\text{def}}{=} \bar{D}\frac{\dot{u}^\sigma}{F} \tag{2.4}$$

haben.[4]) Selbstverständlich sind die Übertragungsparameter $L^{*\ \beta}_{\alpha\ \gamma}$ und $M^{*\ \beta}_{\alpha\ \gamma}$ durch den metrischen Grundtensor $g_{\alpha\beta}$ von L_m nur bis auf einen in (α, β) schiefsymmetrischen Tensor $\bar{\sigma}_{\alpha\beta\gamma}$ bestimmt. Man erhält z. B. für $L^{*\ \beta}_{\alpha\ \gamma}$ analog zur Formel (1. 8):

$$L^{*\ \beta}_{\alpha\ \gamma} \overset{\text{def}}{=} \Gamma^{*\ \beta}_{\alpha\ \gamma} - A^{\ \beta}_{\alpha\ \varrho}\bar{J}^\varrho_\iota\, \bar{\sigma}^{\ \iota}_{0\ \gamma} + \bar{\sigma}^{\ \beta}_{\alpha\ \gamma}, \qquad l^\alpha = \frac{\dot{u}^\alpha}{F}, \tag{2.5}$$

wo $A_\alpha{}^\beta{}_\varrho$ ebenso aus (2. 3) abgeleitet werden kann, wie im Finslerschen Raum (vgl. [4], Gl. (9)). Es ist

$$A_{\alpha\beta\gamma} = A_{ijk}B^i_\alpha B^j_\beta B^k_\gamma.$$

Diese Relation drückt aus, daß *der innere Torsionstensor von* $\bar{L}_m$ *die Projektion von* A_{ijk} *auf* $\bar{L}_m$ *ist.*

Die Fundamentalfunktion von L_m ist nach (2. 2) und (2. 3):

$$F(u, \dot{u}) = \sqrt{g_{\alpha\beta}\,\dot{u}^\alpha\,\dot{u}^\beta} = F(x(u), v(u, \dot{u})).$$

Die autoparallelen Linien sind dadurch gekennzeichnet, daß ihr Tangentenvektor $l^\alpha = \dfrac{du^\alpha}{ds}$ längs der autoparallelen Linie parallel verschoben ist. Nach der Definitionsgleichung des invarianten Differentials folgt dann ebenso wie im n-dimensionalen Fall, daß die Differentialgleichung der autoparallelen Linien die Form

$$\frac{d^2u^\alpha}{ds^2} + L^{*\alpha}_{\varrho\ \sigma}\frac{du^\varrho}{ds}\frac{du^\sigma}{ds} = 0 \tag{2.6}$$

hat. (Vgl. [5], § 5).

Es entsteht die Frage, unter welchen Bedingungen die autoparallelen Linien von L_m auch autoparallele Linien des Raumes L_n sind? Es besteht der

Satz 1. *Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die autoparallelen Linien von* L_m *zugleich autoparallele Linien von* L_n *sind ist*

---

[4]) $L^{*\alpha}_{\varrho\ \sigma}$ und $M^{*\alpha}_{\varrho\ \sigma}$ sind in der Formel (2. 4) nicht unbedingt die Projektionen der entsprechenden Größen von L_n auf L_m.

das Bestehen der Relationen:

$$B^i_\tau L^{*\tau}_{\varrho\,\sigma}\left(u, \frac{du}{ds}\right)\frac{du^\varrho}{ds}\frac{du^\sigma}{ds} = \left[\frac{\partial B^i_\varrho}{\partial u^\sigma} + L^{*i}_{j\,k}\left(x^l(u), B^l_\tau \frac{du^\tau}{ds}\right)B^j_\varrho B^k_\sigma\right]\frac{du^\varrho}{ds}\frac{du^\sigma}{ds}. \tag{2.7}$$

BEWEIS: Betrachten wir eine Kurve C mit den Gleichungen:

$$x^i = x^i(u^\varrho(s)) \tag{2.8}$$

von $\bar{L}_m$ und nehmen wir an, daß für C sowohl (2.6), wie (2.7) erfüllt sind. Nach (2.6) ist also C eine autoparallele Kurve von $\bar{L}_m$. Berechnen wir jetzt $\frac{d^2x^i}{ds^2}$. Nach der Gleichung (2.8) wird:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = \frac{\partial B^i_\varrho}{\partial u^\sigma}\frac{du^\varrho}{ds}\frac{du^\sigma}{ds} + B^i_\varrho \frac{d^2u^\varrho}{ds^2}. \tag{2.9}$$

Substituieren wir jetzt in diese Gleichung den Ausdruck $\frac{d^2u^\varrho}{ds^2}$ von (2.6), beachten wir dann die Relationen (2.7), so wird man in Hinsicht auf

$$\frac{dx^i}{ds} = B^i_\varrho \frac{du^\varrho}{ds}$$

aus (2.9) eben die Gleichung (1.9) bekommen, und das bedeutet, daß C eine autoparallele Linie von L_n ist.

