Über eine Verallgemeinerung des Smith'schen Determinantensatzes.

Von BÉLA GYIRES in Debrecen.

Die meisten Lehrbücher und Monographien der Determinantentheorie erwähnen bei der Erörterung von Beispielen symmetrischer Determinanten den folgenden, vom englischen Mathematiker SMITH herrührenden Satz ([4]):

Bezeichnet (j, k) den größten gemeinsamen Teiler der natürlichen Zahlen j und k, dann ist

$$\begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & \dots & (1,n) \\ (2,1) & (2,2) & \dots & (2,n) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ (n,1) & (n,2) & \dots & (n,n) \end{vmatrix} = \varphi(1)\,\varphi(2)\dots\varphi(n), \tag{1}$$

wo $\varphi(k)$ die Eulersche Funktion bedeutet.

Beim Beweise dieses Satzes spielt die Tatsache, daß sich jede natürliche Zahl m in der Gestalt

$$m = \sum_{d|m} \varphi(d) \tag{2}$$

darstellen läßt, eine entscheidende Rolle. In einer Arbeit des Verfassers ([2], S. 52.) wurde als Verallgemeinerung dieser Formel eine (2) entsprechende Darstellung für die Potenz m^{r+1} (r eine nichtnegative ganze Zahl) angegeben. Natürlicherweise entsteht dabei die Frage, ob man nicht unter Benutzung der verallgemeinerten Gestalt von (2) ein dem SMITHschen Satz entsprechendes Resultat für diejenige Determinante erhalten kann, welche aus der auf der linken Seite von (1) stehenden hervorgeht, wenn man jedes Element durch die $(r+1)$-te Potenz desselben ersetzt? Mit dieser Frage beschäftigt sich die vorliegende Arbeit. Im § 1. stellen wir diejenigen Resultate de Arbeit [2] zusammen, die wir im Laufe unserer Darlegungen gebrauchen werden. § 4. enthält die Verallgemeinerung des SMITHschen Determinantensatzes, dessen Beweis zu erbringen der Ziel unserer Arbeit ist. § 2. und § 3. enthalten je einen Hilfsatz, welcher für den Beweis des verallgemeinerten Smithschen Satzes von Wichtigkeit ist.

§ 1.

Bedeutet $N_r(a, m)$ die Anzahl der inkongruenten Lösungen der Kongruenz

$$x_1 \dots x_{r+1} \equiv a \pmod m \qquad (x_i = 1, \dots, m;\ i = 1, \dots, r+1) \tag{3}$$

wo m eine natürliche Zahl und a eine ganze Zahl bedeutet, dann erfüllt $N_r(a, m)$ die folgenden Eigenschaften ([2], S. 52.):

$$N_r(a, m) = N_r((a, m), m). \tag{4}$$

Ist

$$d' | m',\ d'' | m'',\ (m', m'') = 1,$$

dann ist

$$N_r(d' d'', m' m'') = N_r(d', m') N_r(d'', m''). \tag{5}$$

Ist $d|m$, bedeutet $m = p_1^{e_1} \dots p_u^{e_u}$ die Zerlegung von m in Primfaktoren, und ist $d = p_1^{t_1} \dots p_u^{t_u}$, dann gilt auf Grund von (5) die Beziehung

$$N_r(d, m) = N_r(p_1^{t_1}, p_1^{e_1}) \dots N_r(p_u^{t_u}, p_u^{e_u}). \tag{6}$$

Ist $m = p^e$, wo p eine Primzahl und e eine nichtnegative ganze Zahl bedeutet, dann ist

$$N_r(p^t, p^e) = \binom{t+r}{r} \varphi^r(p^e) \qquad (0 \leqq t < e), \tag{7}$$

$$N_r(p^e, p^e) = \sum_{k=0}^{r} \binom{k+e-1}{k} p^{e(r-k)} \varphi^k(p^e), \tag{8}$$

wo φ wiederum die Eulersche Funktion bezeichnet. Durch (4), (6), (7) und (8) wird die zahlentheoretische Funktion $N_r(a, m)$ offenbar in jedem Falle vollständig bestimmt.

