Eine Ableitung des Cartanschen Zusammenhangs eines Finslerschen Raumes.

Von ROLF SULANKE in Berlin.

In dieser Arbeit soll eine Ableitung des Cartanschen Zusammenhangs eines Finslerschen Raumes angegeben werden, die vielleicht deshalb interessant ist, weil sie völlig analog zur Herleitung des LEVI-CIVITAschen Zusammenhanges eines Riemannschen Raumes verläuft.

Man kommt ganz natürlich zu dem Begriff einer „affinzusammenhängenden Linienelementmannigfaltigkeit", der in den Arbeiten [3], [4] von O. VARGA definiert wurde, wenn man das Transformationsverhalten der partiellen Ableitungen eines auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit X_n gegebenen Tensors $T^i_l(x^r, y^s)$ untersucht, der außer von den Punktkoordinaten x^r noch von den Koordinaten y^s eines beliebig im Tangentialraum der X_n im Punkte (x^r) variierenden Vektors abhängt $(i, j, l = 1, \ldots, n)$. Die Ableitungen einer Funktion nach den Punktkoordinaten seien durch $\partial_r = \frac{\partial}{\partial x^r}$, die nach den VekVektorkoordinaten durch $\dot{\partial}_s \frac{\partial}{\partial y^s}$ bezeichnet. Ist dann

$$x^{r'} = x^{r'}(x^r), \qquad \partial_r x^{r'} = A^{r'}_r, \qquad \partial_{r'} x^r = A^r_{r'},$$

$$|A^r_{r'}| \neq 0, \qquad A^r_{r'} A^{s'}_r = \delta^{s'}_{r'}, \qquad A^{r'}_r A^s_{r'} = \delta^s_r. \tag{1}$$

eine Transformation der Punktkoordinaten der X_n, so ist durch

$$y^{s'} = A^{s'}_s(x)\, y^s \tag{2}$$

gleichzeitig eine Transformation der Vektorkoordinaten erzeugt. Für die partiellen Ableitungen eines Tensors $T^i_l(x,y)$ gelten dann bekanntlich die folgenden Transformationsgesetze

$$\partial_{r'} T^{i'}_{l'} = A^r_{r'} A^l_{l'} A^{i'}_i \partial_r T^i_l + [A^{i'}_i \partial_{r'} A^l_{l'} + A^l_{l'} \partial_{r'} A^{i'}_i]\, T^i_l + A^l_{l'} A^{i'}_i \dot{\partial}_s T^i_l (\partial_{r'} A^s_{s'}) A^{s'}_t y^t \tag{3}$$

$$\dot{\partial}_{s'} T^{i'}_{l'} = A^s_{s'} A^l_{l'} A^{i'}_i \dot{\partial}_s T^i_l, \tag{4}$$

die sich von dem Transformationsverhalten der partiellen Ableitungen eines rein ortsabhängigen Tensors unterscheiden. Soll jetzt für richtungsabhängige Tensoren $T_l^i(x, y)$ ein absolutes Differential $DT_l^i(x, y)$ definiert werden, das den üblichen Bedingungen genügt, so kommt man sofort auf die von E. CARTAN [1] angegebene Formel:

$$DT_l^i = dT_l^i + (\Gamma_{kr}{}^i T_l^k - \Gamma_{lr}{}^k T_k^i)dx^r + (C_{ks}{}^i T_l^k + C_{ls}{}^k T_k^i)dy^s \tag{5}$$

in der die $\Gamma_{kr}{}^i(x, y), C_{ks}{}^i(x, y)$ Zusammenhangsobjekte sind, die natürlich ein von den Christoffelschen Symbolen verschiedenes Transformationsverhalten haben.

