Über Sternpolygone.

Von J. MOLNÁR in Budapest.

Eine abgeschlossene, beschränkte Punktmenge S des n-dimensionalen euklidischen Raumes wird Sternkörper genannt, wenn S wenigstens einen Punkt M enthält, so daß S mit jedem Punkt P von S auch die Strecke MP enthält, oder — kurz gefaßt — wenn von M jeder Punkt von S sichtbar ist.[1])

Wir erinnern an folgenden Satz von KRASNOSELSKI:[2])

Es sei T eine abgeschlossene, beschränkte Punktmenge des n-dimensionalen euklidischen Raumes. Falls je $n+1$ Randpunkte von T von einem Punt von T sichtbar sind, so ist T ein Sternkörper.

Im folgenden Aufsatz beschränken wir uns auf Vielecke und geben für solche eine schärfere Bedingung.

G. HAJÓS hat gezeigt, daß man sich bei Vielecken anstatt sämtlicher Randpunkte auf die konvexen Eckpunkte beschränken kann.[3]) Im folgenden geben wir eine Verallgemeinerung dieses Ergebnisses. Wir beginnen mit folgender

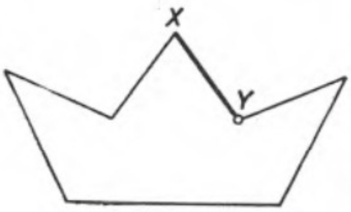

Fig. 1.

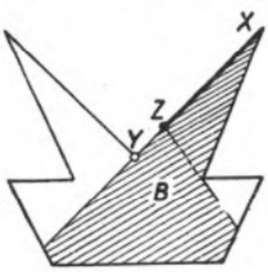

Fig. 2.

Definition. Wir nennen eine halbabgeschlossene Seite $[XY)$ eines Vielecks V Inflexionsseite wenn die bei X und Y liegenden Winkeln von V konvex und konkav sind (Fig. 1).

---

[1]) H. BRUNN, Über Kerneigebiete, *Math. Ann.* **73** (1913), 436—440.

[2]) M. A. Красносельский, Об одном критерий звездности, Мат. Сборник **19** (61) (1946), 309—310.

[3]) Dieser Satz hat mir Prof G. HAJÓS mündlich mitgeteilt, dem ich für seine wertvollen Bemerkungen auch an dieser Stelle meinen besten Dank ausspreche.

Unser Hauptergebnis lautet folgendermassen:

Satz: *Wir betrachten ein Vieleck V mit wenigstens drei (bzw. zwei) Inflexionsseiten. Läßt sich zu je drei (bzw. zwei) Inflexionsseiten ein Punkt finden aus dem je ein Punkt von diesen Seiten sichtbar ist, so ist V ein Sternvieleck.*

Der Fall, daß ein Vieleck nur eine Inflexionsseite aufweist, ist offenbar unmöglich.

Der Grundgedanke des Beweises besteht darin, daß wir — vom Verfahren von KRASNOSELSKI abweichend — nicht mit Halbebenen sondern mit gewissen einfach zusammenhängenden Bereichen operieren und auf diese den Hellyschen Satz anwenden. Dieser Gedanke kommt schon bei HAJÓS vor.

Die Hauptschritte des Beweises sind Folgende: Wir ordnen jeder Inflexionsseite $[XY)$ von V den aus denjenigen Punkten von V bestehenden Bereich zu, aus denen ein Teil von $[XY)$ sichtbar ist. Wir zeigen, daß diese Bereiche einen gemeinsamen Punkt besitzen, aus dem jeder Randpunkt von V sichtbar ist.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß die Anzahl der Inflexionsseiten $n>2$ ist. Nach unserer Voraussetzung läßt sich zu drei beliebig ausgewählten Inflexionsseiten ein Punkt finden aus dem je ein Punkt dieser Seiten sichtbar ist. Da die Anzahl der auf $[XY)$ liegenden „sichtbaren" Punkten endlich ist $\left(\leqq\binom{n}{2}\right)$, gibt es unter ihnen einen Punkt Z auf $[XY)$ von maximalem Abstand von X. Wir betrachten sämtliche Punkte Q von V von denen aus mindestens ein Punkt von $[XZ]$ sichtbar ist (Fig. 2). Es ist leicht einzusehen, daß diese Punkte eine abgeschlossenen einfach zusammenhängenden Bereich B bilden. Wir ordnen diesen Bereich zu $[XY)$ zu. Wir bezeichnen die in dieser Weise zu den Inflexionsseiten von V zugeordneten Bereiche mit $B_1, B_2, \dots, B_n$. Wir zeigen, daß der Durchschnitt von je zwei Bereichen B_i, B_j zusammenhängend ist, d. h., daß je zwei Punkte A, B von B_i, B_j sich durch einen in $B_i \cdot B_j$ verlaufenden Streckenzug verbinden lassen.

