Publ. Math. Debrecen
48 / 1-2 (1996), 1–11

Representation hypergéométrique de la solution pour une classe d'operateurs d'ordre deux

Par A. BENTRAD (Reims)

Abstract. This paper deals with the Cauchy problem for a certain class of Tricomi's type operator. We use the theory of hypergeometric function to construct the solution and give its analytical continuation.

0. Introduction

J. Urabe [9] a étudié, au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^2$, le problème de Cauchy, à coefficients holomorphes, suivant:

$$\tag{0.1} \begin{cases} P(x,D)u = 0 \\ u(0,x_1) = 0 \\ D_0 u(0,x_1) = (-1)^\ell \, \ell! \, x_1^{-\ell}, \quad \ell \in \mathbb{N}\,, \end{cases}$$

où

$$P(x,D) = D_0^2 - x_0 D_1^2 + a_1(x,D),$$
$$a_1(x,D) = a(x)D_0 + b(x)D_1 + c(x), \quad D_j = \partial/\partial x_j$$

Dans [10], reprenant la même méthode, il étudie, au voisinage de 0 de $\mathbb{C}^{n+1}$, le problème pour un opérateur linéaire, à coefficients holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$, du même type à savoir

$$P(x,D) = P_1^2(x,D) - x_0 Q(x,D) + R(x,D)$$
$$\text{où } \operatorname{ord} P_1(x,D) = m, \ \operatorname{ord} Q(x,D) = 2m \text{ et } \operatorname{ord} R(x,D) \le 2m-1\,.$$

Seulement, la solution qu'il a construite dans [9] et [10] présente des anomalies.

Mathematics Subject Classification: 35 C.

Notre objectif dans ce papier est de:

i) montrer que la solution dans [9] et [10] n'a pas de sens.

ii) étendre l'étude à des données présentant des singularités plus générales.

Nota: pour simplifier les calculs, on se limitera à $D_0^2 - x_0 D_1^2 + a_1(x, D)$.

1. Position du problème

On considère, au voisinage Ω de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$, l'opérateur linéaire à coefficients holomorphes: $P = D_0^2 - x_0 D_1^2 + \sum_{j=0}^{n} a_j(x) D_j + b(x)$. Soit le problème de Cauchy à données singulières:

$$(1.0) \qquad \begin{cases} Pu = 0 \\ D_0^h\, u/s = w_h(x'); \quad h = 0, 1;\ x' = (x_1, \ldots, x_n)\,. \end{cases}$$

Où $S : x_0 = 0$. Les $w_h(x')$ sont singulières sur $T : x_0 = x_1 = 0$. Plus précisement, les données de Cauchy sont de la forme:

$$w(x') = x_1^\beta (\ln x_1)^q v_0(x') + x_1^\alpha v_1(x'), \quad \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{C},\ q \in \mathbb{N}\,.$$

La fonction $x_1^\beta (\ln x_1)^q$ est x_1-Fuchsienne à croissance lente (cf. [4]). $v_0(x')$ et $v_1(x')$ sont holomorphes sur $\Omega \cap S$. Les w_h sont donc holomorphes au voisinage de $y \in \Omega \cap S - T$. Par suite d'après le théorème de Cauchy-Kowalewski, le problème (1.0) alors admet une unique solution holomorphe au voisinage de y.

La méthode utilisée pour résoudre ce problème consiste à chercher la solution sous la forme d'une série de fonctions hypergéométriques qu'on construira.

Montrons d'abord que la solution construite dans [9] est incorrecte en effet, l'auteur cherche la solution de (0.1) sous la forme:

$$u(x) = \sum_{n \geq -\ell}^{\infty} u_n X_{n-\ell}(x) + v_n D_0 X_{n-\ell} + h_n Y_{n-\ell}(x) + g_n D_0 Y_{n-1}(x)\,.$$

ℓ étant l'ordre du pôle.

