Über eine spezielle Klasse von Finslerschen Räumen.

Von GY. SOÓS in Debrecen.

Wir werden in dieser Arbeit diejenige Finslersche Räume betrachten, die den folgenden Bedingungen genügen:

$$A^i_{jk|l} = 0 \tag{1.a}$$

$$\bar{R}^i_{jkl|m} = 0 \tag{1.b}$$

wobei A_{ijk} den Torsionstensor und $\bar{R}^i_{jkl} = R^i_{jkl} - A^i_{jm} R^m_{okl}$ den sog. Hauptkrümmungstensor des Raumes bezeichnet. Finslersche Räume mit der Eigenschaft (1.a) und (1.b) bilden, in einem gewissen Sinne, die Verallgemeinerung der symmetrischen Riemannschen bzw. symmetrischen affinzusammenhängenden Räumen. Im folgenden bezeichnen wir die Räume die den Relationen (1.a) und (1.b) genügen als quasisymmetrisch.

Die Bedingung (1.a) ist, nach Formel (44) des Buches [1] „Les espaces de Finsler" von CARTAN gleichbedeutend mit

$$\Gamma^{*i}_{jk||l} = L \frac{\partial \Gamma^{*i}_{jk}}{\partial v^l} = 0 \tag{2}$$

d. h., das Zusammenhangsobjekt Γ^{*i}_{jk} hängt von den Koordinaten des Linienelements nicht ab.

Finslersche Räume mit der Eigenschaft $A_{ijk|l} = 0$ wurden von CARTAN betrachtet und von geometrischem Standpunkt aus charakterisiert. Im folgenden geben wir eine gruppentheorische Charakterisierung der quasisymmetrischen Finslerschen Räumen.

Wir stellen nun einige Konsequenzen der Bedingungen (1.a) und (1.b) zusammen.

Wegen (2) stimmt die Form des Hauptkrümmungstensor $\bar{R}^i_{jkl}$ mit der des Krümmungstensors des Riemannschen Raumes überein und hängt von den Koordinaten des Linienelements nicht ab:

$$\frac{\partial \bar{R}^i_{jkl}}{\partial v^m} = 0. \tag{3}$$

Nach (2) ist in einem quasisymmetrischen Raum die Operation der kovarianten Ableitung mit der der Teilableitung nach den v^i vertauschbar:

$$\left[\frac{\partial T_{ij}}{\partial v^k}\right]_{|m} - \frac{\partial T_{ij|m}}{\partial v^k} = 0 \tag{4}$$

Der Krümmungstensor P^i_{jkl} der CARTANschen Theorie verschwindet, ferner ist nach (1.a) und (1.b)

$$S^i_{jkl|m} = 0 \tag{5}$$

$$R_i{}^j{}_{kl|m} = 0. \tag{6}$$

In einer vorangehenden Arbeit (2) beschäftigten wir uns mit den affinen Transformationen einer affinzusammenhängenden Mannigfaltigkeit von Linienelementen. Wir hatten die Bedingungen festgestellt, die notwendig und hinreichend für die Existenz einer infinitesimalen Affinität sind. Die dort ausgeführte Betrachtungen und Ergebnisse sind auch im Fall eines Finslerschen Raumes richtig. Wir reproduzieren hier einen Teil der dortigen Ergebnisse.

Die infinitesimale Transformation

$$\bar{x}^i = x^i + \xi^i(x)\,\delta t \tag{7}$$

heißt eine infinitesimale Affinität, falls das Vektorfeld $\xi^i(x)$ den Gleichungen

$$\Delta_\xi \Gamma^{*i}_{jk} = 0 \tag{8}$$

$$\Delta_\xi C^i_{jk} = 0 \tag{9}$$

genügt, wo Δ_ξ die Liesche Ableitung bedeutet.

Im Falle von Finslerschen Räumen kann man die obigen Gleichungen in der Form

$$\Delta_\xi \Gamma^{*i}_{jk} = \xi^i_{|j|k} + \Gamma^{*i}_{jk||m}\xi^m_{|0} + \bar{R}^i_{jkm}\xi^m = 0 \tag{10}$$

bzw.

$$\Delta_\xi C^i_{jk} = C^i_{jk|m}\xi^m + \frac{\partial C^i_{jk}}{\partial v^m}\xi^m_{|s}v^s - C^m_{jk}\xi^i_{|m} + C^i_{mk}\xi^m_{|j} + C^i_{jm}\xi^m_{|k} = 0 \tag{11}$$

schreiben.

Die Integrabilitätsbedingungen der Gleichungen (10) bestehen, falls man (11) als Nebenbedingungen betrachtet, aus der folgenden Gleichungskette:

$$\Delta_\xi \Gamma^{*i}_{jk.l_1\ldots l_t} = 0 \qquad \left(\Gamma^{*i}_{jk.l} = \frac{\partial \Gamma^{*i}_{jk}}{\partial v^l}\right) \tag{12.a}$$

$$\Delta_\xi \Gamma^{*i}_{jk.l_1\ldots l_t|s_1|\ldots|s_r} = 0 \qquad (r = 1, \ldots, p) \tag{12.b}$$

$$\Delta_\xi \bar{R}^i_{jkl} = 0 \tag{12.c}$$

$$\Delta_\xi \bar{R}^i_{jkl|m_1|\ldots|m_s} = 0 \qquad (s = 1, \ldots, q) \tag{12.d}$$

ferner

$$\Delta_\xi C^i_{jk} = 0 \tag{13.a}$$

$$\Delta_\xi C^i_{jk.\,l_1 \dots l_r} = 0 \tag{13.b}$$

$$\Delta_\xi C^i_{jk|\,m_1| \dots |m_v} = 0 \qquad (v = 1, \dots, a) \tag{13.c}$$

$$\Delta_\xi C^i_{jk.l_1 \dots l_r\,|\,m_1| \dots |m_z} = 0 \qquad (z = 1, \dots, b) \tag{13.d}$$