Verlangt man weiter von dem Differential D, daß mit jedem Vektorfeld $\xi^i = \xi^i(x, y)$, welches nur von dem Linienelement (x, y) abhängt, also positiv homogen von nullter Ordnung in den y^s ist, auch das absolute Differential $D\xi^i(x, y)$ positiv homogen von nullter Ordnung in den y^s ist, so müssen die Zusammenhangskoeffizienten den folgenden Bedingungen genügen:

a) $\Gamma_{kr}{}^i(x, y)$ positiv homogen von nullter Ordnung in den y^s,

b) $C_{ks}{}^i(x, y)$ positiv homogen von (—1)ter Ordnung in den y^s,

c) es gilt identisch in y^s

$$C_{ks}{}^i(x, y)y^s = 0. \tag{6}$$

Diese Bedingungen, die in der Arbeit [3] von O. VARGA angegeben sind, sollen im folgenden stets erfüllt sein. Weiter ergibt sich sofort, daß sich die C_{ks}^i wie ein Tensor transformieren:

$$C_{k's'}{}^{i'} = A_{k'}^k A_{s'}^s A_i^{i'} C_{ks}{}^i \tag{7}$$

Dazu setze man nur $x^r = \text{const.}$ und beachte $D\xi^{i'} = A_i^{i'} D\xi^i(x, y)$. Es folgt, ausführlich geschrieben

$$(\dot{\partial}_{s'}\xi^{i'} + C_{k's'}{}^{i'}\xi^{k'})dy^{s'} = A_i^{i'}(\dot{\partial}_s\xi^i + C_{ks}{}^i\xi^k)dy^s.$$

Wegen

$$dy^{s'} = A_s^{s'}dy^s + y^s dA_s^{s'} = A_s^{s'}dy^s$$

für $x^r = \text{const.}$ ergibt sich dann, da man die dy^s, ξ^i willkürlich wählen kann, und nach (4) die Beziehung (7). Aus diesem Grunde ist die Beziehung

$$C_{ks}{}^i = C_{sk}{}^i \tag{8}$$

invariant gegenüber Koordinatentransformationen, und wir setzen für das folgende voraus, daß (8) stets erfüllt ist. Dann gilt speziell auch

$$C_{ks}{}^i(x,y)y^k = 0 \tag{9}$$

und hieraus erhalten wir für das absolute Differential von y^s selbst:

$$Dy^s = dy^s + \Gamma_{hr}{}^s y^h dx^r. \tag{10}$$

Mit Hilfe der Formel (10) können wir jetzt der Definitionsgleichung (5) des absoluten Differentials eines richtungsabhängigen Tensors eine andere Gestalt geben, indem wir statt der dy^s, die sich nicht wie Vektoren transformieren, die absoluten Differentiale Dy^s benutzen. Es ergibt sich

$$DT_l^i = (\partial_r T_l^i - \dot{\partial}_s T_l^i \Gamma_{hr}{}^s y^h + \Gamma^*_{kr}{}^i T_l^k - \Gamma^*_{lr}{}^k T_k^i) dx^r + \\ + (\dot{\partial}_s T_l^i + C_{ks}{}^i T_l^k - C_{ls}{}^k T_k^i) Dy^s$$

wobei

$$\Gamma^*_{kr}{}^i = \Gamma_{kr}{}^i - C_{ks}{}^i \Gamma_{hr}{}^s y^h \tag{11}$$

gesetzt ist. Hieraus folgt auf Grund von (9)

$$\Gamma^*_{hr}{}^s(x, y) y^h = \Gamma_{hr}{}^s y^h, \qquad Dy^s = dy^s + \Gamma^*_{hr}{}^s y^h dx^r \tag{12}$$

und man kann deswegen die Formel für das absolute Differential eines Tensors in der Gestalt

$$DT_l^i = (\partial_r T_l^i - \dot{\partial}_s T_l^i \Gamma^*_{hr}{}^s y^h + \Gamma^*_{kr}{}^i T_l^k - \Gamma^*_{lr}{}^k T_k^i) dx^r + \\ + (\dot{\partial}_s T_l^i + C_{ks}{}^i T_l^k - C_{ls}{}^k T_k^i) Dy^s = D_r T_l^i dx^r + \dot{D}_s T_l^i Dy^s \tag{13}$$

