Quelques remarques sur un ouvrage de M. V. Pták.

Par ÁKOS CSÁSZÁR à Budapest.

1. Soit $I=[a_j, b_j]$ l'intervalle $a_j \leqq x_j \leqq b_j$ $(j=1, \ldots, m)$ de l'espace euclidien à m dimensions E_m et appelons *paramètre de régularité* de cet intervalle le quotient

$$r(I)=\frac{|I|}{L^m},$$

où $|E|$ désigne la mesure extérieure m-dimensionnelle de Lebesgue de l'ensemble $E \subset E_m$ et $L=\max\,(b_j-a_j)$. De façon analogue, désignons par $r^*(I)$ le quotient

$$r^*(I)=\frac{l}{L},$$

où $l=\min\,(b_j-a_j)$. On a l'inégalité évidente

$$\left(\frac{l}{L}\right)^m \leqq \frac{L_1 \ldots L_m}{L^m} \leqq \frac{l}{L},$$

où $L_j=b_j-a_j$, c'est-à-dire

$$r^*(I)^m \leqq r(I) \leqq r^*(I). \tag{1.1}$$

Dans ce qui suit, nous désignerons toujours par $F(I)$ une fonction d'intervalle réelle et finie, définie pour tous les intervalles $I \subset E_m$. Une fonction de ce genre étant donnée, considérons pour $0<\alpha \leqq 1$ les nombres dérivés extrêmes de cette fonction en un point $x \in E_m$

$$\underline{F}_{(\alpha)}(x)=\varliminf_{r(I)\geqq\alpha} \frac{F(I)}{|I|}, \quad \overline{F}_{(\alpha)}(x)=\varlimsup_{r(I)\geqq\alpha} \frac{F(I)}{|I|},$$

$$\underline{F}_{\alpha}(x)=\varliminf_{r^*(I)\geqq\alpha} \frac{F(I)}{|I|}, \quad \overline{F}_{\alpha}(x)=\varlimsup_{r^*(I)\geqq\alpha} \frac{F(I)}{|I|},$$

les limites extrêmes étant prises toutes les fois pour les intervalles I tels que $x \in I$ et $\delta(I) \to 0$. En vertu de (1.1), on a évidemment pour $0<\alpha \leqq 1$, $\gamma=\sqrt[m]{\alpha}$

$$\underline{F}_{\alpha}(x) \leqq \underline{F}_{(\alpha)}(x) \leqq \underline{F}_{\gamma}(x), \quad \overline{F}_{\gamma}(x) \leqq \overline{F}_{(\alpha)}(x) \leqq \overline{F}_{\alpha}(x) \tag{1.2}$$

et pour $0 < \alpha < \beta \leqq 1$

$$(1.3) \qquad \underline{F}_{(\alpha)}(x) \leqq \underline{F}_{(\beta)}(x) \leqq \overline{F}_{(\beta)}(x) \leqq \overline{F}_{(\alpha)}(x),$$

$$(1.4) \qquad \underline{F}_{\alpha}(x) \leqq \underline{F}_{\beta}(x) \leqq \overline{F}_{\beta}(x) \leqq \overline{F}_{\alpha}(x).$$

Ces inégalités entraînent que

$$\inf_{0<\alpha<1} \underline{F}_{(\alpha)}(x) = \inf_{0<\alpha<1} \underline{F}_{\alpha}(x)$$

et que

$$\sup_{0<\alpha<1} \overline{F}_{(\alpha)}(x) = \sup_{0<\alpha<1} \overline{F}_{\alpha}(x);$$

la valeur commune des deux bornes inférieures en question sera désignée par $\underline{F}(x)$ et celle des deux bornes supérieures par $\overline{F}(x)$.