$X_\alpha = \partial_\alpha U_\alpha$ et $Y_\alpha = \partial_\alpha V_\alpha$. U_α et V_α représentent les solutions de:

$$(1.1) \begin{cases} D_0^2 U_\alpha - x_0 D_1^2 U_\alpha = 0 \\ U_\alpha(0, x_1) = x_1^\alpha / \Gamma(\alpha + 1) \\ D_0 U_\alpha(0, x_1) = 0 \end{cases} \qquad (1.1)' \begin{cases} D_0^2 V_\alpha - x_0 D_1^2 V_\alpha = 0 \\ V_\alpha(0, x_1) = 0 \\ D_0 V_\alpha(0, x_1) = x_1^\alpha / \Gamma(\alpha + 1) \end{cases}$$

On voit que U_α et V_α jouent un rôle primordial dans la construction de la solution de (0.1). L'anomalie se situe justement au niveau de la résolution des problèmes (1.1) et (1.1)$'$. En effet s'inspirant des travaux de [3], concernant l'opérateur de Tricomi dans le réel, l'auteur ramène l'étude de (1.1) à celle d'une équation hypergéométrique en posant $U_\alpha = \xi^\alpha u$, où $\xi = x_1 - \frac{2}{3}x_0^{3/2}$ est l'une des coordonnées caractéristiques. U_α est donnée alors par:

$$(*)\quad U_\alpha = F\left(\frac{1}{6}, -\alpha, \frac{1}{3}, s\right)\xi^\alpha/\Gamma(\alpha+1) \quad \text{où } s = (1-\eta/\xi) = -4\,x_0^{3/2}/3\xi$$

F étant la fonction hypergéométrique de Gauss et $\eta = x_1 + \frac{2}{3}x_0^{3/2}$ la deuxième coordonnée caractéristique. Si dans le réel ceci ne pose pas problème, dans le complexe la solution U_α ainsi construite n'a pas de sens ($x_0^{3/2}$ est multiforme sur $S : x_0 = 0$). Montrons le. Le problème (1.1) étant non caractéristique, il admet une unique solution holomorphe au voisinage du point $(0, x_1)$, $x_1 \neq 0$ (théorème de Cauchy-Kowalewski).

Or U_α donnée par $(*)$ n'est pas holomorphe au point $(0, x_1)$. En effet si l'on calcule formellement $D_0^2 U_\alpha$ on a:

$$D_0^2 U_\alpha = -F\left(\frac{1}{6}, -\alpha, \frac{1}{3}; s\right)x_0^{-1/2}\alpha\xi^{\alpha-1}/\,2\Gamma(\alpha+1) + \cdots + \cdots\,.$$

On voit déjà que pour $x_0 = 0$, $D_0^2 U_\alpha$ devient infini. Donc l'anomalie se situe au niveau du changement de fonction $U_\alpha = \xi^\alpha u$.

2. Etude du problème (1.0)

Vu la forme des données de Cauchy et en tenant compte du principe superposition, il suffit d'étudier les deux problèmes de Cauchy:

$$(2.1)\ \begin{cases} Pu = 0 \\ u(0, x') = x_1^\alpha v_1(x') \\ D_0 u(0, x') = 0 \end{cases} \qquad (2.1)'\ \begin{cases} Pu = 0 \\ u(0, x') = \left(x_1^\beta \ln x_1\right)^q v_0(x') \\ D_0 u(0, x') = 0\,. \end{cases}$$

Notre résultat principal est le:

Théorème. *Le problème* (2.1) *resp.* (2.1)$'$ *admet une unique solution* u *ramifiée autour de* $K : x_1^2 - (4/9)\,x_0^3 = 0$. *Autrement dit, il existe* *un disque ouvert $D_R \in V(0)$ tel que u se prolonge analytiquement au revêtement universal $R(D_R - K)$. En outre, $u(x)$ est représentée par:*

$$\begin{aligned}
u(x) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} u_\ell(x)U_\ell^\alpha(x) + g_{\ell-1}(x)D_0U_\ell^\alpha(x) + v_\ell(x)V_\ell^\alpha(x)\\
&\quad + h_{\ell-1}(x)D_0^\alpha V_\ell(x)\\
u(x) &= \sum_{0}^{\infty} u_\ell(x)D_\beta^q U_\ell^\beta(x) + g_{\ell-1}(x)D_0D_\ell^q U_\ell^\beta(x) + v_\ell(x)D_\beta^q V_\ell^\beta(x)\\
&\quad + h_{\ell-1}(x)D_0D_\beta^q V_\ell^\beta(x)
\end{aligned}$$

où les $u_\ell, v_\ell, g_{\ell-1}$ et $h_{\ell-1}$ sont holomorphes sur D_R.

