Eine Bemerkung über das Dreiecksnetz der hyperbolischen Ebene.

Von FRANZ KÁRTESZI in Budapest.

Wir betrachten ein elementares Dreieck im regulären Dreiecksgitter der euklidischen Ebene, Π_0 in der Figur 1. Dieses Dreieck wird nun von konzentrischen aus Elementardreiecken bestehenden Gürteln umgeben, wie die Figur 1 zeigt.

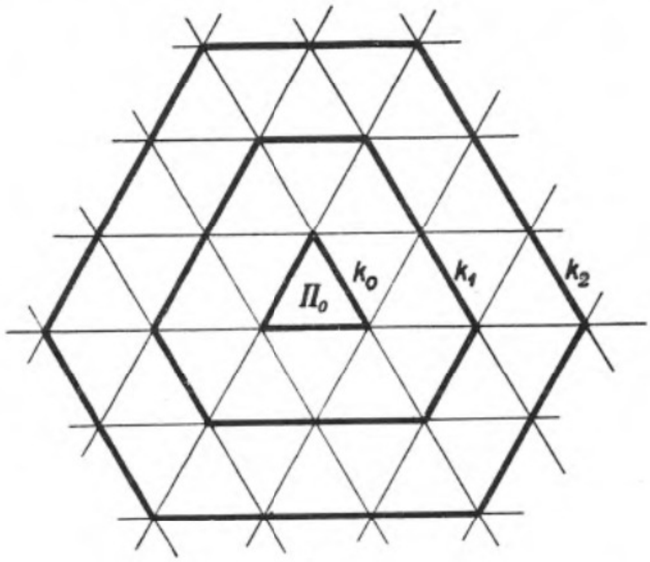

Fig. 1.

Den zwischen den Gürtelbegrenzungen k_{i-1} und k_i gelegenen Teil der Ebene, d. h. den Flächeninhalt des i-ten Gürtels bezeichnen wir mit R_i, die durch die Begrenzung k_i umschlossene Fläche mit S_i. Die Formel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_n}{S_n} = 0 \tag{1}$$

drückt einen trivialen Zusammenhang aus zwischen den Flächeninhalten in der euklidischen Ebene. Auf der hyperbolischen Ebene bestimmt jeder zwischen 0 und $\frac{\pi}{3}$ gelegener Winkel (bis auf die Kongruenz) je ein reguläres

Dreieck. Betrachten wir nun ein solches reguläres Dreieck, dessen Winkel die Größe $\frac{2\pi}{m}$ besitzen, wo m eine die Zahl 6 übertreffende ganze Zahl ist. Es is wohlbekannt, daß man in der hyperbolischen Ebene aus solchen Dreiecken als Elementarpolygonen ein Dreiecksnetz herstellen kann. Ein solches Dreiecksnetz realisiert in der hyperbolischen Ebene einen unendlichen Graph, und zwar einen regulären Graph m-ten Grades. Das in Rede stehende — sagen wir — hyperbolische Dreiecksgitter ist durch die vorgegebene Zahl $m\,(>6)$ (bis auf die Kongruenz) bestimmt. Die konzentrischen Kränze, so wie die linke Seite der Formel (1) können auch in dem letzteren Dreiecksgitter gedeutet werden, als Grenzwerte ergeben sich jedoch von m abhängige irrationale Zahlen. Auf diese einfache Bemerkung wollen wir im folgenden ausführlicher eingehen.

1. Zuerst wollen wir die konzentrischen Kränze definieren. Als Zentrum kann ein beliebiges Elementardreieck Π_0 des gegebenen hyperbolischen Dreiecksgitters gewählt werden, und seine Begrenzungslinie k_0 heiße Gürtelbegrenzung oder Kranzbegrenzung. Der auf dieses Zentrum bezogene i-te Kranz besteht aus denjenigen Elementardreiecken, welche sich in wenigstens einem Punkte der k_{i-1} Gürtelbegrenzung von außen angliedern. Diejenigen Seiten dieser Elementardreiecke, welche mit k_{i-1} keinen einzigen gemeinsamen Punkt haben, bestimmen die Gürtelbegrenzung k_i.

