Über universale homomorphe Bilder und universale Untergruppen von abelschen Gruppen.

Von L. FUCHS in Budapest.

§ 1. Einleitung.*)

In der allgemeinen Theorie der Gruppen spielen die homomorphen Bilder und die Untergruppen eine wesentliche Rolle; jetzt wollen wir ein speziales homomorphes Bild bzw. eine speziale Untergruppe untersuchen, und zwar für den Fall von abelschen Gruppen.

Es sei G eine abelsche Gruppe.[1]) Wir nennen *U ein universales homomorphes Bild* von G, wenn 1. U selbst ein homomorphes Bild von G ist, d h. $G \sim U$, und 2. ist H ein homomorphes Bild von G, so läßt sich eine Untergruppe von U finden, die mit H isomorph ist. Der duale Begriff: Z heißt *eine universale Untergruppe* von G, wenn I. Z eine Untergruppe von G und II. jede Untergruppe von G ein homomorphes Bild von Z ist.

Das Hauptproblem ist nun, diejenigen Gruppen zu charakterisieren, die ein universales homomorphes Bild bzw. eine universale Untergruppe besitzen.

Es ist leicht, solche Gruppen anzugeben, für die ein universales homomorphes Bild bzw. eine universale Untergruppe existiert. Z. B. jede endliche Gruppe besitzt nach dem Hauptsatz der endlichen abelschen Gruppen ein universales homomorphes Bild und eine universale Untergruppe, nämlich sie selbst hat die erwähnten Eigenschaften. Allgemeiner: jede abelsche Gruppe, deren Elemente von beschränkter Ordnung sind (eine sog. beschränkte Gruppe), ist ein universales homomorphes Bild und eine universale Untergruppe von sich selbst. Die Gruppe $\mathcal{C}(p^\infty)$ vom Prüferschen Typ hat ein universales homomorphes Bild, nämlich sich selbst, aber besitzt keine universale Unter-

*) §§ 1—3 hat Verf. auf dem bulgarischen Mathematikerkongreß in Sofia am 13. Oktober 1956 vorgetragen.

[1]) Unter einer Gruppe verstehen wir im folgenden stets eine additiv geschriebene abelsche Gruppe mit mehr als einem Element. Für die Grundlagen der Theorie der abelschen Gruppen weisen wir auf die Arbeiten KUROSCH [6] und KAPLANSKY [5] hin.

gruppe. Dagegen besitzt die unendliche zyklische Gruppe $\mathfrak{C}(\infty)$ kein universales homomorphes Bild, aber sie hat eine universale Untergruppe (beliebige Untergruppe $\neq 0$).

Im folgenden werden wir eine hinreichende und notwendige Bedingung aufstellen, damit eine Gruppe ein universales homomorphes Bild bzw. eine universale Untergruppe habe. Es ist interessant, daß es keine Gruppe mit unendlichem torsionsfreiem Rang gibt, die keine universalen homomorphen Bilder und keine universalen Untergruppen besitzt.

§ 2. Universale homomorphe Bilder von Torsionsgruppen.

Es sei zuerst G eine p-Gruppe. Die Elemente $a_1, \ldots, a_k$ von G heißen unabhängig, wenn aus $n_1 a_1 + \cdots + n_k a_k = 0$ (n_i ganz rational) jeweils $n_1 a_1 = \cdots = n_k a_k = 0$ folgt. Eine unendliche Menge von Elementen (das Nullelement soll stets ausgeschlossen sein) nennt man unabhängig, wenn jede ihrer endlichen Teilmengen unabhängig ist. Die gemeinsame Mächtigkeit der maximalen unabhängigen Systeme ist als der Rang der Gruppe bezeichnet, in Zeichen: $r(G)$[2]. Es gibt unter den Rängen $r(p^n G)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ einen minimalen $\mathfrak{m}$, der *der letzte Rang* von G heißen soll[3]. Es läßt sich zeigen, daß jede p-Gruppe eine direkte Zerlegung besitzt[4]:

$$G = G_1 + G_2, \tag{1}$$

wo G_1 eine beschränkte Gruppe ist und der Rang von G_2 mit dem letzten Rang $\mathfrak{m}$ von G übereinstimmt.

Die Behauptung ist nun:

$$U = G_1 + \sum_{\mathfrak{m}} \mathfrak{C}(p^\infty) \tag{2}$$

ist ein universales homomorphes Bild von G.

Zuerst beweisen wir: $G \sim U$. Dazu genügt es, die Existenz eines Homomorphismus $G_2 \sim U_2 = \sum_{\mathfrak{m}} \mathfrak{C}(p^\infty)$ zu bestätigen. Ist $\mathfrak{m}$ endlich, so gilt $G_2 \cong U_2$; also nehmen wir $\mathfrak{m} \geqq \aleph_0$ an. Nach der Wahl von $\mathfrak{m}$ läßt sich in G_2 eine

[2]) Die gleiche Definition des Ranges gilt für beliebige Gruppen. Nimmt man nur Elemente von unendlicher Ordnung, so erhält man entsprechend den torsionfreien Rang $r_\infty(G)$.