Remarque. Si $\alpha = \beta$, le problème (2.1) est un cas particulier du problème $(2.1)'$. Il correspond au cas $q = 0$. Par commodité, nous noterons β au lieu de α car la solution de $(2.1)'$ se déduit de celle de (2.1).

3. Calculs préliminaires

Dans ce paragraphe, nous allons construire les suites de fonctions vérifiant les formes d'ondes de Ludwig [5]. Nous définissons U_ℓ^β et V_ℓ^β comme solution respectivement, des problèmes de Cauchy:

$$(3.1)\quad \begin{cases} (D_0^2 - x_0D_1^2)U_\ell^\beta = 0\\ U_\ell^\beta(0,x_1) = D_1^{-\ell}x_1^\beta\\ D_0U_\ell^\beta(0,x_1) = 0\end{cases} \qquad (3.2)\quad \begin{cases} (D_0^2 - x_0D_1^2)V_\ell^\beta = 0\\ V_\ell^\beta(0,x_1) = 0\\ D_0V_\ell^\beta(0,x_1) = D_1^{-\ell}x_1^\beta\end{cases}$$

$$D_1^{-\ell} = D_1^{-\ell} \circ D_1^{-\ell} \circ \cdots \circ D_1^{-\ell} \quad \text{avec} \quad D_1^{-\ell} = \int_0^{x_1} dt, \quad \beta \in \mathbb{C},\ \ell \in \mathbb{N}\,.$$

De la même manière, nous définissons $D_\beta^q U_\ell^\beta$ et $D_\beta^q V_\ell^\beta$ comme solution de:

$$(3.3)\begin{cases} (D_0^2 - x_0D_1^2)D_\beta^q U_\ell^\beta = 0\\ D_\beta^q U_\ell^\beta(0,x_1) = \Big((\ln x_1)^q - D_\beta(\ln \prod_{i=1}^{\ell}(\beta+i)\cdot(\ln x_1)^{q-1} - \cdots\\ \qquad -D_\beta^q(\ln \prod_{i=1}^{\ell}(\beta+1)\Big)\cdot D_1^{-\ell}x_1^\beta\\ D_0D_\beta^q U_\ell^\beta(0,x_1) = 0\end{cases}$$

$$
(3.4)\begin{cases}
(D_0^2 - x_0 D_1^2) D_\beta^q V_\ell^\beta = 0 \\
D_\beta^q V_\ell^\beta(0, x_1) = 0 \\
D_0 D_\beta^q V_\ell^\beta(0, x_1) = \Big((\ln x_1)^q - D_\beta (\ln \prod_{i=1}^{\ell} (\beta+1) \cdot (\ln x_1)^{q-1} - \cdots \\
\quad - D_\beta^q (\ln \prod_{i=1}^{\ell} (\beta+1) \Big) \cdot D_1^{-\ell} x_1^\beta \,.
\end{cases}
$$

En posant $\upsilon_\ell^\beta = U_\ell^\beta - D_1^{-\ell} x_1^\beta$, le problème (3.1) est équivalent:

$$
\begin{cases}
(D_0^2 - x_0 D_1^2) \upsilon_\ell^\beta = \upsilon(x_0, x_1) \\
D_0^h \upsilon_\ell^\beta / S = 0; \quad h = 0, 1 \,.
\end{cases}
$$

En cherchant la solution sous la forme: $\upsilon_\ell^\beta = \sum_{p=z}^{\infty} \upsilon_p(x_1) \cdot (x_0)^p / p!$ et en posant: $Z = (4/9)(x_0^3 / x_1^2)$, on obtient:

$$
\upsilon_\ell^\beta = D_1^{-\ell} x_1^\beta \left\{ F\left(\frac{-\ell-\beta}{2}, \frac{-\ell-\beta+1}{2}, 2/3; Z \right) - 1 \right\},
$$

F désigne la fonction hypergéométrique de Gauss. D'où $U_\ell^\beta = D_1^{-\ell} x_1^\beta F\left(\frac{-\ell-\beta}{2}, \frac{-\ell-\beta+1}{2}, 2/3; Z\right)$. En procédant de la manière, on obtient la solution du problème (3.2) $V_\ell^\beta = x_0 D_1^{-\ell} x_1^\beta F\left(\frac{-\ell-\beta}{2}, \frac{-\ell-\beta+1}{2}, 2/3; Z\right)$. Par suite, $D^q {U^\beta}_{\beta\ell}$ et $D^q {V^\beta}_{\beta\ell}$ satisfont respectivement, aux problèmes (3.3) et (3.4).