Die Bedingung (2.7) ist also hinreichend. Ihre Notwendigkeit folgt unmittelbar aus (2.9) und (1.9). Sind nämlich die Bedingungen (2.7) nicht gültig, so können die Gleichungen (2.6), (2.9) und (1.9) nicht gleichzeitig bestehen, woraus die Notwendigkeit von (2.7) folgt.

Wir benötigen in folgenden noch eine Formel, die für den Finslerschen Raum von H. RUND abgeleitet wurde (vgl. [8], Gl. (3.16)). Wir können diese Formel in unserem L_n-Raum auf folgender Weise formulieren:

Satz 2. *Besteht in einem Unterraum $\bar{L}_m$ der durch* (2.1) *und* (2.2) *bestimmt ist, die Relation* (2.7), *und ist ξ^ϱ ein Vektor im $\bar{L}_m$, der längs einer autoparallelen Kurve C definiert ist und der die Richtung von C hat, dann bestehen längs C die Relationen:*

$$g_{ij}B^j_\varrho D\xi^i = \gamma_{\varrho\tau}\bar{D}\xi^\tau, \tag{2.10}$$

wo $\xi^i = B^i_\tau \xi^\tau$ bedeutet.

BEWEIS: Da die Kurve C auf Grund des Satzes 1. sowohl für $\bar{L}_m$, wie für L_n eine autoparallele Linie ist, wird längs C:

$$\omega^i(d) = 0, \qquad \omega^\varrho(d) = 0$$

bestehen. Nach (1. 7) wird dann:

$$g_{ij} B^j_\varrho \frac{D\xi^i}{ds} = g_{is} B^s_\varrho \left(\frac{d(B^i_\tau \xi^\tau)}{ds} + L^{*\,i}_{j\,k} B^j_\tau \xi^\tau B^k_\sigma \frac{du^\sigma}{ds} \right).$$

Beachten wir jetzt, daß nach unserer Annahme

$$\xi^\varrho = \xi \frac{du^\varrho}{ds} \tag{2. 11}$$

ist, so bekommt man

$$g_{ij} B^j_\varrho \frac{D\xi^i}{ds} = g_{is} B^s_\varrho \left[B^i_\tau \frac{d\xi^\tau}{ds} + \xi \left(\frac{\partial B^i_\sigma}{\partial u^\tau} + L^{*i}_{j\,k} B^j_\tau B^k_\sigma \right) \frac{du^\sigma}{ds} \frac{du^\tau}{ds} \right].$$

Nach den Gleichungen (2. 7) und (2. 11) ergibt diese Relation eben die Formel (2. 10), w. z. b. w.

Die Annahme (2. 11) kann man unter gewissen Bedingungen fallen lassen. Es besteht der

Satz 3. *Besteht im Satz 2. statt der Bedingungsgleichung* (2. 7) *die stärkere Bedingung:*

$$B^i_\tau L^{*\tau}_{\varrho\;\sigma} \frac{du^\sigma}{ds} = \left[\frac{\partial B^i_\varrho}{du^\sigma} + L^{*i}_{j\;k} \left(x^l(u), B^l_\tau \frac{du^\tau}{ds} \right) B^j_\varrho B^k_\sigma \right] \frac{du^\sigma}{ds}, \tag{2. 12}$$

so kann ξ^ϱ *im Satz 2. ein beliebiger Flächenvektor sein.*

Beweis: Da ξ^ϱ ein Flächenvektor ist, hat man für die Raumkomponenten ξ^i die Relationen: $\xi^i = B^i_\varrho \xi^\varrho$. Besteht nun Gleichung (2. 12) so besteht offenbar auch (2. 7), somit ist eine autoparallele Linie von $\bar{L}_m$ auch eine solche von L_n. Somit wird:

$$g_{ij} B^j_\varrho \frac{D\xi^i}{ds} = g_{is} B^s_\varrho \left[B^i_\tau \frac{d\xi^\tau}{ds} + \left(\frac{\partial B^i_\tau}{\partial u^\sigma} + L^{*i}_{j\,k} B^j_\tau B^k_\sigma \right) \xi^\tau \frac{du^\sigma}{ds} \right].$$

Beachten wir jetzt (2. 12), so erhält man aus dieser Gleichung im Hinblick auf (2. 4) wegen $\omega^\sigma = 0$ eben die Relation (2. 10) w. z. b. w.