[3]) Dieser Begriff wurde in [3] eingeführt.

[4]) Für diesen Satz s. die Arbeit [2], Lemma 1. — Pluszeichen, sowie das Symbol der Summierung, für Gruppen angewandt, bedeuten stets direkte Summen. $\sum_{\mathfrak{m}} G$ soll die direkte Summe einer Menge der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ von Gruppen bezeichnen, die alle mit G isomorph sind.

Untergruppe F finden, die die folgende Struktur besitzt: $F \cong \sum_{\mathfrak{m}} \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{C}(p^n)$. Es gibt einen Homomorphismus von F auf U_2. Da U_2 eine vollständige Gruppe ist, läßt sich dieser nach einem bekannten Satz[5]) zu einem Homomorphismus von G_2 in U_2, und somit auf U_2 erweitern.

Jetzt nehmen wir $G \sim H$ an und zeigen, daß H in U einbettbar ist. Der Zerlegung (1) entsprechend läßt sich H in der Form $H = H_1 + H_2$ so zerlegen, daß H_1 in G_1 einbettbar ist und der Rang von H_2 die Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ nicht übersteigt. Dann läßt sich H_2 in U_2 einbetten, w. z. z. w.

Somit erhalten wir als Resultat, daß *jede p-Gruppe ein universales homomorphes Bild besitzt*. Diese Behauptung gilt auch für Torsionsgruppen, da diese direkte Summen von zu verschiedenen Primzahlen gehörigen p-Gruppen G_p sind und die direkte Summe von universalen homomorphen Bildern der G_p ein solches für die ganze Gruppe ist.

Satz 1. *Jede Torsionsgruppe besitzt ein universales homomorphes Bild.*

§ 3. Universale homomorphe Bilder von torsionsfreien und gemischten Gruppen.

Wir unterscheiden zwei Fälle, je nachdem die Gruppe G einen endlichen oder unendlichen torsionsfreien Rang $r_\infty(G)$ besitzt. Wir beginnen mit dem zweiterwähnten Fall.

A) Es sei G eine Gruppe mit $r_\infty(G) = \mathfrak{r} \geqq \aleph_0$. Die p_i-Komponenten der Torsionsuntergruppe T von G sollen die letzten Ränge $\mathfrak{m}_i$ haben. Es sei $\mathfrak{t}_i = \mathrm{Max}(\mathfrak{r}, \mathfrak{m}_i)$. Dann läßt sich G in der Form

$$G = G_1 + G_2 \tag{3}$$

zerlegen, wo G_1 eine Torsionsgruppe mit beschränkten p-Komponenten ist und G_2 eine solche Gruppe ist, in der die p_i-Komponente der Torsionsuntergruppe einen Rang $\leqq \mathfrak{t}_i$ besitzt[6]). Wir setzen[7]):

$$U = G_1 + \sum_{\mathfrak{r}} \mathfrak{R} + \sum_{i} \sum_{\mathfrak{t}_i} \mathfrak{C}(p_i^\infty), \tag{4}$$

wo $\mathfrak{R}$ die additive Gruppe aller rationalen Zahlen bedeutet, und zeigen, daß diese Gruppe U ein universales homomorphes Bild von G ist.

---

[5]) S. z. B. Kaplansky [5], Exercise 1.

[6]) S. [2], Lemma 3.

[7]) Die Summation bez. i soll hier und im folgenden die bez. aller Primzahlen p_i bedeuten.

Zuerst zeigen wir: $G_2 \sim U_2 = \sum_{\mathfrak{r}} \mathfrak{R} + \sum_i \sum_{\mathfrak{t}_i} \mathfrak{C}(p_i^\infty)$. Nach der Definition von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{m}_i$ können wir in G_2 eine Untergruppe $F \simeq \sum_{\mathfrak{r}} \mathfrak{C}(\infty) + \sum_i \sum_{\mathfrak{m}_i} \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{C}(p_i^n)$ wählen[8]) und diese — wegen der Unendlichkeit von $\mathfrak{r}$ — auf U_2 homomorph abbilden $\left[\sum_{\mathfrak{r}} \mathfrak{C}(\infty)\right.$ kann nämlich auf $\sum_{\mathfrak{r}} \mathfrak{R} + \sum_i \sum_{\mathfrak{r}} \mathfrak{C}(p_i^\infty)$ und $\sum_{\mathfrak{m}_i} \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{C}(p_i^n)$ auf $\sum_{\mathfrak{m}_i} \mathfrak{C}(p_i^\infty)$ abgebildet $\left.\text{werden}\right]$. U_2 ist eine vollständige Gruppe und es folgt wie im Fall von p-Gruppen, daß der Homomorphismus $F \sim U_2$ zu einem Homomorphismus $G_2 \sim U_2$ erweitert werden kann.