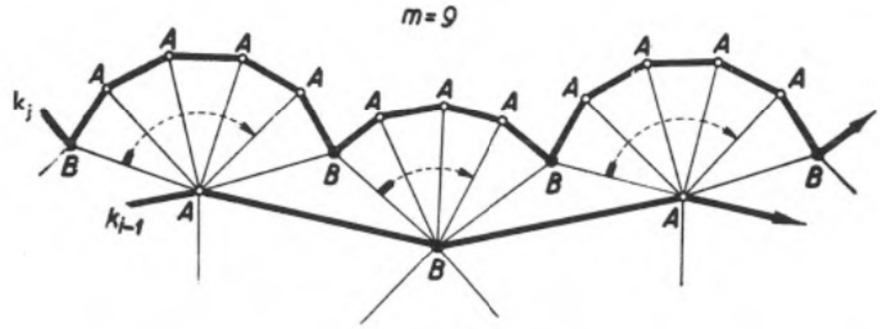

Fig. 2.

In dieser Zerlegung in Kränze, des durch das Netz realisierten Graphen, können die Kanten des Graphen zweierlei Lagen haben: entweder bilden sie einen Teil irgendeiner Gürtelbegrenzung k_i, oder sie verbinden einen auf k_{i-1} gelegenen Eckpunkt mit einem auf k_i gelegenem Eckpunkte, sie bilden daher einen Querschnitt irgend eines Kranzes. Die Anzahl der Elementardreiecke in je einem Kranze stimmt offenbar überein mit der Anzahl der den Kranz überquerenden Kanten. In jedem Kranze gibt es zweierlei Lagen der Elementardreiecke, sie sind entweder so gestellt, wie $\triangle$, oder wie ∇, worunter wir das verstehen wollen, daß seine Seite, welche keinen Querschnitt bildet, als Elementarstrecke der Gürtelbegrenzung mit dem kleineren oder größerem Index angehört. Im Verhältnis zum Inneren je eines Kranzes können auch die auf der Begrenzung mit größerem Index gelegenen Ecken zweierlei Lagen haben, A-Ecken nennen wir diejenigen aus denen je eine Kante zur Gürtelbegrenzung mit niedrigerem Index ausgeht, aus den B-Ecken hingegen gehen je zwei Kanten zur Gürtelbegrenzung mit kleinerem Index aus. (Figur 2.) Aus der Definition der Kränze folgt, daß auf k_i (für $i \geqq 0$) sowohl A als auch B-Ecken, und nur solche gelegen sind.

2. Nun bestimmen wir die Anzahl z_i der im i-ten Kranze befindlichen Elementardreiecke, sowie die Anzahl x_i und y_i der auf der Gürtelbegrenzung k_i gelegenen A- und B-Eckpunte. Die Anzahl der $\triangle$ gestellten Elementartdreiecke im i-ten Kranze stimmt mit der Anzahl der Elementarstrecken der Gürtelbegrenzung k_{i-1} überein, also mit der Anzahl ihrer sämtlichen Eckpunkte, mit $(x_{i-1}+y_{i-1})$. Die Anzahl der $\bigtriangledown$ gestellten hingegen ist der Anzahl der Elementarstrecken auf der Gürtelbegrenzung k_i gleich, also (x_i+y_i). Folglich ist

$$z_i = (x_{i-1}+y_{i-1}) + (x_i+y_i). \tag{2}$$

Die Eckpunkte der Gürtelbegrenzung k_i zählen wir längs einer Umgehung, wie es die Pfeile der Figur 2 angeben, die Eckpunkte der Begrenzung k_i werden also gezählt, indem wir sie den Eckpunkten der Begrenzung k_{i-1} zuordnen. Zu den A-Ecken von k_{i-1} ordnen wir je einen B- und je $m-5$ A-Ecken der Eckpunkte der Gürtelbegrenzung k_i. Zu den B-Punkten der Gürtelbegrenzung k_{i-1} werden je ein B-Punkt und $m-6$ A-Punkte auf k_i zugeordnet. So gelangen wir zu den Abzählungen

$$\begin{aligned} x_i &= (m-5)\,x_{i-1} + (m-6)\,y_{i-1}, \\ y_i &= x_{i-1} + y_{i-1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Die Formeln (2) und (3) haben nur dann einen Sinn, wenn $i \geqq 1$, darum sind sie durch die folgenden — unmittelbar einleuchtenden — Feststellungen zu ergänzen

$$z_0 = 1; \quad x_1 = 3\,(m-4), \quad y_1 = 3; \quad z_1 = 3\,(m-2). \tag{4}$$

Mit Hilfe von (2)—(4) kann man nun die Werte der Folge $z_0, z_1, z_2, \ldots$ berechnen.