Auf Grund von (4) gilt der Zusammenhang

$$\sum_{a=1}^{m} N_r(a, m) = \sum_{d|m} \varphi(d) N_r\left(\frac{m}{d}, m\right) = m^{r+1}. \tag{9}$$

Wegen $N_0(a, m) = 1$, ist dies eine Verallgemeinerung des beim Beweise des Smithschen Satzes zur Anwendung kommenden Identität (2), welche auch in der Einleitung erwähnt wurde.

§ 2.

Es sei m eine natürliche Zahl. Definieren wir die Zahlen $M_r(a, am)$ mit der rekursiven Formel

$$M_r(1, m) = N_r(1, m), \tag{10}$$

$$M_r(a, am) = N_r(a, am) - \sum_{\substack{d|a \\ d<a}} M_r(d, da) \qquad (a = 2, 3, \dots). \tag{11}$$

Es sei weiters $am = p_1^{e_1} \dots p_u^{e_u}$ die Primfaktorzerlegung von am und $a = p_1^{t_1} \dots p_u^{t_u}$.

Lemma 1. *Es gilt*

a) *die Identität*

$$M_r(a, am) = M_r(p_1^{t_1}, p_1^{e_1}) \dots M_r(p_u^{t_u}, p_u^{e_u}) \tag{12}$$

und für eine Primzahl p

$$M_r(p^t, p^e) = N_r(p^t, p^e) - N_r(p^{t-1}, p^{e-1}) \qquad (0 < t \leqq e); \tag{13}$$

b) *weiters die Ungleichung*

$$M_r(a, am) \geqq 0, \tag{14}$$

wobei Gleichheit dann und nur dann besteht, falls $a > 1$ *und* $r = 0$ *ist.*

Beweis. Ad a). Da auf Grund der Rekursionsformeln (10) und (11) die Identität

$$N_r(a, am) = \sum_{d|a} M_r\left(\frac{a}{d}, \frac{a}{d} m\right) \tag{15}$$

besteht, ist der Umkehrungssatz von Möbius (S. z. B. [1], S. 23.) anwendbar und so erhalten wir

$$M_r(a, am) = \sum_{d|a} \mu(d) N_r\left(\frac{a}{d}, \frac{a}{d} m\right), \tag{16}$$

wo $\mu(d)$ die Möbiussche Funktion bedeutet. Ist in der obigen Darstellung von a $t_j \geqq 1$ $(j = 1, \dots, q)$, $t_{q+1} = \dots = t_u = 0$, $q \geqq 1$ und $p_{q+1}^{e_{q+1}} \dots p_u^{e_u} = m^*$ $((a, m^*) = 1)$, und bedeutet weiterhin $\alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_q^{(k)}$ eine beliebige, der zusätzlichen Bedingung $x_j = 0, 1$ $(j = 1, \dots, q)$ genügende Lösung der Gleichung $x_1 + \dots + x_q = k$ $(0 \leqq k \leqq q)$, dann ergibt sich auf Grund der Definition der Möbiusschen Funktion aus (16) der Ausdruck

$$M_r(a, am) = \sum_{k=0}^{q} (-1)^k \sum_{\substack{\alpha_1^{(k)} + \dots + \alpha_q^{(k)} = k \\ \alpha_j^{(k)} = 0, 1}} N_r\left(p_1^{t_1 - \alpha_1^{(k)}} \dots p_q^{t_q - \alpha_q^{(k)}}, p_1^{e_1 - \alpha_1^{(k)}} \dots p_q^{e_q - \alpha_q^{(k)}} m^*\right),$$

bzw. auf Grund der Eigenschaft (5) und (6) der Funktion (4) der Ausdruck

$$M_r(a, am) =$$
$$= N_r(1, m^*) \sum_{k=0}^{q} (-1)^k \sum_{\substack{\alpha_1^{(k)} + \dots + \alpha_q^{(k)} = k \\ \alpha_j^{(k)} = 0, 1}} N_r\left(p_1^{t_1 - \alpha_1^{(k)}}, p^{e_1 - \alpha_1^{(k)}}\right) \dots N_r\left(p_q^{t_q - \alpha_q^{(k)}}, p_q^{e_q - \alpha_q^{(k)}}\right).$$