Exemple.

$$
\begin{cases}
(D_0^2 - x_0 D_1^2) U_0^\beta = 0 \,. \\
U_0^\beta(0, x_1) = x_1^{-1/3} \,. \\
D_0 U_0^\beta(0, x_1) = 0 \,.
\end{cases}
$$

La solution de ce problème est donnée par $U_0^\beta(x_0, x_1) = 1/(x_1^2 - (4/9)x_0^3)^{1/6}$.

U_0^β est bien ramifiée autour de $K : x_1^2 - (4/9)x_0^3 = 0$.

Lemme 1. *Les fonctions* (U_ℓ^β) *et* (V_ℓ^β) *vérifient les relations suivantes:*

i) $D_1 U_\ell^\beta = U_{\ell-1}^\beta$ iii) $D_1 D_\beta^q U_\ell^\beta = D_\beta^q U_{\ell-1}^\beta$

ii) $D_1 V_\beta^q = V_{\ell-1}^\beta$ iv) $D_1 D_\beta^q V_\ell^\beta = D_\beta^q V_{\ell-1}^\beta$.

Preuve. Il suffit de montrer (i). $U_{\ell-1}^{\beta}$ est l'unique solution du problème de Cauchy:

$$(3.5)\qquad \begin{cases} (D_0^2 - x_0 D_1^2) U_{\ell-1}^{\beta}(x_0, x_1) = 0 \\ U_{\ell-1}^{\beta}(0, x_1) = D_1^{-\ell+1} x_1^{\beta} \\ D_0 U_{\ell-1}^{\beta}(0, x_1) = 0 \,. \end{cases}$$

D'autre part:

$$D_1\ U_\ell^\beta = D_1^{-\ell+1} x_1^\beta F\left(\frac{-\ell-\beta}{2}, \frac{-\ell-\beta+1}{2}, 2/3, Z\right) - \\ - D_1^{-\ell} x_1^\beta (8/9)(x_0/x_1)^3 F'_Z\left(\frac{-\ell-\beta}{2}, \frac{-\ell-\beta+1}{2}, 2/3, Z\right)$$

$$D_0\ D_1 U_\ell^\beta = D_1^{-\ell+1} x_1^\beta (4/3)(x_0/x_1)^2 F'_Z(\quad) + (8/9)\cdot x_0 D_1^{-\ell} x_1^\beta F'_Z(\quad) + \\ + (16/3) D_1^{-\ell} x_1^\beta x_0^4 F_Z(\dots)$$

$$(D_0^2 - x_0 D_1^2) D_1 U_\ell^\beta = D_1 (D_0^2 U_\ell^\beta - x_0 D_1^2 U_\ell^\beta) = 0$$

i.e:

$$\begin{cases} (D_0^2 - x_0 D_1^2) D_1 U_\ell^\beta = 0 \\ D_1 U_\ell^\beta (0, x_1) = D_1^{-\ell+1} x_1^\beta \\ D_0 D_1 U_\ell^\beta (0, x_1) = 0 \,. \end{cases}$$

Par suite: $D_1 U_\ell^\beta = U_{\ell-1}^\beta$ (unicité de la solution du p.c (3.5)). De la même menière, nous vérifions (ii), (iii) et (iv).

4. Construction de la solution formelle

Nous construisons d'abord la solution du problème (2.1). En appliquant l'opérateur P à: $u(x) = \sum\limits_{\ell=0} u_\ell U_\ell^\beta + g_{\ell-1} D_0 U_\ell^\beta + v_\ell V_\ell^\beta + h_{\ell-1} D_0 V_\ell^\beta$

$$Pu = \sum_{\ell=0}^{\infty} \Big\{ \left[(2x_0 D_0 + 1)\, g_\ell + 2x_0 D_1 u_\ell + x_0 a_0 g_\ell + a_1 u_\ell + P u_{\ell-1}\right] U_{\ell-1}^\beta \\ + \left[2D_0 u_\ell - 2x_0 D_1 g_\ell + a_0(x) u_\ell + a_1(x) g_\ell + P g_{\ell-1}\right] D_0 U_\ell^\beta$$

$$+\left[(2x_0D_0+1)h_\ell - 2x_0D_1v_\ell + x_0a_0h_\ell + a_1v_\ell + Pv_{\ell-1}\right]V_{\ell-1}^{\beta}$$
$$+\left[2D_0v_\ell - 2x_0D_1h_\ell + a_0(x)v_\ell + a_1(x)h_\ell + Ph_{\ell-1}\right]D_0U_\ell^{\beta}\Big\}$$

où $u_{-1}=v_{-1}=g_{-1}=h_{-1}=0$.