Um zu zeigen, daß sich jede Gruppe H mit $G \sim H$ in U einbetten läßt, zerlegen wir H — (3) entsprechend — in der Form $H = H_1 + H_2$, wo H_1 einer Untergruppe von G_1 isomorph gewählt werden kann, der torsionsfreie Rang von H_2 (trivialerweise) nicht größer als $\mathfrak{r}$ ist, und die Ränge $r_{p_i}(H_2)$ der p_i-Komponenten der Torsionsuntergruppe von H_2 höchstens $\mathfrak{t}_i$ sind. Dann läßt sich H_1 in G_1 und H_2 — nach einem bekannten Resultat[9]) — in U_2 einbetten.

Folglich *besitzt jede torsionsfreie oder gemischte Gruppe von unendlichem torsionfreiem Rang ein universales homomorphes Bild.* — Ist insbesondere G torsionsfrei, so ist z. B. $U = \sum_{\mathfrak{r}} (\mathfrak{R} + \mathfrak{C})$ ein universales homomorphes Bild, wo $\mathfrak{C} = \sum_i \mathfrak{C}(p_i^\infty)$ der Gruppe aller komplexen Einheitswurzeln isomorph ist.

B) Nun wenden wir uns dem Fall von Gruppen mit einem endlichen torsionsfreien Rang $r \geqq 1$ zu. Es sei G eine solche Gruppe mit einem universalen homomorphen Bild U. U muß ersichtlich eine gemischte Gruppe mit $r_\infty(U) = r$ sein. Die p_i-Komponente der Torsionsuntergruppe S von U muß mindestens den Rang $r + r_{p_i}(G)$ haben, da dies für die Faktorgruppe G/F nach irgendeiner freien Untergruppe F vom Range r gilt, die in $p_i G$ enthalten ist. Bei einem Homomorphismus $G \sim U$ kann aber wegen der Endlichkeit von r kein Element von unendlicher Ordnung auf ein Element von endlicher Ordnung abgebildet werden. Daraus schließt man, daß $r_{p_i}(G)$ und ähnlicherweise *die letzten Ränge* $\mathfrak{m}_i$ *der* p_i*-Komponenten der Torsionsuntergruppe* T *von* G *nicht endlich sein können.*

U enthält eine Untergruppe V, die der Faktorgruppe $G/T = \overline{G}$ isomorph ist. Jedes torsionsfreie homomorphe Bild von G ist auch ein solches von $\overline{G}$ und alle torsionsfreien homomorphen Bilder vom Range r der Gruppe G sind

---

[8]) Ist insbesondere $\mathfrak{m}_i$ für ein i endlich, so soll das entsprechende Glied in F fehlen.

[9]) S. z. B. [2], Lemma 5.

mit $\bar{G}$ isomorph. Gilt[10]) $\{V, S\} = U$, so folgt aus $V \cap S = 0$ ersichtlich $U = V + S$. Ist aber $\{V, S\} = V + S$ eine echte Untergruppe von U, so ist nach dem ersten Isomorphiesatz

$$\bar{U} = U/S \supset \{V, S\}/S = \bar{V} \cong V/V \cap S \cong V,$$

d. h. $\bar{U}$ enthält eine echte, mit sich selbst isomorphe Untergruppe $\bar{V}$. Diese $\bar{V}$ muß von endlichem Index in $\bar{U}$ sein, da die Faktorgruppen einer torsionsfreien Gruppe von endlichem Range r nach ihren Untergruppen der Form $\sum_r \mathfrak{C}(\infty)$ sich höchstens um eine endliche Gruppe voneinander unterscheiden, und daraus ergibt sich die Behauptung nach Vergleich der Gruppen $\bar{V}/\bar{B}$ und $\bar{U}/\bar{B}$, wo $\bar{B}$ irgendeine, durch ein maximales unabhängiges System erzeugte Untergruppe von $\bar{V}$ bezeichnet. Es folgt, daß $\{V, S\}$ von endlichem Index m in U ist; $u_1, \ldots, u_m$ sei ein vollständiges Repräsentantensystem von U modulo $\{V, S\}$. Es gilt $mu_j = v_j + s_j$ ($v_j \in V, s_j \in S$); bezeichnet m^* das k. g. V. der Ordnungen von s_j ($j = 1, \ldots, m$), so gilt $mm^* u_j \in V$, d. h. $U' = \{V, u_1, \ldots, u_m\}$ genügt der Bedingung: $mm^* U' \subseteq V$. Mithin ist U' eine gemischte Gruppe mit beschränkter Torsionsuntergruppe S', die auch verschwinden kann. Nach dem Satz von BAER—FOMIN ergibt sich eine Zerlegung $U' = S' + W$ mit torsionsfreiem W. Nun ist $W \cap S = 0$ und $\{W, S\} = \{W, S', S\} = \{U', S\} = \{V, u_1, \ldots, u_m, S\} = U$, d. h. $U = W + S$, U ist also die direkte Summe einer Torsionsgruppe S und einer torsionsfreien Gruppe W, die mit $\bar{G}$ isomorph ist.