Letzterer läßt sich aber — wie man leicht einsieht — in der Gestalt

$$M_r(a, am) =$$
$$= N_r(1, m^*) [N_r(p_1^{t_1}, p_1^{e_1}) - N_r(p_1^{t_1 - 1}, p_1^{e_1 - 1})] \dots [N_r(p_q^{t_q}, p_q^{e_q}) - N_r(p_q^{t_q - 1}, p_q^{e_q - 1})]$$

schreiben. Nehmen wir jetzt darauf Rücksicht, daß $N_r(1, m^*)$ multiplikativ ist, und daß sich im Falle $m^* = 1$, $q = 1$, $t_1 = t$ genau (13) ergibt, so ist damit der Nachweis von (12) bereits beendet.

Ad b). Aus (7) und (8) ergibt sich leicht

$$N_r(p^t, p^e) \geqq N_r(p^{t-1}, p^{e-1}) \qquad (1 \leqq t \leqq e),$$

wobei Gleichheit dann und nur dann gilt, falls $r = 0$ ist. Darum ist auf Grud von (12), (10) und (13) auch die Behauptung b) richtig.

Obwohl wir davon keinen Gebrauch machen werden, scheint es doch wünschenswert zu erwähnen, daß für die Funktion (4) auch eine andere, (15) analoge Zerlegung gültig ist, welche sich zugleich auch für die rekursive Berechnung von (4) eignet. *Es gilt* nämlich *die Identität*

$$(17) \qquad N_r(a, m) = \sum_{d|(a, m)} d\varphi\left(\frac{m}{d}\right) N_{r-1}(d, m) \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots).$$

Beweis. Die Anzahl sämtlicher inkongruenter Lösungen der Kongruenz (3) erhalten wir offenbar, indem wir

a) bei gegebenem $d|(a, m)$ die Anzahl sämtlicher inkongruenter Lösungen der Kongruenz

$$(18) \qquad b x_{r+1} \equiv a \pmod{m}$$

suchen, welche mit den, der Bedingung $(b, m) = d$ genügenden Zahlen b des vollständigen Restsystems von m gebildet ist.

b) auf die Anzahl der inkongruenten Lösungen der Kongruenz

$$(19) \qquad x_1 \ldots x_r \equiv b \pmod{m}$$

Rücksicht nehmen,

c) und endlich unsere bisher gemachten Erwägungen auf sämtliche Teiler von (a, m) übertragen.

Bei gegebenem b hat die Kongruenz (18) d inkongruente Lösungen, im vollständigen Restsystem von m finden sich $\varphi\left(\frac{m}{d}\right)$ Elemente für welche $(b, m) = d$ ist, und die Anzahl der inkongruenten Lösungen von (19) beträgt $N_{r-1}(b, m)$. Somit beträgt die Anzahl der zum Teiler d von (a, m) gehörigen inkongruenten Lösungen der Kongruenz (3) $d\varphi\left(\frac{m}{d}\right) N_{r-1}(d, m)$. Indem wir nun für sämtliche Teiler von (a, m) summieren, erhalten wir (17).

§ 3.

Es sei

$$a_{jk}^{(d)} = \begin{cases} N_r\left(\dfrac{(j,k)}{d}, (j,k)\right) & \text{für } d|j \quad \text{und} \quad d|k, \\ 0 \quad \text{in allen anderen Fällen} \end{cases} \tag{20}$$

$$(j, k, d = 1, 2, \ldots, n; \; r = 0, 1, 2, \ldots).$$

Lemma 2. *Falls in* (20) $d = \delta_k$ *und* $\delta_k | k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *ist, so gilt*

$$\begin{vmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(\delta_2)} & \ldots & a_{1k}^{(\delta_k)} & \ldots & a_{1n}^{(\delta_n)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(\delta_2)} & \ldots & a_{2k}^{(\delta_k)} & \ldots & a_{2n}^{(\delta_n)} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(\delta_2)} & \ldots & a_{nk}^{(\delta_k)} & \ldots & a_{nn}^{(\delta_n)} \end{vmatrix} = \tag{21}$$

$$= M_r(1,1) M_r\left(\frac{2}{\delta_2}, 2\right) \ldots M_r\left(\frac{k}{\delta_k}, k\right) \ldots M_r\left(\frac{n}{\delta_n}, n\right),$$

wo die Größe $M_r\left(\dfrac{k}{\delta_k}, k\right)$ *durch* (12), (10) *und* (13) *definiert wird.*