Um dies einzusehen betrachten wir den in V verlaufenden, A und B verbindenden kürzesten Streckenzug s. Wir zeigen, daß $s \subset B_i \cdot B_j$, d. h. daß aus jedem Punkt von s je ein Punkt der beiden entsprechenden Strecken $[XZ)$ sichtbar ist.

Wir betrachten diejenigen Punkte C und D derselben Inflexionsseite, die aus A bzw. B sichtbar sind. Es genügt zu zeigen, daß aus jedem Punkt von s ein Punkt der Strecke CD sichtbar ist.

BEWEIS. Zunächst zeigen wir, daß s im Viereck $\bar{V}=ACDB$ liegt[4]) (Fig. 3a, b, c). Ist $s \not\equiv AB$, so muß s einen inneren Punkt von $\bar{V}$ enthalten, da sonst V die Strecke $AB < s$ enthalten würde. s kann weder AC noch BD schneiden. Hätte nämlich s z. B. mit AC einen schnittpunkt E, so könnten wir den Teilstreckenzug $A \ldots E$ von s durch die Strecke AE ersetzen wodurch wir einen kürzeren Streckenzug erhalten würden. Da aus ähnlichen Gründen s auch die Strecke CD nicht schneiden kann, könnte s nur dann außerhalb $\bar{V}$ einen Punkt aufweisen, wenn der Streckenzug $s=AU_1 \ldots U_kB$ die Strecke AB schneiden würde. In diesem Fall könnten wir aber den außerhalb $\bar{V}$ liegenden Teil von s durch den Durchschnitt des Vielecks $AU_1 \ldots U_kBDC$ und der Strecke AB ersetzen, wodurch wir wiederum zu einem kürzeren Streckenzug gelangen würden. Damit ist gezeigt, daß $\bar{V}$ den Streckenzug s enthalten muß.

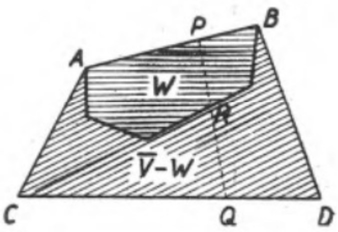

Fig. 3a

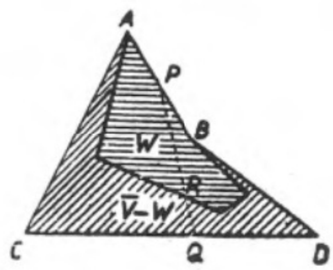

Fig. 3b

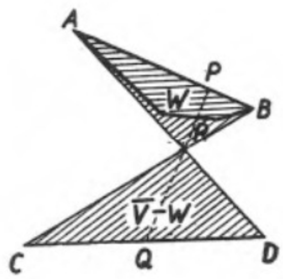

Fig. 3c

Wir behaupten, daß die bei $U_1, \ldots, U_k$ liegenden Winkel des Vielecks $W=AU_1 \ldots U_kB$ konvex sind. Wäre nämlich der bei U_i liegende Winkel konkaw, so könnte man auf den Schenkeln dieses Winkels je einen Punkt X und Y so auswählen, daß $XY \subseteq \bar{V}-W$ und $AU_1 \ldots U_{i-1}XYU_{i+1} \ldots B < s$, was unmöglich ist.