Wir bemerken noch, daß die Relationen (2. 7) und (2. 12) im wesentlichen für die in den Formeln (1. 8) und (2. 5) vorkommenden Tensoren σ_{ijk} und $\bar{\sigma}_{\alpha\beta\gamma}$ gewisse einschränkende Bedingungen bedeuten. Man kann leicht verifizieren, daß $\bar{\sigma}_{\alpha\beta\gamma}$ und σ_{ijk} im allgemeinen so gewählt werden können, daß (2. 7), oder möglicherweise auch (2. 12) erfüllt seien, da σ_{ijk} und $\bar{\sigma}_{\alpha\beta\gamma}$ zusammen mehr Komponenten haben, als die Zahl der Bedingungen nötig macht.

§ 3. Ableitung der Gleichung der autoparallelen Abweichung.

Betrachten wir die durch einen Punkt O hindurchgehende Schar der autoparallelen Linien. Es soll C und $\bar{C}$ zwei unendlich benachbarte Kurven dieser Schar bedeuten. Die Gleichung von C, bzw. $\bar{C}$ ist

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+L^{*i}_{j\,k}(x,x')\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0, \tag{3. 1a}$$

$$\frac{d^2\psi^i}{d\sigma^2}+L^{*i}_{j\,k}(\psi,\psi')\frac{d\psi^j}{d\sigma}\frac{d\psi^k}{d\sigma}=0, \tag{3. 1b}$$

wo der Parameter s, bzw. σ die Bogenlänge auf der entsprechenden Kurve (gerechnet vom Punkte O) bezeichnet.

Zwischen den Punkten der Kurven C bzw. $\bar{C}$ soll die Gleichung:

$$\psi^i(\sigma)=x^i(s)+\xi^i(s),\qquad \xi^i(0)=0 \tag{3. 2}$$

bestehen, wo $\xi^i(s)$ einen infinitesimalen Vektor bedeutet und der Zusammenhang zwischen s und σ weiter unten angegeben wird. Ebenso wie im Finslerschen Raum (vgl. [9], § 2) wollen wir noch von dem Vektor $\xi^i(s)$ annehmen, daß die erste Ableitung seiner Länge nach s auch infinitesimal sei, und daß sowohl die Länge von ξ^i, wie die seiner ersten Ableitung dieselbe Größenordnung habe, wie der Winkel $d\bar{\theta}$ zwischen C und $\bar{C}$. Die Parameterwerte s und σ sollen die Relation

$$\frac{d\sigma}{ds}=1+\lambda(s) \tag{3. 3}$$

befriedigen, wo $\lambda(s)$ die Größenordnung von $d\theta$ hat. Im Falle, in dem die einander entsprechenden Punkte von C und $\bar{C}$ gerechnet vom Punkte O gleiche Bogenlängen bestimmen, ist $\lambda(s)\equiv 0$, und $\sigma=s$. Man hat offenbar immer

$$\xi^i(0)=0,\qquad \lambda(0)=0,$$

da die Bogenlänge vom Punkte O gerechnet wurde. Es wird sich herausstellen (Gleichung (3. 8)), daß durch unsere Forderungen eine eindeutige Zuordnung zwischen den Punkten beider Kurven hergestellt ist.

Nun werden wir die Größen von (3. 1b) mit Hilfe von (3. 2) durch $x^i(s)$ und $\xi^i(s)$ ausdrücken. Die Glieder, die in ξ^i bzw. λ eine größere Ordnung besitzen, werden wir immer vernachlässigen. Somit bekommen wir aus der Gleichung (3. 2) im Hinblick auf (3. 3):

$$\frac{d\psi^i}{d\sigma}=\left(\frac{dx^i}{ds}+\frac{d\xi^i}{ds}\right)(1-\lambda(s)).$$

Bestimmt man jetzt $\dfrac{d\xi^i}{ds}$ auf Grund von (1. 7) durch $\dfrac{D\xi^i}{ds}$, beachtet man dann, daß (1. 10) gültig ist, da C eine autoparallele Linie ist, so wird:

$$\frac{d\psi^i}{d\sigma}=\frac{dx^i}{ds}(1-\lambda(s))+\frac{D\xi^i}{ds}-L^{*i}_{j\,k}\xi^j\frac{dx^k}{ds}, \tag{3. 4}$$

wo die einzelnen Größen längs C gebildet sind.

Differenzieren wir jetzt (3. 4) nach σ, so wird wieder im Hinblick auf (3. 3), (1. 7) und (1. 10):

$$\frac{d^2\psi^i}{d\sigma^2}=\Bigg[\frac{d^2x^i}{ds^2}(1-\lambda)-\lambda'\frac{dx^i}{ds}+\frac{D^2\xi^i}{ds^2}-2L^{*i}_{j\,k}\frac{D\xi^j}{ds}\cdot\frac{dx^k}{ds}+$$

$$+L^{*i}_{j\,k}L^{*j}_{p\,q}\xi^p\frac{dx^k}{ds}\cdot\frac{dx^q}{ds}-L^{*i}_{j\,k}\xi^j\frac{d^2x^k}{ds^2}-\frac{\partial L^{*i}_{j\,k}}{\partial x^p}\xi^j\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^p}{ds}-\frac{\partial L^{*i}_{j\,k}}{\partial v^t}\xi^j\frac{dx^k}{ds}\frac{dv^t}{ds}\Bigg](1-\lambda).$$