schreiben, die auch in der Arbeit von E. CARTAN [1] angegeben ist. Von dieser Gleichung werden wir im folgenden ausgehen. Da der zweite Ausdruck auf der rechten Seite von (13) ein Tensor ist, muß auch der erste sich tensoriell verhalten. Hieraus erkennt man ohne jede Rechnung, daß sich die Größen $\Gamma^*_{kr}{}^i$ genauso wie die Christoffelschen Symbole der Riemannschen Geometrie transformieren. Man kann nämlich sofort ein Feld von Stützelementen $y^s = y^s(x)$ angeben, für welches in einem speziellen, beliebig vorgegebenen Linienelement (x_0^r, y_0^s)

$$D_r y_0^s = \partial_r y_0^s + \underset{0}{\Gamma^*_{hr}{}^s} y_0^h = 0 \tag{14}$$

gilt, z. B. das Feld

$$y^s(x) = y_0^s - \Gamma^*_{hr}{}^s(x_0, y_0) y_0^h (x^r - x_0^r).$$

Ein solches Feld nennen wir im Linienelement (x_0^r, y_0^s) *stationär*. Dann ist in leicht verständlicher Schreibweise

$$\left.\frac{\delta T_l^i(x, y(x))}{\delta x^r}\right|_{x=x_0} = \underset{0}{\partial_r T_l^i} + \underset{0}{\dot{\partial}_s T_l^i} \cdot \partial_r y_0^s = \underset{0}{\partial_r T_l^i} - \underset{0}{\dot{\partial}_s T_l^i} \underset{0}{\Gamma^*_{hr}{}^s} y_0^h$$

und wir erhalten aus (13) für beliebiges dx^r

$$DT_l^i = \left(\frac{\delta T_l^i}{\delta x^r} + \Gamma^*_{kr}{}^i T_l^k - \Gamma^*_{lr}{}^k T_k^i\right) dx^r.$$

Da die Ausdrücke $\frac{\delta}{\delta x^r} T_l^i(x, y(x))$ die Ableitungen eines nur ortsabhängigen Tensors nach den Ortskoordinaten sind, müssen die $\Gamma^*_{kr}{}^i$ das angegebene

Transformationsverhalten haben; es hat daher einen vom Koordinatensystem unabhängigen Sinn, von der Symmetrie der $\Gamma^{*\ i}_{kr}$ in den k, r zu sprechen.

In Anlehnung an die von O. VARGA [4] gegebene Definition, sprechen wir von einer *affinzusammenhängenden Linienelementmannigfaltigkeit mit symmetrischen Zusammenhang,* wenn auf der $2n$-dimensionalen Mannigfaltigkeit der (x^r, y^s), wobei y^s in dem zum Punkt x^r gehörenden Tangentialraum einer X_n frei variable Vektorkoordinaten sind, Zusammenhangskoeffizienten $\Gamma^{*\ i}_{kr}(x, y)$, $C_{ks}{}^i(x, y)$ gegeben sind, die den folgenden Bedingungen genügen:

I. Sie transformieren sich nach

(15) $$\Gamma^{*\ \ i'}_{k'r'} = A^k_{k'} A^r_{r'} A^{i'}_i \Gamma^{*\ i}_{kr} + A^{i'}_i \partial_{k'} A^i_{r'}$$

bzw.

(7) $$C_{k's'}{}^{i'} = A^k_{k'} A^s_{s'} A^{i'}_i C_{ks}{}^i.$$

II. Es gelten die Homogenitätseigenschaften $(\lambda > 0)$

(16) $$\Gamma^{*\ i}_{kr}(x, \lambda y) = \Gamma^{*\ i}_{kr}(x, y)$$

(17) $$C_{ks}{}^i(x, \lambda y) = C_{ks}{}^i(x, y) \cdot \frac{1}{\lambda}.$$

III. Es gelten die Symmetriebedingungen

(18) $$\Gamma^{*\ i}_{kr} = \Gamma^{*\ i}_{rk}$$

(8) $$C_{ks}{}^i = C_{sk}{}^i.$$

IV. Es gilt die Beziehung

(6) $$C_{ks}{}^i(x, y) y^s = 0.$$

Das absolute Differential auf einer derartigen Mannigfaltigkeit ist dann durch die Formel (13) gegeben.