Ist zunächst H irgendein torsionsfreies homomorphes Bild von $\bar{G}$, so muß es einer Untergruppe von $W + S$, und somit auch einer von W isomorph sein. $\bar{G} = A$ besitzt also die Eigenschaft:

(E) *jedes torsionsfreie homomorphe Bild von A läßt sich in A einbetten.*

Umgekehrt zeigen wir, daß jede Gruppe G von endlichem torsionsfreiem Rang r, die die Eigenschaft (E) bezüglich G/T besitzt und in der die p_i-Komponenten der Torsionsuntergruppe T unendliche letzte Ränge $\mathfrak{m}_i$ haben, ein universales homomorphes Bild besitzt.

Zum Beweis zerlegen wir $G = G_1 + G_2$, wo die p_i-Komponenten der Torsionsgruppe G_1 beschränkt sind und der Rang $r_{p_i}(G_2)$ die Mächtigkeit $\mathfrak{m}_i$ nicht überschreitet. Dann setzen wir:

$$U = G_1 + G/T + \sum_i \sum_{\mathfrak{m}_i} \mathfrak{C}(p_i^\infty) \tag{5}$$

und zeigen, daß U in der Tat ein universales homomorphes Bild von G darstellt.

---

[10]) $\{\ldots\}$ bedeutet die durch die in der Klammer stehende Menge erzeugte Untergruppe. $\cap$ ist das Zeichen des Durchschnitts, $\subseteq$ das des Enthaltens.

Um die Existenz eines Homomorphismus $G_2 \sim G/T + U_2$ mit $U_2 = \sum_i \sum_{\mathfrak{m}_i} \mathfrak{C}(p_i^\infty)$ nachzuprüfen, zerlegen wir zuerst T — der Zerlegung $G = G_1 + G_2$ entsprechend — in der Form $T = G_1 + T_2$ (T_2 die Torsionsuntergruppe von G_2). Wie schon im Fall von p-Gruppen gezeigt, gilt $T_2 \sim U_2$; es sei X eine Untergruppe von T_2 mit $T_2/X \cong U_2$. Dann ist die Torsionsuntergruppe T_2/X von G_2/X mit U_2 isomorph, also ein direkter Summand: $G_2/X \cong G/T + U_2$.

Nehmen wir nun an, daß $G \sim H$ gilt. Dann gibt es eine Zerlegung $H = H_1 + H_2$, wo H_1 einer Untergruppe von G_1 isomorph gewählt werden kann, und die Ränge der p_i-Komponenten der Torsionsuntergruppe Y von H_2 höchstens $\mathfrak{m}_i$ sind. Wir betten Y in die vollständige Gruppe U_2 ein, so gilt in einer passenden vollständigen Gruppe: $\{H_2, U_2\} \cong H_2/Y + U_2$. Hier ist H_2/Y als ein homomorphes Bild von G/T in G/T einbettbar. Dies bestätigt, daß sich H in U einbetten läßt, q. e. d.

C) Es bleibt noch übrig, die torsionsfreien Gruppen von endlichem Rang r und mit der Eigenschaft (E) zu untersuchen.

Wir erinnern daran, daß man in einer torsionsfreien Gruppe G unter der Charakteristik $\chi(a)$ eines Elementes $a (\neq 0)$ die Folge $(k_1, k_2, \ldots)$ versteht, wo k_i den größten Exponenten k bedeutet, für den die Gleichung $p_i^k x = a$ in G (p_i bedeutet die i-te Primzahl) lösbar ist; existiert kein größter k, so nimmt man $k_i = \infty$. $\chi(a)$ und $\chi(b) = (l_1, l_2, \ldots)$ seien als äquivalent betrachtet, wenn $k_i = l_i$ für alle i mit Ausnahme von höchstens endlich vielen i, für die aber k_i und l_i beide endlich sein müssen. Die äquivalenten Charakteristiken bilden eine Klasse, die der Typ $\tau(a)$ von a heißt. Wir setzen $\tau(a) \geqq \tau(b)$, falls es Charakteristiken $\chi(a') = (k_1, k_2, \ldots)$, $\chi(b') = (l_1, l_2, \ldots)$ in den Klassen $\tau(a)$ und $\tau(b)$ gibt, so daß $k_i \geqq l_i$ für jedes i.