Beachten wir jetzt, daß $\dfrac{dv^t}{ds}=\dfrac{d^2x^t}{ds^2}$ [5]) ist, längs C die Gleichung (3. 1a) besteht, weiter $l^i=\dfrac{dx^i}{ds}$, und $\lambda(s)$ infinitesimal ist, so wird:

$$\frac{d^2\psi^i}{d\sigma^2}=\frac{d^2x^i}{ds^2}(1-2\lambda)-\lambda'\frac{dx^i}{ds}+\frac{D^2\xi^i}{ds^2}-2L^{*i}_{j\,o}\frac{D\xi^j}{ds}- \tag{3. 5}$$

$$-\left(\frac{\partial L^{*i}_{j\,k}}{\partial x^m}-L^{*i}_{j\,k}\|_t L^{*t}_{o\,m}-L^{*i}_{j\,t}L^{*t}_{k\,m}-L^{*i}_{t\,k}L^{*t}_{j\,m}\right)\xi^j l^k l^m.$$

Endlich bekommt man nach (3. 2) und (1. 7) wegen (1. 10):

$$L^{*i}_{j\,k}(\psi,\psi')=L^{*i}_{j\,k}(x,x')+\frac{\partial L^{*i}_{j\,k}}{\partial x^m}\xi^m-L^{*i}_{j\,k}\|_t L^{*t}_{p\,o}\xi^p+L^{*i}_{j\,k}\|_t\frac{D\xi^t}{ds}. \tag{3. 6}$$

Nun müssen wir die entsprechenden Größen aus den Gleichungen (3. 4), (3. 5) und (3. 6) in die Gleichung (3. 1b) einsetzen, und dann (3. 1a) beachten; auf diese Weise bekommt man schon eine Gleichung die die autoparallele Abweichung bestimmt, doch wollen wir diese Gleichung noch etwas umformen. Setzen wir nämlich

$$L^{*i}_{j\,k}=L^{*i}_{k\,j}+2\Omega^{*i}_{j\,k},$$

wo $\Omega^{*i}_{j\,k}$ den schiefsymmetrischen Teil von $L^{*i}_{j\,k}$ bedeutet, so wird bei Beachtung der Formel der kovarianten Ableitung (vgl. [5], Gl. (2. 8)):

$$\frac{D^2\xi^i}{ds^2}-\lambda'\frac{dx^i}{ds}+2\Omega^{*i}_{o\,k}\frac{D\xi^k}{ds}+L^{*i}_{j\,k}\|_t l^j l^k\frac{D\xi^t}{ds}+ \tag{3. 7}$$

$$+(2L^{*i}_{j\,k}\|_t l^j l^k\Omega^{*t}_{o\,m}+\bar{R}_{o\,om}^{\,i}+2\Omega^{*i}_{o\,m}|_o)\xi^m=0;$$

dabei haben wir noch $l^k|_i=0$ benützt (vgl. [5], Gl. (2. 28)).

---

[5]) Im § 1. haben wir vorausgesetzt, daß das Richtungsfeld $v^i(s)$ mit dem Feld der Tangentenvektoren $x'^i(s)$ zusammenfällt.

Die Formel (3. 7) *ist die Gleichung der autoparallelen Abweichung in ihrer allgemeinsten Form.*

Bevor die Gleichung (3. 7) auf eine skalare Form gebracht wird, werden wir vorher $\lambda(s)$ berechnen. Da σ auf $\bar{C}$ die Bogenlänge ist, besteht offenbar

$$g_{ik}\left(\psi, \frac{d\psi}{d\sigma}\right)\frac{d\psi^i}{d\sigma}\frac{d\psi^k}{d\sigma} = 1.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2$ und beachtet man (3. 2), so wird:

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = \left(g_{ik}(x, x') + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\xi^j + g_{ik}\|_j \frac{d\xi^j}{ds}\right)\left(\frac{dx^i}{ds} + \frac{d\xi^i}{ds}\right)\left(\frac{dx^k}{ds} + \frac{d\xi^k}{ds}\right).$$

Auf Grund von (3. 3) wird nach Vernachlässigung der höheren Potenzen von λ und ξ^i in Hinsicht auf

$$g_{ik}(x, x')x'^i x'^k = 1,$$

für $\lambda(s)$ die Formel

$$\lambda(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\xi^j + g_{ik}\|_j \xi'^j\right)x'^i x'^k + g_{ik}x'^i \xi'^k,$$

bestehen, wo der Strich die Ableitung nach der Bogenlänge s bedeutet. Diese Formel kann nach (1. 7) unter Beachtung von $\omega^k = 0$ und $x'^i = l^i$ in der Form

$$\lambda(s) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\xi^j l^i l^k + (l_k + A_{ook})\left(\frac{D\xi^k}{ds} - L^{*k}_{j\ o}\xi^j\right) \tag{3. 8}$$

geschrieben werden. Nach der Formel (2. 18) von [5] ist:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} l^i l^k = \Gamma^*_{joo} + A_{oor}\Gamma^{*r}_{o\ j}.$$