D'autre part, les conditions de Cauchy donnent:

$$u(0,x') = \sum_{\ell=0}^{\infty} u_\ell(0,x')U_\ell^{\beta}(0,x') + h_{\ell-1}(0,x')D_0V_\ell^{\beta}(0,x') = x_1^{\beta}v_1(x')\,,$$

$$\begin{aligned} D_0u(0,x') = \sum_{\ell=0}^{\infty} & D_0u_\ell(0,x')U_\ell^{\beta}(0,x') + v_\ell(0,x')D_0U_\ell^{\beta}(0,x') \\ & + D_0h_{\ell-1}(0,x')D_0V_\ell^{\beta}(0,x') = 0\,, \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} & u_0(0,x') = v_1(x') \\ & u_\ell(0,x') = -h_{\ell-1}(0,x'), \quad \ell \geq 1 \\ & v_\ell(0,x') = -D_0u_\ell(0,x') - D_0h_{\ell-1}(0,x'), \quad \ell \geq 0\,. \end{aligned}$$

Pour que u soit la solution du problème de Cauchy, il suffit que l'on ait:

$$\begin{aligned} & (2x_0D_0+1)g_\ell - 2x_0D_1u_\ell + x_0a_0g_\ell + a_1u_\ell = -Pu_{\ell-1} \\ & 2D_0u_\ell - 2x_0D_1g_\ell + a_0u_\ell + a_1g_\ell = -Pg_{\ell-1} \\ & u_0(0,x') = v_1(x'), \quad u_\ell(0,x') = -h_{\ell-1}(0,x') \quad h>1 \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} & (2x_0D_0+1)h_\ell - 2x_0D_1v_\ell + x_0a_0h_\ell + a_1v_\ell = -Pv_{\ell-1} \\ & 2D_0v_1 - 2x_0D_1h_\ell + a_0(x)v_\ell + a_1(x)h_\ell = -Ph_{\ell-1} \\ & v_\ell(0,x') - D_0u_\ell(0,x') - D_0h_{\ell-1}(0,x'), \quad \ell>0\,. \end{aligned} \tag{4.1$'$}$$

Remarquons qu'on est retombé exactement sur les équations de [10], [11] et qu'en appliquant P à la solution formelle du problème $(2.1)'$ nous obtenons de nouveau les équations (4.1) et $(4.1)'$. Autrement dit les systèmes (4.1) et $(4.1)'$ ne dépendent pas de la nature des singularités des données. Cela est dû à la forme de la solution (série de fonctions hypergéométriques dont les singularités sont portées uniquement par ces foctions). (4.1) et $(4.1)'$ définissent deux système linéaires du premier ordre du type de Fuchs dont les solutions sont non seulement uniques et holomorphes au voisinage de l'origine, mais admettent en plus un domaine d'existence d'holomorphie commun (pour la preuve cf. [10] et [11]).

Nous rappelons, brièvement, la méthode. Les fonctions de transport sont déterminées par induction en utilisant la méthode des coefficients indéterminées de Fuchs. La domaine d'holomorphie commun est déterminé par la méthode des fonctions majorantes qui nous permet d'affirmer l'existence d'un réel $r > 0$ tel que: $|u_\ell|$, $|v_\ell|$, $|g_{\ell-1}|$, $|h_{\ell-1}| < C\,\ell!\,r^\ell$.