Sei jetzt auf der Linienelementmannigfaltigkeit der (x^r, y^s) ein *„metrischer Fundamentaltensor"* $g_{il}(x, y)$ gegeben, der

1. symmetrisch

(19) $$g_{il}(x, y) = g_{li}(x, y)$$

2. nichtausgeartet

(20) $$|g_{il}(x, y)| \neq 0$$

3. positiv homogen von nullter Ordnung in den y^s

ist und die Beziehungen

(21) $$\dot{\partial}_s g_{il}(x, y) y^i = \dot{\partial}_s g_{il}(x, y) y^l = \dot{\partial}_s g_{il}(x, y) y^s = 0$$

erfüllt. Ein solcher Tensor wird zum Beispiel durch ein positives, reguläres, homogenes Variatonsproblem bestimmt. In diesem Fall genügen die g_{il} jedoch bekanntlich den Bedingungen

(22) $$\dot{\partial}_s g_{il} = \dot{\partial}_i g_{ls} = \dot{\partial}_l g_{is}$$

die stärker als die Bedingungen (21) sind. Ist außerdem auf der Linienelementmannigfalfigkeit ein affiner Zusammenhang gegeben, so nennt man diesen *„metrisch"*, wenn die Bedingung

$$Dg_{il}(x, y) = 0 \tag{23}$$

erfüllt ist.

Wir beweisen jetzt fast genauso wie in der Riemannschen Geometrie den folgenden

Satz. *Zu jedem metrischen Fundamentaltensor mit den Eigenschaften* 1. 2. 3. *auf einer Linienelementmannigfaltigkeit gibt es einen und nur einen metrischen, symmetrischen affinen Zusammenhang.*

Wir nehmen an, daß ein den gestellten Forderungen genügender Zusammenhang existiert, und beweisen zuerst die Eindeutigkeit. Sei erstens $dx^r = 0$. Dann gilt wegen (23)

$$Dg_{il} = (\dot{\partial}_s g_{il} - C_{is}{}^k g_{kl} - C_{ls}{}^k g_{ik}) Dy^s = 0$$

oder

$$\dot{\partial}_s g_{il} = C_{is}{}^k g_{kl} + C_{ls}{}^k g_{ik}.$$

Vertauscht man hier die Indizes zyklisch und zieht die obige Gleichung von den beiden so entstehenden ab, so folgt wegen der Symmetriebedingungen

$$\dot{\partial}_i g_{ls} + \dot{\partial}_l g_{si} - \dot{\partial}_s g_{il} = 2 g_{sk} C_{il}{}^k$$

oder

$$C_{il}{}^k(x, y) = \frac{1}{2} g^{ks} (\dot{\partial}_i g_{ls} + \dot{\partial}_l g_{si} - \dot{\partial}_s g_{il}), \tag{24}$$

wobei g^{ks} der wegen der Bedingung 2. existierende zu g_{sl} inverse Tensor ist, der den Relationen

$$g^{ks}(x, y) g_{sl}(x, y) = \delta_l^k$$

genügt. Falls die $g_{il}(x, y)$ aus einem Variationsproblem entspringen, also (22) gilt, ergeben sich einfach die Koeffizienten $C_{il}{}^k$ von E. CARTAN [1]

$$C_{il}{}^k(x, y) = \frac{1}{2} g^{ks} \dot{\partial}_s g_{il}. \tag{25}$$

Damit sind die $C_{il}{}^k$ durch die Ableitungen des Tensors g_{il} ausgedrückt und folglich eindeutig bestimmt. Zugleich bemerkt man, daß die durch (24) bzw. (25) *definierten* Ausdrücke den Bedingungen I (7), II (17), III (8), und IV (6) genügen. I ergibt sich aus (4), weil g_{il} ein Tensor ist, II und III sieht man unmittelbar und IV folgt aus (21).