Setzt man diese Formel und $L^{*k}_{j\ o}$ aus der Gleichung (1. 8) in (3. 8), so wird wegen der Symmetrie von $\Gamma^{*k}_{j\ m}$ in j, m:

$$\lambda(s) = (l_k + A_{ook})\left(\frac{D\xi^k}{ds} + A_j{}^k{}_p J^p_t \sigma_o{}^t{}_o \xi^j - \sigma_j{}^k{}_o \xi^j\right). \tag{3. 9}$$

Jetzt können wir weiter fast ganz analog dem Finslerschen Falle verfahren (vgl. [9], §§ 3, 4), denn die Formel (3. 9) zeigt zwar, daß in unserem Raum $\lambda(s) \equiv 0$ nicht mit $l_k D\xi^k = 0$ äquivalent ist, doch bedeutet das für das Folgende keine wesentliche Schwierigkeit. Wir bestimmen aber ξ^i auf die Weise daß

$$l_i \xi^i \equiv g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\xi^k = 0 \tag{3. 10a}$$

bestehe, d. h. ξ^i soll zu der Kurve C orthogonal sein. Differenzieren wir (3. 10a) nach s, so wird längs C wegen (1. 10):

(3. 10b)
$$l_i \frac{D\xi^i}{ds} = 0$$

bestehen. Nach (3. 9) wird jetzt offenbar $\lambda(s) \neq 0$ bestehen, doch hat das augenblicklich keine wesentliche Bedeutung.

Ebenso wie H. RUND im Finslerschen Raum (vgl. [9]) verfuhr, setzen wir

(3. 11)
$$\xi^i = \xi X^i, \qquad \xi = \sqrt{g_{ik}\xi^i\xi^k},$$

wo X^i den Einheitsvektor in der Richtung von ξ^i bedeutet. Wenden wir auf (3. 11) die Operation $\dfrac{D}{ds}$ an, so wird:

(3. 12)
$$\frac{D\xi^i}{ds} = \xi \frac{DX^i}{ds} + \frac{\xi^i}{\xi}\frac{d\xi}{ds},$$

da das invariante Differential angewandt auf einen Skalar, eben das gewöhnliche Differential ergibt. Überschiebt man (3. 12) mit l_i, so wird im Hinblick auf (3. 10a) und (3. 10b)

(3. 13)
$$l_i \frac{DX^i}{ds} = 0.$$

Betrachten wir jetzt die vom Punkte O ausgehenden autoparallelen Kurven C und $\bar{C}$. Sie bestimmen einen autoparallelen Unterraum $\bar{L}_2$ der dadurch charakterisiert ist, daß die autoparallelen Kurven von $\bar{L}_2$, die durch den Punkt O gehen, auch bezüglich des Raumes L_n autoparallel sind. Wir nehmen an, daß in $\bar{L}_2$ längs der durch O gehenden autoparallelen Linien (2. 12) besteht. Bezeichnen wir die Komponenten von l^i bzw. X^i in bezeug auf $\bar{L}_2$ mit l^α bzw. X^α, so bekommt man aus (2. 10) nach einer Überschiebung mit l^ϱ auf Grund von (3. 13)

(3. 14)
$$l_\varrho \frac{\bar{D}X^\varrho}{ds} = 0,$$

denn $l^i = \dfrac{dx^i}{ds}$ bezeichnet den Tangentenvektor von C; somit ist l^i ein Flächenvektor von $\bar{L}_2$, d. h. es besteht die Relation $l^i = B^i_\varrho l^\varrho$.

Aus der Gleichung (3. 14) kann man ebenso wie im Finslerschen Raum auf die Gültigkeit von

(3. 15)
$$\frac{\bar{D}X^\varrho}{ds} = 0$$

folgern (vgl. [9], § 4). Die Möglichkeit dazu sichert die in § 1. eingeführte Winkelmetrik von L_n.

Bemerkung: Im Finslerschen Raum (vgl. [9]) sind die autoparallelen Linien mit den Extremalen des Raumes identisch. Eine Extremale von L_n ist aber offenbar gleichzeitig eine Extremale von $\bar{L}_2$, falls sie in $\bar{L}_2$ liegt. In unserem Raum L_n ist das aber nach Satz 1. nur unter gewissen Bedingungen richtig. Dafür wäre schon die Bedingung (2. 7) hinreichend, doch müssen wir, um die Sätze 2. und 3. anwenden zu können, die stärkere Bedingung (2. 12) voraussetzen die letztenfalls, wie schon bemerkt, eine Beschränkung für σ_{ijk} und $\bar{\sigma}_{\alpha\beta\gamma}$ bedeuten.