Beweis. *a*) Vor allem machen wir die Voraussetzung $r > 0$. Um unter dieser Voraussetzung die Gültigkeit unserer Behauptung zu beweisen, genügt es offenbar, durch Umformungen, welche den Wert der Determinante nicht verändern, die k-te Spalte $(k = 1, \ldots, n)$ auf eine Gestalt zu bringen. bei welcher die Elemente mit Zeilenindex νk $(\nu = 1, 2, \ldots)$ gleich $M_r\left(\dfrac{k}{\delta_k}, k\right)$ sind, während die übrigen Elemente verschwinden.

Für die erste Spalte ist diese Bedingung erfüllt, da auf Grund von (20) und (10) $a_{j1}^{(1)} = N_r(1, 1) = M_r(1, 1)$ ist.

Die Möglichkeit der gewünschten Umformung besteht aber auch für $k = 2$. Gilt nämlich $\delta_2 = 1$, dann ist wegen (20) $a_{2j-1\,2}^{(1)} = N_r(1, 1)$, $a_{2j\,2}^{(1)} = N_r(2, 2)$. Subtrahieren wir jetzt die erste Spalte von der zweiten. Nach dieser Operation sind die Elemente der zweiten Spalte gleich 0 bzw. wegen (11) gleich $N_r(2, 2) - M_r(1, 1) = M_r(2, 2)$, je nachdem die Zeilenindizes ungerade oder gerade sind. Ist aber $\delta_2 = 2$, dann sind wegen (20) und (10) die Elemente der zweiten Spalte gleich 0 bzw. gleich $N_r(1, 2) = M_r(1, 2)$, je nachdem die Zeilenindizes ungerade oder gerade sind.

Nehmen wir jetzt an, daß wir durch Umformungen, welche den Wert der Determinante nicht beeinträchtigen, die ersten $k-1$ Spalten der Determinante (21) bereits auf die gewünschte Gestalt gebracht haben, d. h., daß in der j-ten Spalte für $j = 1, \ldots, k-1$ das Element mit Zeilenindex νj $(\nu = 1, 2, \ldots)$

gleich $M_r\left(\frac{j}{\delta_j}, j\right)$ ist, die übrigen Elemente aber verschwinden. Wir zeigen, daß dann auch die k-te Spalte auf eine ebensolche Gestalt gebracht werden kann.

Ist $\delta_k = k$, dann stehen in der k-ten Spalte — wegen (20) — auf den Stellen, deren Zeilenindizes ganzzahlige Vielfache von k sind, die Elemente $N_r(1, k) = M_r(1, k)$, während die übrigen Elemente verschwinden, so daß auch diese Spalte die gewünschte Gestalt hat.

Es sei jetzt $\delta_k < k$. Nach (20) sind in diesem Falle in der k-ten Spalte nur diejenigen Elemente von 0 verschieden, deren Zeilenindizes Vielfache von δ_k sind, und zwar gilt für diese