Es sei nun A eine torsionsfreie Gruppe vom Range r und mit Eigenschaft (E). Wir betrachten alle homomorphen Bilder von A in der Gruppe $\mathfrak{R}$. Da r endlich ist, gibt es unter den Typen der Elemente von A maximale.[11]) Sind $\tau(a)$ und $\tau(b)$ maximale Typen, so gibt es in $\mathfrak{R}$ ein homomorphes Bild B von A, dessen Typ $\geqq \tau(a)$ und $\geqq \tau(b)$ ist. Wegen Eigenschaft (E) kann daher nur ein einziger maximaler Typ τ_1 existieren.

Wir wählen ein maximales unabhängiges System $a_1, \ldots, a_{r_1}$ von Elementen des Typs τ_1 in A. Gibt es in A zwei verschiedene zweitmaximale Typen $\tau(c)$ und $\tau(d)$, so müssen ersichtlich $a_1, \ldots, a_{r_1}, c, d$ unabhängig sein. Wir bilden A irgendwie in eine Gruppe $\sum_{r_1+1} \mathfrak{R}$ homomorph ab, so daß den Elementen $a_1, \ldots, a_{r_1}, c$ unabhängige Bilder $a_1', \ldots, a_{r_1}', c'$ entsprechen, wäh-

[11]) Für diese einfache Tatsache s. Baer [1], S. 106.

rend d auf c' abgebildet sein soll. Das so entstehende homomorphe Bild B von A enthält das von $a'_1, \ldots, a'_{r_1}$ unabhängige Element c', dessen Typ $\geqq \tau(c)$ und $\geqq \tau(d)$ ist. Da sich B in A einbetten läßt, schließt man, daß es in A nur einen zweitmaximalen Typ τ_2 gibt. So fortschreitend erhält man, daß die verschiedenen Typen der Elemente in A eine endliche Menge $\tau_1, \ldots, \tau_s$ bilden mit der Eigenschaft

$$\tau_1 > \tau_2 > \cdots > \tau_s \qquad (s \geqq 1).$$

Den Typen entsprechen die Servanzuntergruppen

$$0 = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_s = A, \qquad r(A_i/A_{i-1}) = r_i,$$

wo A_i aus allen Elementen von A besteht, deren Typ $\geqq \tau_i$ ist. Diese A_i besitzen die Eigenschaft, daß jedes Element von A außerhalb A_{i-1} höchstens den Typ τ_i hat.

Zunächst seien H und K Servanzuntergruppen in A_i mit den Eigenschaften $K \supset H \supseteq A_{i-1}$ und $r(K/H) = 1$. Es sei L eine maximale Untergruppe von H mit der Eigenschaft $L \cap A_{i-1} = 0$; L ist dann gewiß eine Servanzuntergruppe von H. Offensichtlich hat jedes Element von H/L einen Typ $\geqq \tau_{i-1}$, und außerdem stimmen die Ränge von H/L und A_{i-1} überein. Nach Eigenschaft (E) ist A/L, folglich auch K/L in A einbettbar, demnach hat jedes Element in K/L außerhalb H/L höchstens den Typ τ_i, also genau den Typ τ_i. Für $i = 1$ besagt dies, daß sowohl die Elemente von A als auch die der torsionsfreien Faktorgruppen von A den Typ τ_1 besitzen. Nach einem Satz von BAER[12]) ist daher A die direkte Summe von r_1 Gruppen, alle vom Range 1 und des Typs τ_1. Im Falle $i = 2$ bekommen wir, daß die Elemente von K/L außerhalb H/L vom Typ τ_2 sind. Nun wählen wir ein maximales unabhängiges System $a_1, \ldots, a_{r_1}$ in H/L und ergänzen es mit einem Element a von K/L, nicht in H/L; es ist klar, daß $a_1, \ldots, a_{r_1}$ den Typ τ_1, a den Typ τ_2 besitzt. Jedes Element x von K/L läßt sich eindeutig in der Form $x = \varrho_1 a_1 + \cdots + \varrho_{r_1} a_{r_1} + \varrho_0 a$ mit rationalen Koeffizienten ϱ_j darstellen. Durchläuft x alle Elemente von K/L, so durchlaufen $\varrho_1, \ldots, \varrho_{r_1}, \varrho_0$ gewisse Untergruppen R_j von $\mathfrak{R}$. Da K/L kein homomorphes Bild mit Elementen vom Typ $> \tau_1$ besitzen kann, können R_j keinen Typ $> \tau_1$ besitzen. Somit sind $R_1, \ldots, R_{r_1}$ vom Typ τ_1. Demnach gibt es eine natürliche Zahl n, so daß für alle Elemente x in K/L die Summanden $n\varrho_1 a_1, \ldots, n\varrho_{r_1} a_{r_1}$ der Gruppe H/L angehören. Dann gehört aber $n\varrho_0 a$ stets zu K/L, und aus $\tau(a) = \tau_2$ folgert

