Eine Bemerkung über partielle Differentiationen bei N. H. Abel.

Von H. KIESEWETTER in Jena.

Um in gewissen Funktionalgleichungen zweiter Stufe (d. h. mit zwei unabhängigen Veränderlichen x und y) Glieder der Form $\varphi[\alpha(x, y)]$ zu eliminieren, benutzte N. H. Abel [1] einen Differentiationsprozeß, den er wie folgt beschreibt:

„On peut donc différentier l'équation (fonctionnelle) $V=0$ par rapport à l'une des variables x, en considérant $\alpha(x, y)$ comme constant, et dans ce cas l'autre variable y doit être considérée comme fonction de x et de α. ... Ce qui précède dépend, comme nous venons de le voir, de la différentiation d'une fonction de x et y par rapport à x, en supposant constante une fonction donnée de x et y; y est donc fonction de x et dans les différentielles se trouvent les expressions $\frac{dy}{dx}, \ldots$, etc. Ces expressions se trouvent aisément en différentiant l'équation $\alpha=c$ par rapport à x, et en supposant y fonction de x. En effet, on obtiendra les équations suivantes:

$$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\alpha}{dy}\frac{dy}{dx}=0, \ldots, \text{etc},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{d\alpha}{dy}}, \ldots, \text{etc.“}$$

Diese Beschreibung kann dahingehend mißverstanden werden, daß die durch solchen Differentiationsprozeß aus $V(x, y)=0$ abgeleitete[1]. Gleichung $V_1(x, y)=0$ nur unter der Nebenbedingung $\alpha(x, y)=\text{const.}$ bzw. $y=y(x)$ gültig ist. Man kann das Verfahren von N. H. Abel rechtfertigen, wenn man zur Beschreibung des obigen Differentiationsprozesses folgenden Diffe-

[1]) Es soll durchweg vorausgesetzt werden, daß alle aufgeschriebenen Ableitungen existieren und stetig sind.

rentialoperator einführt:

$$(1)\qquad \overset{x,y}{D_\alpha} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \alpha_x & \alpha_y \end{vmatrix} = \alpha_y \frac{\partial}{\partial x} - \alpha_x \frac{\partial}{\partial y}$$ [2])

D_α erfüllt die Differentiationsregeln

$$(2)\qquad D_\alpha\{\beta(x,y)+\gamma(x,y)\} = D_\alpha\beta + D_\alpha\gamma \qquad \text{(Summenregel)}$$

$$(3)\qquad D_\alpha\{\beta(x,y)\cdot\gamma(x,y)\} = \gamma\cdot D_\alpha\beta + \beta\cdot D_\alpha\gamma \qquad \text{(Produktregel)}$$

$$(4)\qquad D_\alpha\{\eta[\beta(x,y),\gamma(x,y)]\} = \frac{\partial\eta[\beta,\gamma]}{\partial\beta} D_\alpha\beta + \frac{\partial\eta[\beta,\gamma]}{\partial\gamma} D_\alpha\gamma \qquad \text{(Kettenregel).}$$

Speziell:

$$(4')\qquad D_\alpha\{h[\beta(x,y)]\} = \frac{dh(\beta)}{d\beta} D_\alpha\beta(x,y)$$

$$(4'')\qquad D_\alpha\{h[\alpha(x,y)]\} = 0.$$

D_α ist der Operator einer Richtungsdifferentiation längs den Kurven der Schar $\alpha(x,y) = \text{const.}$, wenn man x und y als kartesische Koordinaten einer Ebene deutet. Trägt man $z = V(x,y)$ als dritte kartesische Koordinate über dieser Ebene auf, dann ist $D_\alpha\{V(x,y)\}$ ein Maß für den Anstieg der Tangente an die Fläche $z = V(x,y)$ im Punkt x, y, z und in der Richtung der Kurvenschar $\alpha(x,y) = \text{const.}$

Den Anschluß an bekannte Differentiationsprozesse gewinnt man aus

$$(5)\qquad D_\alpha\{V(x,y)\} = \sqrt{\alpha_x^2+\alpha_y^2}\,\mathfrak{t}_\alpha\cdot\operatorname{grad} V,$$

wobei

$$\mathfrak{t}_\alpha = \frac{\alpha_y\mathfrak{n}_1 - \alpha_x\mathfrak{n}_2}{\sqrt{\alpha_x^2+\alpha_y^2}}$$

der Tangenteneinheitsvektor an die Kurven der Schar $\alpha(x,y) = \text{const.}$ ist. Speziell erhält man für $\alpha(x,y) = y \quad D_y = \dfrac{\partial}{\partial x}$ und für $\alpha(x,y) = -x \quad D_{-x} = \dfrac{\partial}{\partial y}$.