5. Ramification de la solution. Convergence de la solution.

Etant donné la forme de la solution des problèmes (les singularités sont portées uniquement par les fonctions hypergéométriques) l'étude la ramification revient à donner le prolongement analytique des germes de fonctions auxilliaires U_ℓ^β et V_ℓ^β et leurs estimations pour la convergence. U_ℓ^β et V_ℓ^β définissent des fonctions multiformes de la variable Z, ayant pour points singuliers $Z = 0$, $Z = 1$, $Z = \infty$. D'après la théorie des fonctions hypergéométriques (cf. [7]), les séries U_ℓ^β et V_ℓ^β pour $|Z| < 1$, se prolongent analytiquement en les fonctions notées aussi U_ℓ^β et V_ℓ^β et définies par: pour $|1-z| < 1$

$$\begin{aligned} U_\ell^\beta &= A_1 D_1^{-1} x_1^\beta F(a,b,a+b-c+1;1-z) \\ &\quad + A_2 D_1^{-\ell} x_1^\beta (1-z)^{c-a-b} \cdot F(c-a,c-b,c-a-b+1;1-z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_\ell^\beta &= A_3 x_0 D_1^{-\ell} x_1^\beta F(a',b',a'+b'-c'+1;1-z)+ \\ &\quad + A_4 d_1^{-\ell} x_1^\beta x_0 (1-z)^{c-a-b} F(c'-a',c'-b',c'-a'-b'+1;1-z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_\ell^\beta &= A_5 D_1^{-\ell} x_1^\beta (1-z)^{-a} F\left(a,c-b,a-b+1;\frac{1}{1-z}\right)+ \\ &\quad + A_6 D_1^{-\ell} x_1^\beta (1-z)^{b} F\left(b,c-a,b-a+1;\frac{1}{1-z}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_\ell^\beta &= A_7 D_1^{-\ell} x_1^\beta x_0 (1-z)^{-a'} F(a',c'-b',a'-b'+1;1/(1-z))+ \\ &\quad + A_8 D_1^{-\ell} x_1^\beta x_0 (1-z)^{-b'} F(b',c'-a',b'-a'+1;1/(1-z)) \\ &\quad \text{pour } |1/(1-z)| < 1 \end{aligned}$$

$$A_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-B)},\quad A_2 = \frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)},\qquad A_5 = \frac{\Gamma(b-a)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)}$$

$$A_6 = \frac{\Gamma(a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)\Gamma(a)},\qquad A_3 = \frac{\Gamma(c')\Gamma(c'-a'-b')}{\Gamma(c'-a')\Gamma(c'-b')},\quad A_4 = \frac{\Gamma(a'+b'+c')\Gamma(c')}{\Gamma(a')\Gamma(b')}$$

$$A_7 {=} \frac{\Gamma(b'-a')\Gamma(c')}{\Gamma(c'-a')\Gamma(b')}, \qquad A_8 {=} \frac{\Gamma(a'-b')\Gamma(c')}{\Gamma(c'-b')\Gamma(a')},$$
$$a = a' = \frac{-\ell-\beta}{2}, \qquad b = b' = \frac{-\ell-\beta+1}{2}, \qquad c = -2/3;\; c' = -4/3\,.$$

Notons que les branches de ces fonctions sont uniformes dans chaque domaine considéré. Mais quand Z décrit un lacet autour d'un point singulier la valeur de la branche est multipliée par une constante. En effet, sil'on effectue un tour autour de $Z = 1$ (respect. $Z = \infty$) dansle sens direct, nous obtenons pour $\arg(1-z) = 0$ sur $(0, 1)$:

$$U_\ell^\beta = A_1F_1(\ell,\beta;1-Z) + A_2e^{2\pi i\langle\beta+\ell+1/6\rangle}F_2(\ell,\beta;1-Z)$$
$$V_\ell^\beta = A_3F_3(\ell,\beta;1-z) + A_4e^{2\pi i\langle\ell+\beta+5/6\rangle}F_4(\ell,\beta;1-z)$$
$$U_\ell^\beta = A_5e^{2\pi i\langle\frac{-\ell-\beta}{2}\rangle}F_5(\ell,\beta;1/(1-z)) + A_6e^{2\pi i\langle\frac{-\ell-\beta+1}{2}\rangle}F_6(\ell,\beta;1/(1-z))$$
$$V_\ell^\beta = A_7e^{2\pi i\frac{-\ell-\beta}{2}}F_7(\ell,\beta;1/(1-z)) + A_8e^{2\pi i\langle-\ell-\beta+1\rangle/2}F_8(\ell,\beta;1(1-Z))\,.$$

Les F_i désignent les valeurs des branches initiales. Les fonctions U_ℓ^β et V_ℓ^β sont multiformes. Elles peuvent être uniformisées localement au voisinage de $Z = 0$ ou $Z = 1$, en posant $Z = e^{\pi it}$ ou $Z = e^{\pi it} + 1$. En représentant les fonctions hypergéométriques par leurs séries on obtient le