Nach diesen Vorbereitungen zeigen wir, daß aus jedem Punkt von s wenigstens ein Punkt von CD sichtbar ist. Es sei $P \in AB$ und $Q \in CD$. Da die Sehnen PQ von $\bar{V}$ das Viereck $\bar{V}$ offensichtlich überdecken, gibt es eine Sehne PQ, die einen beliebig vorgegebenen Punkt von s enthält. Es genügt zu zeigen, daß auf der Sehne PQ nur einzige „Strecke"[5]) RQ vorhanden ist, die zum Vieleck $\bar{V}-W$ gehört. Wir setzen voraus, daß PQ außer RQ noch eine in $\bar{V}-W$ liegende „Strecke" MN enthält. In diesem Fall würde der sich an MN stützende Bogen von s zusammen mit der „Stre-

[4]) Es kann vorkommen, daß im Viereck $\bar{V}=ACDB$ die Seiten AC und BD einander in einem Punkt M schneiden. In diesem Fall verstehen wir unter dem Inneren von $\bar{V}$ die Summe der Inneren der Deiecke MAB und MCD.

[5]) Die „Strecke" kann auch ein Punkt sein.

cke" MN ein solches „Vieleck" ergeben, das in wenigstens einem Eckpunkt von s einen konvexen Winkel hätte. Dann hätte aber W in diesem Eckpunkt einen konkaven Winkel, was unmöglich ist.

Fassen wir nur die abgeschlossenen einfach zusammenhängenden Bereiche $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ins Auge! Nach unseren Voraussetzungen besitzen je drei von diesen einen gemeinsamen Punkt. Da ferner, nach den obigen Betrachtungen, der Durchschnitt von je zwei Bereichen zusammenhängend ist, besitzen nach dem Hellyschen Satz[6]) sämtliche Bereiche einen gemeinsamen Punkt M. Von diesem Punkt aus ist je ein Punkt sämtlicher Inflexionsseiten von V sichtbar. Wir bezeichnen diese „sichtbaren" Punkte, in zyklischer Reihenfolge, mit $P_1, P_2, \ldots, P_n$, und betrachten den Bogen $P_i A_k \ldots A_m P_{i+1}$ am Rande von V. Da der Streckenzug $A_k \ldots A_m$ keine Inflexionsseite enthält, ist $P_i A_k \ldots A_m P_{i+1}$ entweder konvex oder konkav. Wir zeigen jetzt, daß von M aus jeder Punkt von V sichtbar ist. Dies folgt unmittelbar aus folgendem

Lemma: *Sind von einem Punkt M eines Vielecks V zwei innere Punkte P und Q eines konvexen (konkaven) Bogens des Randes sichtbar, so ist der ganze Bogen $PA_1 \ldots A_k Q$ von M sichtbar.*

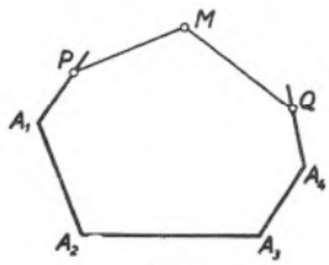

Fig. 4.

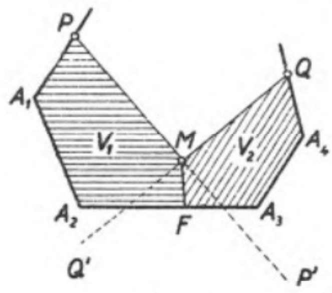

Fig. 5.

Beweis. Fall a). $PA_1 \ldots A_k Q$ ist konvex. Der Fall $\sphericalangle PMQ < \pi$ ist trivial weil dann $V^* = MPA_1 \ldots A_k Q$ konvex ist (Fig. 4). Im fall $\sphericalangle PMQ > \pi$ bezeichnen wir die Spiegelbilder von P bzw Q bezüglich M mit P' bzw. Q' (Fig. 5). Sei F ($\neq A_i$) der erste Schnittpunkt einer von M ausgehenden, im Winkelraum von $\sphericalangle P'MQ' (< \pi)$ liegenden Halbgerade mit dem Bogen $PA_1 \ldots A_k Q$. Wir betrachten die Vielecke $V_1 = MPA_1 \ldots A_i F$ und $V_2 = FA_{i+1} \ldots A_k QM$. Es ist leicht einzusehen, daß auch die bei F liegenden Winkel von V_1 und V_2 konvex sind, womit auch dieser Fall erledigt ist.