Ist der Raum L_n zweidimensional, dann ist offenbar L_2 mit $\bar{L}_2$ identisch somit vereinfacht sich auf Grund von (3. 15) die Formel (3. 12). Differenzieren wir jetzt diese Gleichung nach s, wir bilden selbstverständlich das invariante Differential auf beide Seiten von (3. 12), so wird in Hinsicht auf (3. 11) und (3. 15):

$$X^i \frac{d^2\xi}{ds^2} - \frac{D^2\xi^i}{ds^2} = 0.$$

Substituieren wir jetzt in diese Gleichung die Formel von $\frac{D^2\xi^i}{ds^2}$ aus der Gleichung (3. 7), und überschieben wir dann die erhaltene Relation mit X_i, so wird in Hinsicht auf (3. 10a), (3. 11) und (3. 15):

$$\frac{d^2\xi}{ds^2} + \Gamma^*(x, x', X)\frac{d\xi}{ds} + R^*(x, x', X)\xi = 0, \tag{3. 16}$$

wo die Invarianten R^* und Γ^* durch die Formeln

$$R^*(x, x', X) \overset{\text{def}}{=} (\bar{R}_{oioj} + 2\Omega^*_{oij}|_o) X^i X^j + 2 L^{*i}_{j\ k}\|_t \Omega^{*t}_{o\ r} l^j l^k X_i X^r \tag{3. 16a}$$

$$\Gamma^*(x, x', X) \overset{\text{def}}{=} L^{*i}_{j\ k}\|_t l^j l^k X_i X^t + 2\Omega^*_{oik} X^i X^k \tag{3. 16b}$$

bestimmt sind Die Gleichung (3. 16) ist die gesuchte invariante Form der Gleichung der autoparalielen Abweichung.

Im zweidimensionalen Raum kann X^i wegen (3. 10a) durch l^i, abgesehen von dem Vorzeichen, eindeutig bestimmt werden (vgl. [1], § 4). Aus (3. 16a) und (3. 16b) folgt aber dann, daß R^* und Γ^* allein von (x, x') abhängig sind.

§ 4. Über die Hüllkurve der autoparallelen Linien.

Wir werden in diesem Paragraphen ein Kriterium angeben für das Vorhandensein einer Hüllkurve der Schar, der durch den Punkt O hindurchgehenden autoparallelen Linien. Wir nehmen an, daß der Raum ein L_2-Raum ist. Diese Untersuchungen über die Existenz einer Hüllkurve wollen wir mittels der Gleichung (3. 16) duchführen. In einem Riemannschen, oder in einem Finslerschen Raum ist diese Gleichung die JACOBIsche Gleichung des durch (1. 2) bestimmten Variationsproblems. Das Vorhandensein einer Hüllkurve der autoparallelen Linien, die in diesen Räumen eben die Extremalen sind, bedeutet, daß der Raum endlich ist, d. h. die Entfernung von zwei Punkten kann nicht unendlich groß werden (vgl. [2], § 100, und [9], § 4). Dabei kann diese Hüllkurve möglicherweise in einen Punkt entarten, wenn nämlich die aus O ausgehenden Extremalen in einem anderen Punkte einander schneiden. Im Falle der autoparallelen Linien kann man aus dem Vorhandensein der Hüllkurve noch nicht folgern, daß der Raum L_2 endlich ist, denn die Differentialgleichung (3. 16) hat mit der Variationsrechnung nichts zu tun, doch bestimmt die Existenz der Hüllkurve der autoparallelen Linien eine charakteristische Eigenschaft des Raumes.

Vorher ändern wir die Gleichung (3. 16) etwas ab. Nach der Transformation

$$\xi(s) = e^{-\frac{1}{2}\int \Gamma^* ds}\,\eta(s) \tag{4. 1}$$

bekommt man aus (3. 16):

$$\frac{d^2\eta}{ds^2} + \left(R^* - \frac{1}{2}\frac{d\Gamma^*}{ds} - \frac{1}{4}\Gamma^{*2}\right)\eta = 0. \tag{4. 2}$$

Die einzelnen Funktionen in (4. 2) sollen selbstverständlich alle längs der autoparallelen Kurve C gebildet werden.