C'est A. J. WARD qui a généralisé le théorème de DENJOY, YOUNG et SAKS sur les nombres dérivés extrêmes bilatéraux des fonctions à une variable, aux nombres dérivés $\underline{F}(x)$, $\overline{F}(x)$, $\underline{F}_{\alpha}(x)$ et $\overline{F}_{\alpha}(x)$ des fonctions additives d'intervalles m-dimensionnels $F(I)$. Le théorème de WARD peut être formulé de la façon suivante: [1])

(1.5) *$F(I)$ étant une fonction d'intervalle additive quelconque, on a presque partout*

soit $\underline{F}(x) = \underline{F}_{\alpha}(x) = -\infty, \quad \overline{F}(x) = \overline{F}_{\alpha}(x) = +\infty$
pour tous les nombres $0 < \alpha < 1$,

soit $-\infty < \underline{F}(x) = \underline{F}_{\alpha}(x) = \overline{F}_{\alpha}(x) = \overline{F}(x) < +\infty$
pour tous les nombres $0 < \alpha < 1$.

Eu égard aux inégalités (1.2), ce théorème est équivalent au suivant:

(1.6) *$F(I)$ étant une fonction d'intervalle additive quelconque, on a presque partout*

soit $\underline{F}(x) = \underline{F}_{(\alpha)}(x) = -\infty, \quad \overline{F}(x) = \overline{F}_{(\alpha)}(x) = +\infty$
pour tous les nombres $0 < \alpha < 1$,

soit $-\infty < \underline{F}(x) = \underline{F}_{(\alpha)}(x) = \overline{F}_{(\alpha)}(x) = \overline{F}(x) < +\infty$
pour tous les nombres $0 < \alpha < 1$.

Le théorème (1.5) (ou (1.6)) contient, comme résultat particulier, le théorème suivant:

(1.7) *$F(I)$ étant une fonction d'intervalle additive quelconque, on a presque partout*

soit $\underline{F}(x) = -\infty, \quad \overline{F}(x) = +\infty$,

soit $-\infty < \underline{F}(x) = \overline{F}(x) < +\infty$.

---

[1]) Voir [1].

M. V. PTÁK a réussi[2]) de donner une démonstration, bien plus simple que la démonstration originelle de WARD, au théorème (1.7). L'idée fondamentale de la démonstration de M. PTÁK consiste à considérer les nombres dérivés extrêmes, formés à l'aide d'un réseau dyadique, de la fonction $F(I)$. Considérons à cet effet pour $k=0,1,2,\dots$ le réseau $\mathfrak{G}_k$ des cubes $[p_j/2^k,(p_j+1)/2^k]$ $(p_j=0,\pm1,\pm2,\dots;\ j=1,\dots,m)$ et soit

$$\underline{\underline{F}}(x)=\underline{\lim}\,\frac{F(K)}{|K|},\qquad \overline{\overline{F}}(x)=\overline{\lim}\,\frac{F(K)}{|K|},$$

les limites extrêmes étant prises pour des cubes K appartenant chacun à un des réseaux $\mathfrak{G}_k$ et tels que $x\in K$, $\delta(K)\to 0$. M. V. PTÁK a démontré le théorème de DENJOY, YOUNG et SAKS pour les nombres dérivés $\underline{\underline{F}}(x)$ et $\overline{\overline{F}}(x)$, c'est-à-dire il a établi le théorème suivant:[3])

(1.8) *$F(I)$ étant une fonction d'intervalle additive quelconque, on a presque partout*

soit $\underline{\underline{F}}(x)=-\infty,\ \overline{\overline{F}}(x)=+\infty,$
soit $-\infty<\underline{\underline{F}}(x)=\overline{\overline{F}}(x)<+\infty.$

En s'appuyant sur ce théorème et à l'aide de trois lemmes, M. PTÁK arrive à la démonstration du théorème (1.7).

Le but de ce travail est de montrer que les méthodes de M. PTÁK permettent de démontrer même le théorème plus général (1.5), ou le théorème (1.6) qui lui est équivalent, de WARD. Il suffit pour cet effet de généraliser le premier lemme (et de modifier légèrement les deux autres) de M. PTÁK.