---

[12]) BAER [1], S. 104—105. Wir brauchen hier den folgenden Spezialfall dieses Satzes. Es sei J eine torsionsfreie Gruppe von endlichem Rang, S eine Servanzuntergruppe von J, ferner seien alle Elemente von J, die nicht zu S gehören, von demselben Typ τ. Haben für alle Servanzuntergruppen T von J mit $T \supseteq S$ die Elemente von J/T den gleichen Typ τ, so ist J die direkte Summe von S und von Gruppen vom Range 1 und des Typs τ.

man, daß R_0 vom Typ τ_2 sein muß. Infolgedessen hat die Faktorgruppe $(K/L)/(H/L) \simeq K/H$ den Typ τ_2, und aus dem angeführten Satz von BAER folgt, daß A_2 die direkte Summe von A_1 und von r_2 Gruppen vom Range 1 und des Typs τ_2 ist. Usw. Zum Schluß erhält man: A ist als eine direkte Summe von endlich vielen Untergruppen der Gruppe $\mathfrak{R}$ von den Typen $\sigma_1 \geqq \sigma_2 \geqq \cdots \geqq \sigma_r$ darstellbar:

$$A = R(\sigma_1) + R(\sigma_2) + \cdots + R(\sigma_r). \tag{7}$$

Umgekehrt müssen wir zeigen, daß jede torsionsfreie Faktorgruppe H von A in (7) in A einbettbar ist.

Vor allem bemerken wir, daß kein homomorphes Bild H von A in (7) ein Element von einem σ_1 übersteigenden Typ enthalten kann. Sonst hätte A ein homomorphes Bild vom Range 1 und vom Typ $> \sigma_1$, dies ist aber unmöglich, denn jeder Homomorphismus von A in $\mathfrak{R}$ ist durch die Bilder von $R(\sigma_1), \ldots, R(\sigma_r)$ schon eindeutig bestimmt und wegen der Endlichkeit von r können die Bilder von $R(\sigma_j)$ keine Untergruppe vom Typ $> \sigma_1$ erschöpfen. Es folgt noch, daß keine Faktorgruppe von H ein Element vom Typ $> \sigma_1$ enthält.

Aus dem Gesagten und aus dem Satz von BAER ergibt sich, daß falls in (7) alle Gruppen $R(\sigma_j)$ denselben Typ besitzen, auch H die direkte Summe von mit $R(\sigma_j)$ isomorphen Gruppen ist, folglich läßt H sich in A einbetten. Nehmen wir an, daß diese Behauptung schon für den Fall bewiesen ist, wenn A nur $k-1$ verschiedene Typen besitzt. Es sei A_1 wie oben definiert; sie besteht also aus allen Elementen vom maximalen Typ τ_1 in A. Es sei H_1 auf dieselbe Weise für H definiert. Bei dem Homomorphismus $A \sim H$ wird A_1 in H_1 abgebildet, d. h. es besteht auch $\bar{A} = A/A_1 \sim H/H_1 = \bar{H}$. Für das Gruppenpaar $\bar{A}, \bar{H}$ kann die Induktionsannahme angewandt werden, woraus wir schließen können, daß $\bar{H}$ die direkte Summe endlich vieler Gruppen vom Range 1 und von Typen $\leqq \tau_2$ ist, und außerdem sich $\bar{H}$ in $\bar{A}$ einbetten läßt. Durch $k-1$-malige Anwendung des zitierten BAERschen Satzes folgt (man beachte, daß die Typen in $\bar{H}$ monoton abnehmen), daß H die direkte Summe von H_1 und einer mit $\bar{H}$ isomorphen Gruppe H_2 ist. Ferner ist jedes Element von H_1 und von den Faktorgruppen H_1/H_1^* nach Servanzuntergruppen gewiß vom Typ τ_1, infolgedessen ist H_1 die direkte Summe von Gruppen vom Range 1 und vom Typ τ_1. Da ersichtlich $r(H_1) \leqq r(A_1)$ sein muß, ist H_1 in A_1 und somit H in A einbettbar, w. z. b. w.

D) Unsere Ergebnisse bezüglich torsionsfreier und gemischter Gruppen sind in dem folgenden Satz zusammengefaßt.

Satz 2. *Eine Gruppe G von torsionsfreiem Rang $\mathfrak{r}(\neq 0)$ besitzt dann und nur dann ein universales homomorphes Bild, wenn* *entweder* $\mathfrak{r}$ *unendlich ist,*

oder $\mathfrak{r}$ *endlich ist und* G *den folgenden Bedingungen genügt:* a) *die* p*-Komponenten der Torsionsuntergruppe* T *von* G *haben unendliche letzte Ränge,* b) *die Faktorgruppe* G/T *ist die direkte Summe von Gruppen vom Range* 1, *deren Typen* σ_j *monoton abnehmen,* $\sigma_1 \geqq \sigma_2 \geqq \cdots \geqq \sigma_r$.