$$a^{(\delta_k)}_{\nu\delta_k k} = N_r\left(\left(\nu, \frac{k}{\delta_k}\right), \left(\nu, \frac{k}{\delta_k}\right)\delta_k\right) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Es seien $d_1 = 1 < d_2 < \cdots < d_s < \frac{k}{\delta_k}$ sämtliche Teiler von $\frac{k}{\delta_k}$. Da $r > 0$ ist, können wir auf Grund von Lemma 1. b) durch Multiplikation der Elemente der $d_1\delta_k$-ten Spalte mit einem geeigneten Faktor erreichen, daß die nichtverschwindenden Elemente dieser Spalte gleich $N_r(1, \delta_k)$ sein sollen. Falls wir jetzt die derart umgeformte $d_1\delta_k$-te Spalte von der k-ten Spalte subtrahieren, so werden in dieser außer denjenigen Elementen, welche bereits ursprünglich gleich 0 waren, auch diejenigen Elemente verschwinden, für welche $\left(\nu, \frac{k}{\delta_k}\right) = 1$ gilt. Wo aber $\left(\nu, \frac{k}{\delta_k}\right) > 1$ ist, dort tritt an die Stelle des Elementes mit dem entsprechenden Zeilenindex $\nu\delta_k$ auf Grund von (10) der Ausdruck $N_r\left(\left(\nu_k, \frac{k}{\delta_k}\right), \left(\nu, \frac{k}{\delta_k}\right)\delta_k\right) - M_r(1, \delta_k)$. Da jeder Teiler von d_2 zugleich auch Teiler von $\frac{k}{\delta_k}$ ist, kann d_2, außer sich selbst, nur d_1 als Teiler haben. Dann steht aber wegen (11) in der k-ten Spalte an denjenigen Stellen mit Zeilenindizes $\nu\delta_k$, für welche $\left(\nu, \frac{k}{\delta_k}\right) = d_2$ gilt, der Ausdruck $N_r(d_2, d_2\delta_k) - M_r(1, \delta_k) = M_r(d_2, d_2\delta_k)$. Multiplizieren wir nun die Elemente der $d_2\delta_k$-ten Spalte mit einem entsprechenden Faktor, dann können wir wegen $r > 0$ auf Grund von Lemma 1. b) erreichen, daß die Elemente, deren Zeilenindizes Vielfache von $d_2\delta_k$ sind, den Wert $M_r(d_2, d_2\delta_k)$ annehmen, während die übrigen Elemente natürlich verschwinden. Subtrahieren wir die derart umgeformte $d_2\delta_k$-te Spalte aus der k-ten, dann wird aus allen Elementen mit Zeilenindex $\nu\delta_k$, für welche $d_2 \,\Big|\, \left(\nu, \frac{k}{\delta_k}\right)$ gilt, $M_r(d_2, d_2\delta_k)$ abgezogen, so daß in dieser Spalte außer denjenigen Elementen, welche ursprünglich gleich Null waren, jetzt auch noch die der Bedingung $\left(\nu, \frac{k}{\delta_k}\right) = d_2$ genügenden Elemente mit Zeilenindex $\nu\delta_k$ verschwinden. Da $d_3 \Big| \frac{k}{\delta_k}$ ist, hat d_3 außer sich selbst nur die Teiler d_1 und d_2. Folglich steht nach unseren obigen Darlegungen und auf Grund von (11) an denjenigen Stellen mit Zeilenindex $\nu\delta_k$, für welche $\left(\nu, \frac{k}{\delta_k}\right) = d_3$ ist, $M_r(d_3, d_3\delta_k)$. Unter Zuhilfenahme der $d_3\delta_k$-ten Spalte können wir auf die schon erörterte Weise erreichen, daß aus sämtlichen Zeilen mit Index $\nu\delta_k$ der k-ten Spalte, für welche $d_3 \Big| \left(\nu, \frac{k}{\delta_k}\right)$ gilt, $M_r(d_3, d_3\delta_k)$ subtrahiert wird. Damit erreichen wir, daß außer den bereits verschwindenden Elementen jetzt auch noch in denjenigen Zeilen vom Index $\nu\delta_k$ Nullen auftreten, für welche die Bedingung $\left(\nu, \frac{k}{\delta_k}\right) = d_3$ erfüllt ist. Dieses Verfahren setzen wir nur fort. Nach dem $(s-1)$-ten Schritt verschwinden in der k-ten Spalte sämtliche Elemente mit Ausnahmen derjenigen vom Zeilenindex $\nu\delta_k$, für welche $d_s \Big| \left(\nu, \frac{k}{\delta_k}\right)$ gilt. In den $\left(\nu, \frac{k}{\delta_k}\right) = d_s$ entsprechenden Zeilen mit Index $\nu\delta_k$ steht nach (11) $M_r(d_s, d_s\delta_k)$. Jetzt können wir, wiederum wegen $r > 0$ auf Grund von Lemma 1. b) mit Hilfe der $d_s\delta_k(<k)$-ten Spalte erreichen, daß in der k-ten Spalte, außer den bereits verschwindenden Elementen, auch in den $\left(\nu, \frac{k}{\delta_k}\right) = d_s$ genüge leistenden Zeilen mit Index $\nu\delta_k$, d. h. in sämtlichen Zeilen mit Ausnahme derjenigen vom Index νk Null stehen soll. Da $\frac{k}{\delta_k}$ außer sich selbst die Teiler $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_s$ hat, so treten nach den soeben erörterten Umformungen, welche den Wert der Determinante nicht beeinträchtigen, an die Stelle der Elemente mit Index νk der Ausdruck