2. Commençons par la démonstration du lemme suivant qui est la généralisation du lemme (2.1) de l'ouvrage [2]:

(2.1) *Les nombres $0<\alpha<1, 0<\gamma<1, 0<\lambda<1$ étant donnés, il existe un nombre $\varrho=\varrho(\alpha,\gamma,\lambda)>0$ tel que, à tout intervalle J de diamètre $\delta(J)<1$ et de paramètre de régularité $r(J)\geqq\alpha$, on peut trouver deux intervalles R_i et R_e qui satisfont aux relations $R_i\subset J\subset R_e$, $|R_i|>(1-\lambda)|J|$, $|R_e|<(1+\lambda)|J|$, dont chacun est la réunion de cubes, de mesure supérieure à $\varrho|J|$, d'un même réseau $\mathfrak{G}_k$, et tels que chacun des ensembles R_e-J et $J-R_i$ est la réunion d'un nombre fini d'intervalles non empiétants, de mesure supérieure à $\varrho|J|$ et de paramètre de régularité supérieur ou égal à γ.*

DÉMONSTRATION. Choisissons un nombre $\beta>0$ tel que

$$(1+\beta)^m<1+\lambda,\qquad (1-\beta)^m>1-\lambda$$

---

[2]) Voir [2].
[3]) Voir [2], th. (1.4).

et posons $\mu = \sqrt[m]{\gamma}$. Nous allons montrer que le nombre

$$\varrho(\alpha, \gamma, \lambda) = \min \left[\left(\frac{1}{11}\alpha\beta\right)^m, \left(\frac{1}{6}\alpha\beta(1-\mu)\right)^m\right]$$

satisfait aux conditions demandées. En effet, considérons un intervalle $J = [a_j, b_j]$ tel que $\delta(J) < 1$ et $r(J) \geqq \alpha$ et supposons, ce qui est légitime, que les nombres $L_j = b_j - a_j$ satisfont aux inégalités $L_1 \leqq L_2 \leqq \cdots \leqq L_m < 1$; on aura alors d'après (1. 1) $r^*(J) = L_1/L_m \geqq r(J) \geqq \alpha$. Posons $h = \frac{1}{5} L_1\beta < < \frac{1}{5} L_1 < \frac{1}{5}$ et désignons pour $w = -2, -1, 0, 1, 2$ par J_w l'intervalle $[a_j - wh, b_j + wh]$. On a évidemment

$$J_{-2} \subset J_{-1} \subset J_0 = J \subset J_1 \subset J_2$$

et

$$\frac{|J_2|}{|J|} = \prod_1^m \left(1 + \frac{4h}{L_j}\right) \leqq \prod_1^m \left(1 + \frac{4h}{L_1}\right) < (1+\beta)^m < 1 + \lambda,$$

$$\frac{|J_{-2}|}{|J|} = \prod_1^m \left(1 - \frac{4h}{L_j}\right) \geqq \prod_1^m \left(1 - \frac{4h}{L_1}\right) > (1-\beta)^m > 1 - \lambda.$$

En choisissant un entier k tel que $2^{-k+1} > h \geqq 2^{-k}$, désignons par R_i et par R_e la réunion des cubes du réseau $\mathfrak{G}_k$ qui ont de points communs avec J_{-2} et avec J_1 respectivement. Les inclusions évidentes $J_{-2} \subset R_i \subset J_{-1} \subset J \subset J_1 \subset R_e \subset J_2$ entraînent les inégalités

$$a_j^{(e)} < a_j < a_j^{(i)} < b_j^{(i)} < b_j < b_j^{(e)},$$

où on a posé $R_i = [a_j^{(i)}, b_j^{(i)}]$, $R_e = [a_j^{(e)}, b_j^{(e)}]$ et où la différence de deux membres consécutifs quelconques est supérieure ou égale à h. Par conséquent chacun des ensembles $R_e - J$ et $J - R_i$ est la réunion de $3^m - 1$ intervalles non empiétants dont les côtés sont supérieurs ou égaux à h.