§ 4. Universale Untergruppen.

Jetzt untersuchen wir, wann eine Gruppe eine universale Untergruppe enthält.

A) Zuerst sei G eine p-Gruppe mit einer universalen Untergruppe Z. Wir zerlegen $G = G_1 + G_2$, wo G_1 eine beschränkte Gruppe ist und der Rang $r(G_2)$ mit dem letzten Rang $\mathfrak{m}$ von G übereinstimmt. Gilt nun $\mathfrak{m} = 0$, so ist $Z = G$ offenbar eine universale Untergruppe von G. Ist $\mathfrak{m}$ eine natürliche Zahl, so ist $G_2 = \sum_{\mathfrak{m}} \mathfrak{C}(p^\infty)$, und Z muß die Gruppe G_2 enthalten. Dann enthält G jede zyklische Gruppe $\mathfrak{C}(p^k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, aber $Z \sim \mathfrak{C}(p^k)$ gilt nicht für solche p^k, die die Ordnungen der Elemente in G_1 übersteigen. Dies schließt den Fall $0 < \mathfrak{m} < \aleph_0$ aus. Im Falle $\mathfrak{m} \geqq \aleph_0$ setzen wir

$$Z = G_1 + \sum_{\mathfrak{m}} \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{C}(p^n)$$

Dann ist Z einer Untergruppe von G isomorph; ferner beweisen wir, daß $H \subseteq G$ die Existenz eines Homomorphismus $Z \sim H$ nach sich zieht. In der Tat, zerlegen wir $H = H_1 + H_2$, so daß H_1 in G_1 einbettbar ist und $r(H_2) \leqq \mathfrak{m}$ gilt. Dann ist $G_1 \sim H_1$ und $\sum_{\mathfrak{m}} \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{C}(p^n) \sim H_2$, woraus man schließt, daß *eine* p*-Gruppe genau in dem Falle eine universale Untergruppe besitzt, wenn ihr letzter Rang* 0 *oder unendlich ist.*

Es folgt mühelos, daß eine Torsionsgruppe dann und nur dann eine universale Untergruppe enthält, wenn dies für alle ihrer p-Komponenten gilt.

B) Jetzt wenden wir uns dem Fall zu, wenn G eine torsionsfreie oder eine gemischte Gruppe ist, deren torsionsfreier Rang r endlich ist. Enthält G eine universale Untergruppe Z, so gilt $Z \sim \sum_r \mathfrak{C}(\infty)$, da die letztere Gruppe einer Untergruppe von G isomorph ist. Daraus folgt, daß Z die Form $Z = \sum_r \mathfrak{C}(\infty) + Y$ mit einer Torsionsgruppe Y besitzt.[13]) Aber es muß auch

[13]) Ist nämlich für eine Gruppe G und ihre Untergruppe H die Faktorgruppe G/H eine freie abelsche Gruppe, so ist H ein direkter Summand von G.

$Z \sim G$ gelten, also auch $Z \sim G/T$, wo T die Torsionsuntergruppe von G bedeutet. Aus $r_\infty(Z) = r_\infty(G)$, erhält man $G/T \cong \sum_r \mathfrak{C}(\infty)$, ferner $G = \sum_r \mathfrak{C}(\infty) + T$. Somit muß Y eine universale Untergruppe von T sein.

Umgekehrt, sei G von der Form $G = \sum_r \mathfrak{C}(\infty) + T$ und besitze die Torsionsgruppe T eine universale Untergruppe Y. Wir bezeichnen mit H eine beliebige Untergruppe von G und mit S deren Torsionsuntergruppe. Dann ist ersichtlich H/S endlich erzeugbar, also von der Form $\sum_s \mathfrak{C}(\infty)$ $(s \leqq r)$; folglich besteht: $H = \sum_s \mathfrak{C}(\infty) + S$. Wegen Annahme gilt $Y \sim S$, d. h.: *eine Gruppe G mit endlichem torsionsfreiem Rang r (>0) besitzt genau dann eine universale Untergruppe, wenn $G = \sum_r \mathfrak{C}(\infty) + T$, wo T eine Torsionsgruppe mit einer universalen Untergruppe ist.*