Wir untersuchen nun die Existenz einer infinitesimalen Affinität in einem quasisymmetrischen Finslerschen Raum. In diesem Falle sind die Bedingungen (12.a), (12.b), und (12.d) wegen (2) identisch erfüllt. Es bleibt nur die Bedingung

$$\Delta_\xi \overline{R}^i_{jkl} = 0. \tag{14}$$

Wegen (1.a) und (4) bleiben aus der Gleichungsgruppe (13) nur die beiden Gleichungsketten

$$\Delta_\xi C^i_{jk} = 0 \tag{15}$$

$$\Delta_\xi C^i_{jk.l_1 \dots l_r} = 0 \tag{16}$$

zurück.

Zur Existenz einer infinitesimalen Affinität genügt es, nach der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, die algebraische Kompatibilität des Gleichungssystems (14), (15) und (16) für die Unbekannten ξ^i, $\dfrac{\partial \xi^i}{\partial x^j}$ nachzuweisen.

Nehmen wir die Eigenschaften (1.a), (1.b), (3) und (4) in Betracht, und schreiben die übrigbleibende Bedingungsgleichungen (14)—(16) ausführlich aus. Diese lauten wie folgt:

$$\overline{R}^i_{mkl}\xi^m_{|j} + \overline{R}^i_{jml}\xi^m_{|k} + \overline{R}^i_{jkm}\xi^m_{|l} - \overline{R}^m_{jkl}\xi^i_{|m} = 0 \tag{17}$$

$$C^i_{jk.m}\xi^m_{|s}v^s - C^m_{jk}\xi^i_{|m} + C^i_{mk}\xi^m_{|j} + C^i_{jm}\xi^m_{|k} = 0 \tag{18}$$

$$\begin{aligned} C^i_{jk.l_1 \dots l_r.m}\xi^m_{|s}v^s - C^m_{jk.l_1 \dots l_s}\xi^i_{|m} + C^i_{mk.l_1 \dots l_r}\xi^m_{|j} + {} \\ + C^i_{jm.l_1 \dots l_r}\xi^m_k + \sum C^i_{jk.l_1 \dots l_{s-1} m l_{s+1} \dots l_r}\xi^m_{l_s} = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Man sieht, daß diese Gleichungen nur die Derivierte $\xi^i_{|j}$ enthalten.

Andererseits bestehen, wegen (1.a) und (1.b), die Gleichungen

$$\overline{R}^i_{jkl|p|q} - \overline{R}^i_{jkl|q|p} = 0, \qquad C^i_{jk|p|q} - C^i_{jk|q|p} = 0,$$
$$C^i_{jk.l_1 \dots l_r|p|q} - C^i_{jk.l_1 \dots l_r|q|p} = 0.$$

Nach den Vertauschungsformel der Finslerschen Geometrie und (3) erhalten wir, als linke Seiten der obigen Gleichungen die folgende Relationen:

$$\overline{R}^m_{jkl}\overline{R}^i_{mpq} - \overline{R}^i_{mkl}\overline{R}^m_{jpq} - \overline{R}^i_{jml}\overline{R}^m_{kpq} - \overline{R}^i_{jkm}\overline{R}^m_{lpq} = 0 \tag{20}$$

$$C^m_{jk}\overline{R}^i_{mpq} - C^i_{mk}\overline{R}^m_{jpq} - C^i_{jm}\overline{R}^m_{kpq} - C^i_{jkm}\overline{R}^m_{spq}v^s = 0 \tag{21}$$

und

$$C^m_{jk.l_1\ldots l_r}\bar{R}^i_{mpq} - C^i_{mk.l_1\ldots l_r}\bar{R}^m_{jpq} - C^i_{jm.l_1\ldots l_r}\bar{R}^m_{kpq} - \\ - \sum C^i_{jk.l_1\ldots l_{s-1}ml_{s+1}\ldots l_r}\bar{R}^m_{l_s pq} - C^i_{jk.l_1\ldots l_r.m}\bar{R}^m_{spq}v^s = 0. \tag{22}$$

Eine einfache Vergleichung des Gleichungssystems (17), (18) und (19) mit (20), (21) und (22) beweist die gesuchte algebraische Kompatibilität. Daraus folgt die Existenz wenigstens einer infinitesimalen Affinität und folglich einer endlichen affinen Transformationsgruppe.

Der folgende Satz faßt das obige Ergebnis zusammen.

Satz. *In einem quasisymmetrischen Finslerschen Raume existiert immer eine (wenigstens einparametrige) kontinuierliche Gruppe von affinen Transformationen.*

Literatur.

[1] É. CARTAN, Les espaces de Finsler, *Actualités Sci. Industr.* **79**, Paris, 1934.
[2] GY. SOÓS, Über Gruppen von Affinitäten und Bewegungen in Finslerschen Räumen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **5** (1954), 73—84.

(Eingegangen am 30. Januar 1957.)