Wir beweisen den folgenden

Satz 4. *Besteht für den Skalar*

$$K\left(x, \frac{dx}{ds}\right) \stackrel{\text{def}}{=} R^* - \frac{1}{2}\frac{d\Gamma^*}{ds} - \frac{1}{4}\Gamma^{*2} \tag{4. 3a}$$

längs jeder autoparallelen Linie die Ungleichung:

$$K\left(x, \frac{dx}{ds}\right) > \frac{1}{A^2}, \qquad A = \text{konst.} > 0, \tag{4. 3b}$$

so haben die durch den Punkte O gehenden autoparallelen Linien eine Hüllkurve.[6])

BEWEIS: Betrachten wir die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\eta^*}{ds^2} + \frac{1}{A^2}\eta^* = 0. \tag{4. 4}$$

[6]) Der Skalar K ist nach (4. 2) und (4. 3a) die Verallgemeinerung der Finslerschen inneren Krümmung des L_2. Vgl. [12], § 3, insb. Gleichungen (21) und (22).

Die Lösung dieser Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $\eta^*(0)=0$, hat die Form:

$$\eta^*(s) = a \sin \frac{1}{A} s, \qquad a = \text{konst.}$$

Die nächste Nullstelle von $\eta^*(s)$ liegt somit bei dem Parameterwert $s=\pi A$.

Nun stimmen die Nullstellen von $\xi(s)$ und $\eta(s)$ auf Grund der Formel (4. 1) überein. Wegen der geometrischen Bedeutung von $\xi(s)$ (vgl. § 3, insb. Gl. (3. 2)) ist aber $\xi(0)=0$, somit wird auch $\eta(0)=0$ bestehen. Vergleichen wir jetzt die Gleichungen (4. 2) und (4. 4), so folgt nach dem Sturmschen Satz über die Nullstellen von $\eta(s)$ und $\eta^*(s)$ auf Grund von (4. 3a) und (4. 3b) (vgl. etwa [6]), daß $\eta(s)$ für einen Parameterwert $s_0 < \pi A$ eine Nullstelle haben wird.

Aus $\eta(s_0)=0$ folgt aber nach (4. 1) auch $\xi(s_0)=0$, und das bedeutet, falls die Metrik positiv definit ist, was wir annehmen wollen, daß $\xi^i(s_0)=0$ ist und nach (3. 2) folgt dann, daß C und $\bar{C}$ den Punkt $x^i(s_0)$ gemeinsam haben. Nach (3. 11) ist nämlich ξ eben die Länge des Vektors ξ^i.

Nach der bekannten Theorie der Hüllkurven liegt aber $x^i(s_0)$ auf der Hüllkurve der Schar der durch den Punkt O gehenden autoparallelen Linien, w.z.b.w.

Der Punkt $x^i(s_0)$ ist der konjugierte Punkt von $x^i(0)$. Die Variationsrechnung benützt eben diesem Umstand, denn falls C eine Extremale ist, bedeutet schon die Existenz eines konjugierten Punktes, daß die Bogenlänge der Kurve C nicht beliebig groß sein kann (vgl. [7], § 3). Auf Grund des Satzes 4. ist der Skalar K eine charakteristische Invariante des Raumes L_2.

§ 5. Bemerkungen über den n-dimensionalen Fall.

Im n-dimensionalen Riemannschen Raum konnte S. Byron Myers mit Hilfe des Analogons der Gleichung (3. 7) für die konjugierten Punkte der Differentialgleichung der geodätischen Abweichung eine Abschätzung angeben, und damit konnte er für den Durchmesser des Raumes eine obere Schranke bestimmen. Seine Methode beruhte darauf, daß im Riemannschen Raum in einem geeigneten Koordinatensystem längs einer Extremale

$$(5.1) \qquad g_{ij} = \delta_{ij}, \qquad \Gamma_{j\,k}^{\,i} = 0$$

erreicht werden kann; somit bekommt man $D\xi^i = d\xi^i$, und auf die Gleichung der autoparallelen Abweichung kann man unmittelbar den von M. Morse verallgemeinerten Sturmschen Satz anwenden (vgl. [7], § 3 und [6], § 11).

In unserem Raum kann diese Methode nicht angewandt werden, da im allgemeinen die Relationen (5. 1) nicht erreicht werden können, und die

Gleichung (3. 7) der autoparallelen Abweichung mit der Methode von MYERS nicht auf eine skalare Form gebracht werden kann. In gewissen speziellen Fällen kann man aber auch aus (3. 7) die Existenz der zu dem Punkte O konjugierten Punkte beweisen.

Wir wollen das für drei Fälle zeigen:

1) Der Vektor ξ^i soll längs C in einer Form $\xi^i = \xi X^i$ darstellbar sein, wo X^i längs C die Relation $DX^i = 0$ befriedigt. Dann bekommt man aus (3. 7) nach einer Überschiebung mit X_i eine Gleichung die die Form (3. 16) hat. Wenn $X_i \dfrac{dx^i}{ds} \neq 0$, dann muß noch $\lambda'(s)$ aus (3. 9) berechnet werden. Offenbar werden aber jetzt die Koeffizienten von $\dfrac{d\xi}{ds}$ und ξ andere Werte haben, als in der Gleichung (3. 16). Jetzt kann man aber weiter ebenso verfahren, wie in § 4.