C) Es bleibt nur der Fall übrig, wenn G unendlichen torsionsfreien Rang $\mathfrak{r}$ besitzt. Wir zerlegen $G = G_1 + G_2$, wo G_1 eine Torsionsgruppe mit beschränkten p-Komponenten ist und G_2 eine gemischte Gruppe mit $r_{p_i}(G_2) \leqq \operatorname{Max}(\mathfrak{m}_i, \mathfrak{r})$ ist ($\mathfrak{m}_i$ bezeichnet den letzten Rang der p_i-Komponente der Torsionsuntergruppe von G_2). Wir zeigen, daß

$$Z = G_1 + \sum_{\mathfrak{r}} \mathfrak{C}(\infty) + \sum_i \sum_{\mathfrak{m}_i} \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{C}(p_i^n) = G_1 + Z_1$$

eine universale Untergruppe von G ist.[14] Vor allem ist es evident, daß Z einer Untergruppe von G isomorph ist. Ferner sei H irgendeine Untergruppe von G und man setze $H = H_1 + H_2$ mit H_1, unterworfen der Bedingung $H_1 \subseteq G_1$ und mit $r_{p_i}(H_2) \leqq \mathfrak{m}_i$. Dann genügt es, die Existenz eines Homomorphismus $Z_1 \sim H_2$ nachzuprüfen. Aber diese folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß die p_i-Komponente der Torsionsuntergruppe von H_2 vom Range $\leqq \mathfrak{m}_i$ ist und die Ungleichung $r_\infty(H_2) \leqq \mathfrak{r}$ offenbar besteht. D. h. im betrachteten Fall enthält G jeweils eine universale Untergruppe.

D) Folglich haben wir folgendes bewiesen.

Satz 3. *Eine Gruppe G besitzt dann und nur dann eine universale Untergruppe, wenn*

a) falls G eine p-Gruppe ist: *der letzte Rang von G Null oder unendlich ist;*

---

[14] Ist $\mathfrak{m}_i$ für ein i endlich, so lassen wir den entsprechenden Summanden weg.

b) falls G eine Torsionsgruppe ist: *jede p-Komponente von G der Bedingung* a) *genügt;*

c) falls G von endlichem torsionsfreiem Rang $r(>0)$ ist: $G = \sum_r \mathfrak{C}(\infty) + T$ *gilt, wo* T *eine Torsionsgruppe mit der Eigenschaft* b) *bezeichnet;*

d) falls G von unendlichem torsionfreiem Rang ist: *in jedem Fall.*

Damit haben wir unsere Probleme vollständig gelöst.

§ 5. Bemerkungen.

1. Aus dem oben Gesagten folgt unmittelbar, daß eine Gruppe G genau dann sowohl ein universales homomorphes Bild als auch eine universale Untergruppe besitzt, wenn

entweder G eine Torsionsgruppe ist, deren jede p-Komponente beschränkt ist oder unendlichen letzten Rang besitzt;

oder G unendlichen torsionsfreien Rang hat;

oder G endlichen torsionsfreien Rang r besitzt und $G = \sum_r C(\infty) + T$ gilt, wo jede p-Komponente der Torsionsgruppe T von unendlichem letztem Range ist.

2. Es liegt nahe zu fragen: *Welche Gruppen U kommen als universale homomorphe Bilder irgendwelcher Gruppen G vor?* Diese Gruppen können leicht charakterisiert werden. Jedes homomorphe Bild von U ist nämlich auch ein solches von G, und muß somit in U einbettbar sein. U hat folglich die Eigenschaft:

(Q) *jedes homomorphe Bild von U läßt sich in U einbetten.*

Umgekehrt, hat eine Gruppe U die Eigenschaft (Q), so ist sie offenbar ein universales homomorphes Bild von sich selbst. Infolgedessen erhalten wir: *U ist genau dann ein universales homomorphes Bild irgendeiner Gruppe G, wenn sie die Eigenschaft* (Q) *besitzt.* Diese Gruppen wurden in der Arbeit [4] vollständig beschrieben.

3. Ähnlicherweise können wir beweisen, daß eine Gruppe Z dann und nur dann eine universale Untergruppe irgendeiner Gruppe G darstellt, wenn sie eine universale Untergruppe von sich selbst ist, also die folgende Eigenschaft besitzt:

(P) *jede Untergruppe von Z ist ein endomorphes Bild von Z.*

Die Gruppen mit Eigenschaft (P) wurden in [3] vollständig charakterisiert.

Literatur.

[1] R. Baer, Abelian groups without elements of finite order, *Duke Math. Journal* 3 (1937), 68—122.

[2] L. Fuchs, On a special kind of duality in group theory. II., *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 4 (1953), 299—314.

[3] L. Fuchs, A. Kertész and T. Szele, On abelian groups whose subgroups are endomorphic images, *Acta Sci. Math. Szeged* **16** (1955), 77—88.

[4] L. Fuchs, A. Kertész and T. Szele, On abelian groups in which every homomorphic image can be imbedded, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 7 (1956), 467—475.

[5] I. Kaplansky, Infinite abelian groups, *Ann Arbor*, 1954.

[6] А. Г. Курош, Теория групп, Москва, 1953.

(Eingegangen am 27. Februar 1957.)