Considérons un quelconque de ces intervalles et partageons chacun des côtés de celui-ci en autant de segments égaux que la longueur commune de ces segments soit située entre $(1-\mu)h$ et $\frac{1-\mu}{\mu}h$.[4]) Ceci est possible car, en désignant par ϑh ($\vartheta \geqq 1$) la longueur d'un des côtés en question, on a

$$\frac{\vartheta h}{(1-\mu)h} - \frac{\vartheta h}{\frac{1-\mu}{\mu}h} = \vartheta\left(\frac{1}{1-\mu} - \frac{\mu}{1-\mu}\right) = \vartheta \geqq 1,$$

---

[4]) Ce n'est qu'en cette idée que notre démonstration diffère de celle du lemme (2. 1) de l'article [2] de M. Pták.

de sorte qu'il existe un entier s tel que

$$0 < \frac{\vartheta h}{\frac{1-\mu}{\mu} h} \leqq s \leqq \frac{\vartheta h}{(1-\mu) h},$$

et en partageant ce côté en s parties égales, on aura pour la longuer $\vartheta h/s$ des parties qui en résultent les inégalités

$$(1-\mu) h \leqq \frac{\vartheta h}{s} \leqq \frac{1-\mu}{\mu} h.$$

Pour chacun des côtés en question, élevons un hyperplan perpendiculaire à ce côté par chacun des points de la subdivision que nous venons d'effectuer; ces hyperplans déterminent une subdivision de l'intervalle considéré en intervalles non empiétants de paramètre de régularité supérieur ou égal à

$$\left(\frac{(1-\mu) h}{\frac{1-\mu}{\mu} h}\right)^m = \mu^m = \gamma$$

et de mesure supérieure ou égale à

$$(1-\mu)^m h^m = \left[\frac{1}{5} L_1 \beta (1-\mu)\right]^m > \left(\frac{1}{\alpha} L_1\right)^m \left[\frac{1}{6} \alpha \beta (1-\mu)\right]^m \geqq$$
$$\geqq \varrho(\alpha, \gamma, \lambda) L_m^m \geqq \varrho(\alpha, \gamma, \lambda) |J|.$$

En appliquant la subdivision considérée à chacun des $3^m - 1$ intervalles qui forment l'ensemble $R_r - J$ et à ceux qui forment l'ensemble $J - R_i$, on termine la démonstration par la remarque que la mesure de chacun des cubes du réseau $\mathfrak{G}_k$ est égale à

$$(2^{-k})^m > \left(\frac{h}{2}\right)^m = \left(\frac{1}{10} L_1 \beta\right)^m > \left(\frac{\alpha}{11} \beta\right)^m \left(\frac{1}{\alpha} L_1\right)^m \geqq$$
$$\geqq \varrho(\alpha, \gamma, \lambda) L_m^m \geqq \varrho(\alpha, \gamma, \lambda) |J|.$$

Remarque. Observons qu'on a dans la construction précédente

$$\frac{L_j}{2} + 2h \leqq \frac{L_j}{2}\left(1 + \frac{4}{5}\beta\right) < \frac{L_j}{2}(1+\beta) < \frac{L_j}{2} \sqrt[n]{2}. \tag{2.2}$$

A l'aide du lemme (2.1), on peut démontrer par un raisonnement emprunté entièrement à l'ouvrage [2] de M. Pták la généralisation suivante de son lemme (2.2):

(2.3) *$F(I)$ étant une fonction additive d'intervalle et $0 < \alpha < 1$ étant donné, soit D un ensemble tel que $\underline{F}_{(\alpha)}(x) > -\infty$ pour $x \in D$. On a en ce cas $\underline{F}_{(\alpha)}(x) = \underline{\underline{F}}(x)$ presque partout sur D.*

DÉMONSTRATION. En supposant que la proposition est fausse, eu égard à ce que d'après (1. 3) on a

$$\underline{F}_{(\alpha)}(x) \leqq \underline{F}_{(1)}(x) \leqq \underline{F}(x),$$

on peut trouver des nombres réels r, p et q et un ensemble $A \subset D$ de mesure extérieure positive tels que, avec la notation $G(I) = F(I) - r|I|$, on a pour $x \in A$ les inégalités

$$0 < \underline{G}_{(\alpha)}(x) < p < q < \underline{G}(x).$$

Ceci entraîne l'existence d'un ensemble $E \subset A$ de mesure extérieure positive et d'un nombre $0 < \sigma < 1$ tels que

$$\begin{array}{llll} JE \neq 0,\ r(J) \geqq \alpha, & \delta(J) < \sigma & \text{entraîne} & G(J) > 0, \\ KE \neq 0,\ K \in \mathfrak{G}_k, & \delta(K) < \sigma & \text{entraîne} & G(K) > q|K|. \end{array}$$