Lemme 2. *Il existence des constantes positives indépendantes de ℓ, c_β, c'_β et c''_β telles que:*

(i)
$$F\left(\frac{-\ell-\beta}{2}, \frac{-\ell-\beta+1}{2}, -\ell-\beta+3/2-k; z\right) \ll$$
$$\ll c_\beta F\left(\frac{\ell+s}{2}, \frac{\ell+s+1}{2}, \ell+s+3/2+k; z\right)$$

(ii)
$$F\left(\frac{\ell+\beta}{2}+k, \frac{-\ell+\beta+1}{2}+k, 1/2; z\right) \ll$$
$$\ll c'_\beta F\left(\frac{\ell+s}{2}+k, \frac{\ell+s+1}{2}+k, \ell+s+k+1/2; z\right)$$

(iii)
$$F\left(\frac{-\ell-\beta}{2}, \frac{\ell+\beta+1}{2}+k, 1/2; z\right) \ll$$
$$\ll c''_\beta F\left(\frac{\ell+s}{2}, \frac{\ell+s+1}{2}+k, \ell+s+2; z\right)$$

(iv)
$$F\left(\frac{-\ell-\beta+1}{2}, \frac{\ell+\beta}{2}+k, 3/2; z\right) \ll$$
$$\ll c''_\beta F\left(\frac{\ell+s+1}{2}, \frac{\ell+s}{2}+k, \ell+s+2; z\right)$$

où $s = |\operatorname{Re}\beta| + |\operatorname{Im}\beta|$, $k = 2/3$ *ou* $k = 4/3$.

Lemme 3. *Si* a, b, c *et* $c-b-a$ *sont positifs alors:*

$$F(a,b,c;Z) \leq F(a,b,c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\,.$$

En appliquant les Lemmes 2 et 3 et en raisonnant comme dans (2) on à la

Proposition. *Il existe une constante positive* c *et un compact* $\mathbb{K}\subset R$ $(D_R - K)$ *tels que:*

(i)
$$|U_\ell^\beta| \text{ et } |V_\ell^\beta| \leq c\,\frac{r^\ell}{\ell!}\,.$$

Remerciements. Que MM. Les professeurs C. Wagschal et J. Vaillant trouvent ici mes remerciements pour leurs encouragements et conseils.

References

[1] A. Bentrad, Problème de Cauchy à données singulières, *Differentsial'nye Uravneniya* **28** (1992) N° 9 (1992), 1625–1627, 1655, (en russe).

[2] A. Bentrad, Problème de Cauchy caractéristique. Unicité et non unicité de la solution, *Analysis* **14** (1994), 303–310.

[3] F. Frankl, On Cauchy's problem of P.D.E of mixed elliptico-hyperbolic type with initial data on the parabolic line, *Bulletin Acad. Sc. U.R.S.S.* **9** (1944).

[4] Y. Hamada, On the singularities of solutions of Cauchy problem, *R. I. M. S. Kyoto Univ.* **5** (1969).

[5] Hamada, Leray et Wagschal, Systèmes d'équations aux dérivées part, *Journal de maths pures et appliquées* (1976).

[6] J. Kampe de Feriet, La fonction hypergéométrique Gauthiers-Villar.

[7] D. Ludwig, Uniform asymptotic expansions at caustic, *Commun. Pure Appl. Math.* (1966).

[8] T. Ishii, On a representation of the solution of the Cauchy problem with singular data, *Proc. JAP. Acad.* **56(A)** (1980).

[9] D. Schiltz, J. Vaillant et C. Wagschal, Problème de Cauchy ramifié à caractéristiques multiples en involution, *C.R.A.S.* **219** (1980).

[10] J. Urabe, On the theorem of HAMADA for a linear second order equation with variable multiplicities, *J. Math. KYOTO Univ.* **19** (1979).

[11] J. Urabe, On Hamada's theorem for a certain class of operators with variable multiplicities, *J. Math. Kyoto Univ.* (1981).

A. BENTRAD
UNIVERSITÉ DE REIMS
I.U.T. LEONARD DE VINCI
RUE DES CRAYÈRES, 51059 REIMS CEDEX
FRANCE

(Reçu le 28 Décembre 1993; revisé le 15 August 1994)