3. Jetzt haben wir die Struktur der in Rede stehenden Folge, bloß auf die Definition (2)—(4) gestützt zu bestimmen.

B e h a u p t u n g: Für $i > 2$ *besteht die rekursive Beziehung*

$$z_i = (m-4)\,z_{i-1} - z_{i-2}. \tag{5}$$

Wenn nämlich in (2) rechts das zweite Glied mit Hilfe der Summen von Gleichungen der Form (3) ausgedrückt wird, erhält man

$$z_i = (m-3)\,x_{i-1} + (m-4)\,y_{i-1} = (m-4)(x_{i-1} + y_{i-1}) + x_{i-1}.$$

Wenn man x_{i-1} aus der Entwicklung in der ersten Gleichung aus (3) entnimmt, läßt es sich so ausdrücken

$$x_{i-1} = (m-4)(x_{i-2} + y_{i-2}) - (x_{i-2} + 2y_{i-2}).$$

Der Vergleich von (2) mit der zweiten Gleichung in (3) ergibt $z_i = x_i + 2y_i$ und folglich

$$x_{i-1} = (m-4)(x_{i-2} + y_{i-2}) - z_{i-2}.$$

Dies in die Entwicklung von z_i eingesetzt, kommt man zur Formel

$$z_i = (m-4)(x_{i-1} + y_{i-1} + x_{i-2} + y_{i-2}) - z_{i-2}$$

woraus auf Grund von (2) eben die zu beweisende Beziehung (5) folgt.

Im Falle $i = 2$ kann man aus (2)—(4) unmittelbar berechnen, daß

$$z_2 = 3(m-2)(m-4). \tag{4*}$$

Aus (4), (4*), (5) ersieht man, daß die Elemente der Folge $z_0, z_1, z_2, \ldots$ mit Ausnahme von z_0 durch $3(m-2)$ teilbare ganze Zahlen sind. Betrachten wir nun die durcn

$$c_1 = 1,\ c_2 = m-4 \text{ und für } i > 2,\ c_i = (m-4)\,c_{i-1} - c_{i-2} \tag{6}$$

definierte Folge.

Nun können wir den unter (1) gegebenen Grenzwert entsprechenden Grenzwert, wenn $m > 6$ auch in der Form

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{z_0 + z_1 + \cdots + z_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_k + c_{k+1} + \cdots + c_n} \qquad (k = \text{konst.}) \tag{7}$$

definieren.

4. Jetz lösen wir die folgende Aufgabe: $p \geqq 3$ sei eine gegebene ganze Zahl und man untersuche die durch

$$c_i = p c_{i-1} - c_{i-2}; \qquad c_2 = p, \qquad c_1 = 1 \qquad (i = 3, 4, 5, \ldots) \tag{8}$$

definierte Folge. Man bestimme den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_k + c_{k+1} + \cdots + c_n} = \gamma \qquad (k = \text{konst.}). \tag{9}$$

Erstens betrachten wir die Folge $a^3, a^4, a^5, \ldots$, wenn a irgendeine Wurzel der quadratische Gleichung

$$a^2 = pa - 1 \tag{10}$$

ist. Es ist klar, daß

$$a^i = pa^{i-1} - a^{i-2} \qquad (i = 2, 3, 4, \ldots), \tag{8*}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{a^k + a^{k+1} + \cdots + a^n} = \frac{a-1}{a} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{p^2-4} - (p-2)\right). \tag{9*}$$

Zweitens betrachten wir den folgenden Satz: Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$u_i = pu_{i-1} - u_{i-2}$$

läßt sich als lineare Kombinationen aus zwei Partikulärlösungen darstellen, d. h. wenn

$$a_i = pa_{i-1} - a_{i-2}, \qquad b_i = pb_{i-1} - b_{i-2}$$

ist, dann ist

$$u_i = \lambda a_i + \mu b_i.$$

Mit den zwei Bemerkungen ist es leicht einzusehen, daß

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(\sqrt{p^2-4} - (p-2)\right)$$

gilt.

5. Wir betrachten die zur Matrix der Transformation (3) gehörende charakteristische Gleichung

$$\begin{vmatrix} (m-5)-\varrho & m-6 \\ 1 & 1-\varrho \end{vmatrix} = \varrho^2 - (m-4)\varrho + 1 = 0. \tag{11}$$

Den Feststellungen in 4. gemäß erhält man, wenn die kleinere Wurzel der Gleichung (11) aus 1 abgezogen wird, den unter (7) angegebenen, d. h. den ursprünglich gegebenen Grenzwert, und zwar ist jetzt $p = m-4$. Im Falle $m > 6$ ist also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_n}{S_n} = \frac{\sqrt{(m-4)^2-4} - (m-6)}{2},$$

also tatsächlich quadratisch irrationale Zahlen.

(Eingegangen am 19. Januar 1957.)