$$N_r\left(\frac{k}{\delta_k}, k\right) - \sum_{\substack{d \,\big|\, \frac{k}{\delta_k} \\ d < \frac{k}{\delta_k}}} M_r(d, d\delta_k)$$

d. h. kraft (11) der Ausdruck $M_r\left(\frac{k}{\delta_k}, k\right)$. Damit haben wir unseren Lemma für $r \geqq 1$ beweisen.

b) Im Falle $r=0$ ergibt sich aus (20)

$$a_{jk}^{(d)}=\begin{cases}1 & \text{für } d|j, d|k,\\ 0 & \text{in allen anderen Fällen.}\end{cases} \tag{22}$$

Es sei $\delta_k=k$, dann ist jedes Element der Hauptdiagonale der Determinante (21) gleich 1, die Elemente über der Hauptdiagonale verschwinden, und folglich ist der Wert der Determinante gleich 1. Wegen (10) ist aber jeder Faktor auf der rechten Seite von (21) gleich 1, so daß (21) auch in diesem Falle gültig ist. Ist hingegen $\delta_k<k$, dann gibt es in der Folge $1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ mindestens zwei übereinstimmende Zahlen, und das bedeutet auf Grund von (22), daß mindestens zwei Spalten der Determinante (21) übereinstimmen, d. h. daß die Determinante (21) verschwindet. Da aber $\frac{k}{\delta_k}>1$ ist, gilt auf Grund von Lemma 1. b) $M_0\left(\frac{k}{\delta_k}, k\right)=0$, und wegen des Verschwindens auch der rechten Seite von (21), gilt somit die Identität (21) auch im Falle $r=0$.

§ 4.

Es sei $k=p_1^{e_1}\ldots p_u^{e_u}$ die Primfaktorzerlegung der natürlichen Zahl k. Wir führen die zahlentheoretischen Funktionen

$$\Phi_r(k)=\begin{cases}1 & \text{für } k=1,\\ k^{r+1}\left(1-\frac{1}{p_1^{r+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_u^{r+1}}\right) & \text{für } k=2,3,\ldots\end{cases}$$
$$(r=0,1,2,\ldots)$$

ein. Wegen $\Phi_0(k)=\varphi(k)$ darf diese Funktion $\Phi_r(k)$ als Verallgemeinerung der Eulerschen φ-Funktion angesehen werden. $\Phi_r(k)$ gibt die Anzahl der Elemente in der vollständigen Restfolge der Zahl k^{r+1} an, deren größter gemeinsamer Teiler mit k^{r+1} keine Primzahlpotenz p^α mit $\alpha>r$ enthält.

Der Satz, dessen Beweis zu erbringen der eigentliche Ziel dieser Arbeit ist, lautet nun folgendermaßen:

Satz.

$$D_{r+1}=\begin{vmatrix}(1,1)^{r+1} & (1,2)^{r+1} & \ldots & (1,n)^{r+1}\\ (2,1)^{r+1} & (2,2)^{r+1} & \ldots & (2,n)^{r+1}\\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot\\ (n,1)^{r+1} & (n,2)^{r+1} & \ldots & (n,n)^{r+1}\end{vmatrix}=\Phi_r(1)\,\Phi_r(2)\ldots\Phi_r(n) \tag{23}$$
$$(r=0,1,2,\ldots).$$

BEWEIS. Wenden wir wieder die Bezeichnungen von (20) an, so erhalten wir mit Rücksicht auf (9)

$$(24)\qquad (j,k)^{r+1} = a_{jk}^{(1)}\varphi(1) + a_{jk}^{(2)}\varphi(2) + \cdots + a_{jk}^{(n)}\varphi(n) \qquad (j,k=1,\ldots,n).$$