Désignons par x_0 un point de densité extérieure de l'ensemble E. Posons $\gamma = \alpha$ et $\lambda = (q-p)/q$ dans le lemme (2. 1) et soit $\varrho = \varrho(\alpha, \gamma, \lambda)$. Il existe en ce cas un $\eta > 0$ tel que, pour tout intervalle J qui contient x_0, de diamétre $\delta(J) < \eta$ et de paramètre de régularité $r(J) \geqq \alpha$, on a l'inégalité $|EJ| > (1-\varrho)|J|$. En conséquence de $\underline{G}_{(\alpha)}(x_0) < p$, il existe un intervalle J tel que

$$x_0 \in J, \qquad r(J) \geqq \alpha, \qquad \delta(J) < \min(\sigma, \eta), \qquad G(J) < p|J|$$

et par conséquent que $|EJ| > (1-\varrho)|J|$. D'après le lemme (2. 1) on a une décomposition $J = K_1 + \cdots + K_r + J_1 + \cdots + J_s$ en intervalles non empiétants de mesure supérieure à $\varrho|J|$, où les K_i sont des cubes appartenants à un réseau $\mathfrak{G}_k$ et le paramètre de régularité des intervalles J_i est supérieur ou égal à α. Il s'ensuit que chacun des K_i et des J_i possède au moins un point commun avec E et que le diamètre de chacun d'eux est inférieur à σ, donc, en posant $R = \sum_1^r K_i$, $S = \sum_1^s J_i$, on a $G(S) > 0$ et $G(R) > q|R|$ et, en vertu de (2. 1), $|R| > \left(1 - \frac{q-p}{q}\right)|J| = \frac{p}{q}|J|$. On en tire

$$G(J) = G(R) + G(S) > G(R) > q|R| > p|J|$$

ce qui est impossible.

Ceci établi, on démontre le lemme suivant, dont la démonstration est analogue à celle du lemme (2. 3) de l'ouvrage [2]:

(2. 4) *$F(I)$ étant une fonction additive d'intervalle, soit $0 < \gamma < 1$ et supposons qu'on a $\underline{F}_{(\gamma)}(x) > -\infty$, $\overline{F}(x) = +\infty$ en tout point x d'un ensembe D. Dans ces hypothèses, on a $|D| = 0$.*

Démonstration. En vertu de (2. 3) et (1. 8), il existe un ensemble $M \subset D$ tel que $|D-M|=0$ et que, pour $x \in M$, $-\infty < \underline{F}_{(\gamma)}(x) = \underline{\underline{F}}(x) = \overline{\overline{F}}(x) < +\infty$.

Supposons qu'on a $|M|>0$. On peut trouver en ce cas des nombres réels r et p et un ensemble $B \subset M$ de mesure extérieure positive tels que, avec la notation $G(I)=F(I)-r|I|$, on ait pour $x \in B$

$$0 < \underline{G}_{(\gamma)}(x) = \underline{\underline{G}}(x) = \overline{\overline{G}}(x) < p, \qquad \overline{G}(x) = +\infty.$$

Il existe ensuite un ensemble $C \subset B$ de mesure extérieure positive et un nombre $0 < \alpha < 1$ tels que, pour $x \in C$,

$$0 < \underline{G}_{(\gamma)}(x) = \underline{\underline{G}}(x) = \overline{\overline{G}}(x) < p, \qquad \overline{G}_{(\alpha)}(x) > 2p.$$

On détermine alors un ensemble $E \subset C$ de mesure extérieure positive et un nombre $0 < \sigma < 1$ tels que

$$\begin{array}{lll} EJ \neq 0, \quad \delta(J) < \sigma \quad r(J) \geqq \gamma & \text{entraîne } G(J) > 0, \\ EK \neq 0, \quad \delta(K) < \sigma, \quad K \in \mathfrak{G}_k & \text{entraîne } G(K) < p\,|K|. \end{array}$$