Fall b). $PA_1 \ldots A_k Q$ ist konkav. Es sei B ein beliebiger inneren Punkt des Vielecks $V^* = MPA_1 \ldots A_k Q$. Es genügt zu zeigen, daß V^* die Strecke

[6]) E. Helly, Über Systeme von abgeschlossene Mengen mit gemeinschaftlichen Punkten, *Monatsh. Math.* **37** (1930), 281—302, S. auch J. Molnár, A kétdimenziós topológikus Helly-tételről, *Mat. Lapok,* **8** (1957), 108—114.

MB enthält (Fig. 6). Es sei, im Gegensatz zu dieser Behauptung, K ein auf der Strecke MB liegender äusserer Punkt von V^*. Es sei XY die in V^* liegende, B enthaltende größte Strecke der Geraden MB. Dann begränzt der zwischen X und Y liegende Teil $XA_g \ldots A_h Y$ des Bogens $PA_1 \ldots A_k Q$ zusammen mit der Strecke XY, ein Vieleck $\overline{V} = XA_g \ldots A_h Y$. Diese Vieleck $\overline{V}$ besitzt ausser X und Y noch eine konvexe Ecke, was der Voraussetzung, daß $PA_1 \ldots A_k Q$ konkav ist, widerspricht. Damit ist der Beweis unseres Satzes für den Fall $n > 2$ beendet.

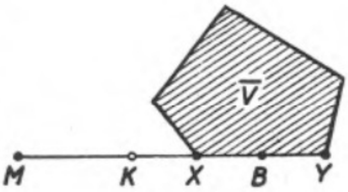

Fig. 6.

Die Richtigkeit des Satzes für $n = 2$ folgt unmittelbar aus unserem Lemma.

Zum schluß wenden wir unsere Aufmerksamkeit dem dreidimensionalen Fall zu. Wir konstruieren ein Polyeder, daß kein Sternpolyeder ist, obwohl sämtliche Ecken aus einem festen Punkt des Polyeder sichtbar sind. Wir betrachten ein Sechseck V das kein Sternpolygon ist und das zwei benachbarte Winkel von der Winkelsumme $\geqq 3\pi$ besitzt (Fig. 7). Wir stellen in einem beliebigen Punkt A von V eine Senkrechte auf die Ebene von V. Verbinden wir einen beliebigen Punkt S der Senkrechte mit den Punkten von V, so erhalten wir eine Sternpyramide (Fig. 8). Wir behaupten, daß S der einzige Punkt der Pyramide ist, aus der sämtliche Pyramidenpunkte sichtbar sind.

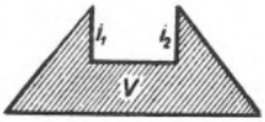

Fig. 7.

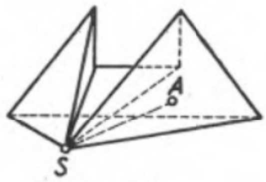

Fig. 8.

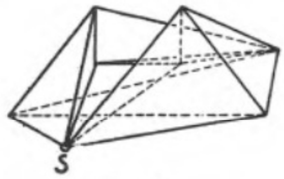

Fig. 9.

Es seien nämlich i_1, i_2 die zwei Inflexionsseiten von V. Die Ebene Si_1 und Si_2 zerlegen $\dot{P}$ in je zwei Teilpyramiden, von denen diejenige, aus deren Punkte i_1 bzw. i_2 sichtbar ist, mit P_1 bzw. P_2 bezeichnet werden soll. Da S der einzige gemeinsame Punkt von P_1 und P_2 ist, ist S der einzige Punkt, aus der die Inflexionsseiten von V sichtbar sind, womit unsere Behauptung bewiesen ist. Ergänzen wir P durch sein Spiegelbild bezüglich der Ebene von V, so gewinnen wir ein Polyeder dessen sämtliche Ecken von S sichtbar sind und das doch kein Sternpolyeder ist (Fig. 9). Mit Rücksicht auf die Voraussetzung bezüglich der Winkelsumme läßt sich nämlich leicht zeigen, daß das Innere wenigstens einer der Spiegelbilder der Dreiecke Si_1 und Si_2 aus S nicht sichtbaı ist.

(Eingegangen am 8. Juli 1957.)