Indem wir nun diese Ausdrücke an der linken Seite von (23) einsetzen, erhalten wir

$$(25)\qquad D_{r+1} = \sum_{d_1=1}^{n}\cdots\sum_{d_n=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11}^{(d_1)} & \ldots & a_{1n}^{(d_n)} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n1}^{(d_1)} & \ldots & a_{nn}^{(d_n)} \end{vmatrix} \varphi(d_1)\ldots\varphi(d_n).$$

Da gemäß (20) auf der rechten Seite von (24) bei festbleibendem k für jeden Index j diejenigen Glieder verschwinden, deren oberer Index kein Teiler von k ist, so beträgt auf der rechten Seite von (25) die Anzahl der nicht identisch verschwindenden Determinanten $\varrho(1)\varrho(2)\ldots\varrho(n)$, wobei durch $\varrho(k)$ die Anzahl sämtlicher Teiler von k bezeichnet wird. Falls wir in (25) nur diese Determinanten ausschreiben, so ergibt sich

$$D_{r+1} = \sum_{\delta_2|2}\cdots\sum_{\delta_n|n} \begin{vmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(\delta_2)} & \ldots & a_{1n}^{(\delta_n)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(\delta_2)} & \ldots & a_{2n}^{(\delta_n)} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(\delta_2)} & \ldots & a_{nn}^{(\delta_n)} \end{vmatrix} \varphi(1)\varphi(\delta_2)\ldots\varphi(\delta_n).$$

Die in der Summe auf der rechten Seite auftretenden Determinanten haben offenbar dieselbe Struktur, wie die Determinante (21). Setzen wir für diese den Wert von (21) ein, so erhalten wir

$$(26)\qquad D_{r+1} = S_r(1)\,S_r(2)\ldots S_r(n),$$

wobei

$$(27)\qquad S_r(k) = \sum_{\delta_k|k} M_r\left(\frac{k}{\delta_k}, k\right)\varphi(\delta_k)$$

ist. (23) wird zu einer evidenten Behauptung, falls wir nun zeigen können, daß

$$(28)\qquad S_r(k) = \Phi_r(k).$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung ist trivial für $k=1$. Für $k>1$ kann nun auf folgende Weise eingesehen werden:

Da (12) gilt und $\varphi(k)$ eine multiplikative Funktion ist, ist auch $S_r(k)$ multiplikativ, d. h.

$$(29)\qquad S_r(k) = S_r(p_1^{e_1})\ldots S_r(p_u^{e_u}).$$

Nunmehr berücksichtigen wir die Tatsache, daß die Summe

$$S_r(p^e) = \sum_{t=0}^{e} M_r(p^{e-t}, p^e)\,\varphi(p^t)$$

wegen (10) und (13) auch in der Gestalt

$$S_r(p^e)=\sum_{t=0}^{e-1}[N_r(p^{e-t},p^e)-N_r(p^{e-1-t},p^{e-1})]\,\varphi(p^t)+N_r(1,p^e)\,\varphi(p^e)$$

geschrieben werden kann. Hieraus ergibt sich aber auf Grund von (9) der Ausdruck

$$S_r(p^e)=p^{(r+1)e}-p^{(r+1)(e-1)}$$

und so folgt mit Rücksicht auf (29) unsere Behauptung (28).

Setzen wir in (24) beliebige $b_1, b_2, \ldots, b_n$ für $\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(n)$, so besteht die Identität (26) mit $b_1, b_{\delta_2}, \ldots, b_{\delta_n}$ statt $\varphi(1), \varphi(\delta_2), \ldots, \varphi(\delta_n)$ auch für die so gewonnenen Determinante D_{r+1}. Die hieraus entspringende Aussage ergibt für $r=0$ einen Determinantensatz von MANSION ([3]).

Literatur.

[1] P. BACHMANN, Grundlehren der neueren Zahlentheorie, *Berlin—Leipzig*, 1921.

[2] B. GYIRES, Über die Faktorisation im Restklassenring mod *m*, *Publ. Math. Debrecen* **1** (1949), 51—55.

[3] P. MANSION, Généralisation d'un théorème de M Smith, *Ann. Soc. Sc. Bruxelles* **2** (1878), 211—224.

[4] ST. SMITH, On the value of a certain arithmetical determinant, *Proc. London Math. Soc.* **7** (1875—76), 208—212.

(Eingegangen am 9. Februar 1957.)