Zweitens sei das Linienelement (x, y) in ein Feld eingebettet, das in diesem Linienelement stationär ist, so daß $Dy^s = 0$ identisch in den dx^r gilt.

Wir erhalten dann aus $Dg_{il}=0$:

$$\partial_r g_{il} - \dot{\partial}_s g_{il} \overset{*}{\Gamma}{}_{hr}{}^{s} y^h = \overset{*}{\Gamma}{}_{ir}{}^{k} g_{kl} + \overset{*}{\Gamma}{}_{lr}{}^{k} g_{ik}\,. \tag{26}$$

Durch zyklische Vertauschung der Indizes r, i, l und Subtraktion der Gleichung (26) von den beiden so entstehenden Gleichungen folgt wegen der Symmetriebedingungen

$$\overset{*}{\Gamma}{}_{il}{}^{k}(x,y) = \left\{ {k \atop i\ l} \right\}^{(0)} - \frac{1}{2} g^{kr} (\dot{\partial}_s g_{lr} \overset{*}{\Gamma}{}_{hi}{}^{s} + \dot{\partial}_s g_{ri} \overset{*}{\Gamma}{}_{hl}{}^{s} - \dot{\partial}_s g_{il} \overset{*}{\Gamma}{}_{hr}{}^{s}) y^h \tag{27}$$

wobei

$$\left\{ {k \atop i\ l} \right\}^{(0)}_{(x,y)} = \frac{1}{2} g^{kr} (\partial_i g_{lr} + \partial_l g_{ri} - \partial_r g_{il}) \tag{28}$$

gesetzt ist. Durch Verjüngen mit y^i folgt wegen (21)

$$\overset{*}{\Gamma}{}_{il}{}^{k}(x,y) y^i = \left\{ {k \atop i\ l} \right\}^{(0)} y^i - \frac{1}{2} g^{kr} \dot{\partial}_s g_{lr} \overset{*}{\Gamma}{}_{hi}{}^{s} y^h y^i \tag{29}$$

und durch nochmalige Verjüngung mit y^l folgt

$$\overset{*}{\Gamma}{}_{il}{}^{k}(x,y) y^i y^l = \left\{ {k \atop i\ l} \right\}^{(0)} y^i y^l\,. \tag{30}$$

Setzt man (30) in (29) und darauf (29) in (27) ein, so ergibt sich, daß die $\overset{*}{\Gamma}{}_{il}{}^{k}$ durch die Ableitungen der g_{il} ausgedrückt und infolgedessen eindeutig bestimmt sind. Zur Ausrechnung benutzen wir zuerst den ersten Teil von

$$\overset{*}{\Gamma}{}_{hl}{}^{s} y^h = \left\{ {s \atop h\ l} \right\}^{(0)} y^h - \frac{1}{2} g^{st} \dot{\partial}_m g_{lt} \left\{ {m \atop p\, q} \right\}^{(0)} y^p y^q$$

und erhalten als ersten Teil des zweiten Gliedes auf der rechten Seite von (27)

$$\left\{ {k \atop i\ l} \right\}^{(1)}_{(x,y)} = -\frac{1}{2} g^{kr} \left(\dot{\partial}_s g_{lr} \left\{ {s \atop h\ i} \right\}^{(0)} + \dot{\partial}_s g_{ri} \left\{ {s \atop h\ l} \right\}^{(0)} - \dot{\partial}_s g_{il} \left\{ {s \atop h\ r} \right\}^{(0)} \right) y^h \tag{31}$$

für den zweiten Teil des zweiten Gliedes ergibt sich entsprechend

$$\left\{ {k \atop i\ l} \right\}^{(2)}_{(x,y)} = \frac{1}{4} g^{kr} g^{st} (\dot{\partial}_s g_{lr} \dot{\partial}_m g_{it} + \dot{\partial}_s g_{ri} \dot{\partial}_m g_{lt} - \dot{\partial}_s g_{il} \dot{\partial}_m g_{rt}) \left\{ {m \atop p\, q} \right\}^{(0)} y^p y^q \tag{32}$$