Posons $0 < \lambda < 1$ et $\varrho = \varrho(\alpha, \gamma, \lambda)$ d'après le lemme (2. 1). En désignant par x_0 un point de densité extérieure de l'ensemble E, il existe un nombre $\eta > 0$ tel que

$$x_0 \in J, \quad r(J) \geqq \alpha, \quad \delta(J) < \eta \quad \text{entraîne} \quad |EJ| > \left(1 - \frac{\varrho}{2}\right)|J|.$$

En conséquence de $\overline{G}_{(\alpha)}(x_0) > 2p$, on trouve un intervalle J qui satisfait aux conditions

$$x_0 \in J, \quad r(J) \geqq \alpha, \quad \delta(2J) < \min(\sigma, \eta), \quad G(J) > 2p\,|J|,$$

où $2J$ désigne l'intervalle concentrique à J et de mesure $2|J|$. Tout intervalle partiel de $2J$, de mesure supérieure à $\varrho|J|$, contient donc au moins un point de E. Appliquons le lemme (2. 1) et considérons l'intervalle $R_e \supset J$ qui est la réunion d'un nombre fini de cubes d'un réseau $\mathfrak{G}_k$, dont chacun a la mesure supérieure à $\varrho|J|$. On conclut de (2. 2) que $R_e \subset 2J$, de sorte que $G(R_e) < p\,|R_e| \leqq 2p\,|J|$. L'ensemble $R_e - J$ étant la réunion d'un nombre fini d'intervalles non empiétants et dont chacun possède la mesure supérieure à $\varrho|J|$ et le paramètre de régularité supérieur ou égal à γ, on a $G(R_e - J) > 0$. Il s'ensuit $G(R_e) > G(J) > 2p\,|J|$, ce qui est impossible.

Passons à la démonstration du théorème (1. 6) de Ward. Soit D un ensemble tel que $\underline{F}(x) > -\infty$ pour $x \in D$ et désignons par D_r, pour $0 < r < 1$ rationnel, l'ensemble des points $x \in D$ tels que $\underline{F}_{(r)} > -\infty$; on aura alors $D = \sum\limits_r D_r$. D'après (2. 4), on a $\overline{F}(x) < +\infty$ presque partout sur D_r, donc presque partout sur D, ce qui entraîne $\overline{F}_{(1/2)}(x) < +\infty$ presque partout sur D.

En appliquant le lemme (2.4) pour la fonction $-F(I) = H(I)$, la relation $\underline{H}_{(1/2)}(x) > -\infty$ a pour conséquence l'inégalité $\overline{H}(x) < +\infty$, c'est-à-dire $\underline{F}(x) > -\infty$ presque partout sur D. On a donc pour $0 < r < 1$ fixé

$$-\infty < \underline{F}(x) \leqq \underline{F}_{(r)}(x) \leqq \overline{F}_{(r)}(x) \leqq \overline{F}(x) < +\infty$$

presque partout sur D, par conséquent d'après (2.3) (appliqué pour $F(I)$ et pour $H(I)$)

$$\underline{F}_{(r)}(x) = \underline{F}(x) = \overline{F}(x) = \overline{F}_{(r)}(x)$$

presque partout sur D. Ceci étant valable presque partout sur D pour tous les nombres rationnels $0 < r < 1$, on a pour presque tous les points $x \in D$

$$\underline{F}(x) = \inf_r \underline{F}_{(r)}(x) = \sup_r \overline{F}_{(r)}(x) = \overline{F}(x).$$

L'hypothèse $\overline{F}(x) < +\infty$ pour $x \in D$ a la même conséquence (en donnant le rôle de $F(I)$ à $-F(I)$), ce qui fournit la proposition à démontrer.

Bibliographie.

[1] A. J. Ward, On the derivation of additive functions of intervals in m-dimensional space, *Fund. Math.* **28** (1937), 265—279.

[2] V. Pták, Dukaz jedné věty Wardovy, *Časopis Pěst. Mat.* **76** (1951), 217—224.

(Reçu le 31 janvier 1957.)