2) Liegen je zwei der durch O gehenden autoparallelen Linien in einem autoparallelen Raum $\bar{L}_2$, d. h. die autoparallelen Linien von $\bar{L}_2^*$ sind auch bezüglich des Raumes L_n autoparallel, so kann immer entschieden werden, ob zwei benachbarte autoparallele Linien einander schneiden oder nicht. Man kann nämlich in diesem Falle die Rechnungen nach unserer Annahme in einem $\bar{L}_2^*$-Raum erledigen ebenso, wie in § 4. Somit könnte man die Existenz der Hüllkurve mindestens in den autoparallelen $\bar{L}_2^*$ bestimmen. Ein Nachteil dieser Methode ist, daß statt der Krümmungsgrößen von L_n die von $\bar{L}_2^*$ bestimmt werden müssen.

Im Finslerschen Raum vereinigte H. RUND die Methode 1) und 2). Er bestimmte den Vektor ξ^i in der Form $\xi^i = \xi X^i$, und dann führte er die Rechnungen in einem geodätischen Unterraum U_2 weiter (vgl. [11]). Der geodätische Unterraum U_2 im Finslerschen Fall entspricht dem autoparallelen Unterraum $\bar{L}_2^*$. Diese Methode könnten wir auch anwenden, doch müßten wir vorher die Theorie der Unterräume von L_n in größerem Maße entwickeln, als das in § 2. durchgeführt wurde. Wenn im Raume L_n die oben erwähnten autoparallele Unterräume $\bar{L}_2^*$ existieren, dann könnte man H. RUNDS Methode auch in den L_n-Raum übertragen. Dies wird aber nicht immer möglich sein, da die autoparallelen Kurven von L_n — wie wir es schon bemerkt haben, — nicht immer autoparallele Kurven von $\bar{L}_2$ sind.

3) Berechnen wir das erste und zweite invariante Differential von ξ^i mittels (1. 7) unter Beachtung von $\omega^k(d) = 0$ und wählen wir noch $\lambda(s) = 0$, d. h. $\sigma = s$ (vgl. Gl. (3. 3)), so erhält man endlich aus (3. 7) eine Gleichung

von der Form:

$$\frac{d^2\xi^i}{ds^2}+p^i_j(s)\frac{d\xi^j}{ds}+q^i_j(s)\xi^j=0; \tag{4.2}$$

p^i_j, q^i_j sind hier im allgemeinen keine Tensoren. Diese Gleichung hat die Form (2. 1) von [6]. Nach gewissen Transformationen kann man entscheiden, ob konjugierte Punkte existieren oder nicht, wenn nämlich (4. 2) noch selbstadjungiert ist. Diese Untersuchungen wären dann zweckmäßig, wenn die autoparallele Linie C zugleich eine Extremale wäre. (Für die Bedingung dafür vgl. [5], Theorem A in § 5.) Dann könnte man auch, mindestens längs C den Durchmesser des Raumes L_n abschätzen.

Literatur.

[1] L. Berwald, On Finsler and Cartan geometries III, *Annals of Math.* **42** (1941), 84—112.

[2] W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie I. (dritte erweiterte Auflage), *Berlin*, 1930.

[3] E. Cartan, Les espaces de Finsler, *Actualités Sci. Industr.* **79**, Paris, 1934.

[4] E. T. Davies, Subspaces of a Finsler space, *Proc. London Math. Soc.* (2) **49** (1947), 19—39.

[5] Arthur Moór, Entwicklung einer geometrie der allgemeinen metrischen Linienelementräume, *Acta Sci. Math. Szeged* **17** (1956), 85—120.

[6] Marston Morse, A generalisation of the Sturm separation and comparison theorems in n-space, *Math. Annalen* **103** (1930), 52—69.

[7] Sumner Byron Myers, Riemannian manifolds in the large, *Duke Math. J.* **1** (1935), 39—49.

[8] Hanno Rund, The theory of subspaces of a Finsler space I., *Math. Z.* **56** (1952), 363—375.

[9] Hanno Rund, Eine Krümmungstheorie der Finslerschen Räume. *Math. Annalen* **125** (1952), 1—18.

[10] Hanno Rund, Zur Begründung der Differentialgeometrie der Minkowskischen Räume, *Archiv der Math.* **3** (1952), 60—69.

[11] Hanno Rund, The scalar form of Jacobi's equations in the calculus of variations, *Ann. Mat. Pura Appl.* **35** (1953), 183—202.

[12] O. Varga, Über das Krümmungsmaß in Finslerschen Räumen. *Publ. Math. Debrecen* **1** (1949), 116—122.

(Eingegangen am 30. Juli 1956.)