Man erhält so schließlich

$$\overset{*}{\Gamma}{}_{il}{}^{k}(x,y) = \left\{ {k \atop i\ l} \right\}^{(0)} + \left\{ {k \atop i\ l} \right\}^{(1)} + \left\{ {k \atop i\ l} \right\}^{(2)} \tag{33}$$

einen Ausdruck, der auf anderem Wege schon in der Arbeit [2] von H. Rund als $\overset{*}{P}{}_{il}{}^{k}$ hergeleitet wurde. Durch eine Umrechnung der von E. Cartan in [1] angegebenen Formel für die $\overset{*}{\Gamma}{}_{il}{}^{k}$ erkennt man, daß diese mit den hier angegebenen Ausdrücken identisch sind. (Vgl. hierzu auch das Referat[1]) von A. Deicke und W. Süss über die Arbeit [2]).

[1]) *Zentralblatt f. Math.* **55** (1955), 404—405.

Zur Existenz des Zusammenhangs bleibt nur noch zu zeigen, daß die durch (28), (31), (32), (33) *definierten* Ausdrücke Γ_{il}^{*k} die Eigenschaften I (15), II (16), III (18) erfüllen. Da II und III offenbar von jedem Bestandteil $\left\{ {k \atop i\, l} \right\}^{(d)}$, $d = 0, 1, 2$, von Γ_{il}^{*k} erfüllt werden, werden sie auch von Γ_{il}^{*k} erfüllt. Das Transformationsverhalten I ergibt sich wieder daraus, daß man ohne Beschränkung der Allgemenheit voraussetzen kann, daß das betrachtete Linienelement in ein in ihm „stationäres" Feld eingebettet ist; dabei denken wir uns ein festes Koordinatensystem gegeben, in dem alle unseren bisherigen Überlegungen ausgeführt sind. Weil die nach (33) definierten Γ_{il}^{*k} offenbar die Gleichung (27) erfüllen, die im Fall eines in (x, y) „stationären" Feldes wegen (14) auch in der Form

$$(34) \qquad \Gamma_{il}^{*k}(x, y) = \frac{1}{2} g^{kr}(x, y(x)) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{lr} + \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ri} - \frac{\partial}{\partial x^r} g_{il} \right)$$

geschrieben werden kann (vgl. die Überlegungen nach Formel (14)), ergibt sich die Behauptung aus der Tatsache, daß (34) gerade als die gewöhnlichen Christoffelschen Symbole des rein ortsabhängigen Tensors $g_{il}(x, y(x))$ aufgefaßt werden können. Da die analogen Überlegungen für die C_{il}^{k} schon oben durchgeführt wurden, ist der Beweis vollständig.

Ich möchte die Arbeit nicht schließen, ohne Herrn Professor O. Varga herzlich für die vielen Ratschläge und Hinweise zu danken, die er mir während meines Aufenthaltes in Debrecen gegeben hat.

Literatur.

[1] E. Cartan, Les espaces de Finsler, *Paris,* 1934.

[2] H. Rund, On the analytical properties of curvature tensors in Finsler spaces, *Math. Ann.* **127** (1954), 82—104.

[3] O. Varga, Über affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Linienelementen, insbesondere deren Äquivalenz, *Publ. Math. Debrecen* **1** (1949), 7—17.

[4] O. Varga, Affinzusammenhängende Linienelementmannigfaltigkeiten, die ein Inhaltsmaß besitzen, *Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch.* **52** (1949), 316—322.

(Eingegangen am 11. März 1957.)