D_α ist nur bis auf einen skalaren Faktor $a(x,y)$ betimmbar, der durch (1) normiert wurde. D_α ist natürlich nur sinnvoll in regulären Punkten der Kurvenschar $\alpha(x,y) = \text{const.}$ Man erhält

$$(6)\qquad D_\alpha\{\beta(x,y)\} = \begin{vmatrix} \beta_x & \beta_y \\ \alpha_x & \alpha_y \end{vmatrix},$$

$$(7)\qquad D_\alpha\beta = 0 \iff \beta(x,y) = b[\alpha(x,y)].$$ [3])

---

[2]) Wenn Verwechslungen nicht möglich sind, schreibe ich kürzer $\overset{x,y}{D_\alpha} = D_\alpha$.

$$\left(\alpha_x = \frac{\partial\alpha(x,y)}{\partial x},\ \alpha_y = \frac{\partial\alpha(x,y)}{\partial y}\right)$$

[3]) Das Zeichen $\iff$ wird im Sinne „äquivalent" hier und im folgenden verwendet.

Ebenso wie $V(x, y) = 0$ gilt auch die differenzierte Gleichung $D_\alpha\{V(x, y)\} = V_1(x, y) = 0$ für unabhängig voneinander veränderliche Größen x und y, denn die Forderung $\alpha(x, y) = \text{const.}$ dient nur zur Festlegung der Richtung der Differentiation. Sie schränkt die Variabilität im Ergebnis der Differentiation nicht ein. Diese partielle Differentiation längs Kurvenscharen läßt sich ohne Schwierigkeiten auf beliebig viele Dimensionen verallgemeinern.

Ein k-dimensionaler euklidischer Raum ($k \geqq 2$) werde durch kartesische Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_k$ beschrieben. Durch $(k-1)$ funktional unabhängige Funktionen

$$\alpha_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, \alpha_{k-1}(x_1, \ldots, x_k)$$

wird eine Kurvenschar in diesem Raum bestimmt als Schnittgebilde der Hyperflächen $\alpha_\nu(x_1, \ldots x_k) = \text{const.} = c_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, k-1)$. Der normierte Operator der partiellen Differentiation längs diesen Kurven lautet

$$\text{(8)} \qquad \overset{x_1,\ldots,x_k}{D_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1}}} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial x_k} \\ \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{k-1,1} & \cdots & \alpha_{k-1,k} \end{vmatrix} \qquad \alpha_{\nu,\mu} = \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial x_\mu}.$$

Er erfüllt die Differentiationsregeln (2), (3) und (4). Er eignet sich zur einfachen Kennzeichnung funktionaler Verknüpfungen.[4])

$$\text{(9)} \qquad \overset{x_1,\ldots,x_k}{D_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1}}} \beta(x_1, \ldots, x_k) = 0 \iff \beta(x_1, \ldots, x_k) = b[\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}].$$

Aus (9) erhält man speziell mit $\gamma = \gamma(x_1, \ldots, x_k)$

$$\text{(10)} \qquad \begin{cases} \overset{x_1,\ldots,x_k}{D_{\gamma, x_3,\ldots,x_k}} \beta(x_1, \ldots, x_k) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \beta}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \beta}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial \gamma}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \gamma}{\partial x_2} \end{vmatrix} = 0 \\ \iff \beta(x_1, \ldots, x_k) = b[\gamma(x_1, \ldots, x_k), x_3, x_4, \ldots, x_k] \end{cases}$$

und

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} \overset{x_i, x_{i+1}}{D_\gamma} \beta(x_1, \ldots, x_k) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \beta}{\partial x_i} & \dfrac{\partial \beta}{\partial x_{i+1}} \\ \dfrac{\partial \gamma}{\partial x_i} & \dfrac{\partial \gamma}{\partial x_{i+1}} \end{vmatrix} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, \varkappa - 1;\ 2 \leqq \varkappa \leqq k) \\ \iff \beta(x_1, \ldots, x_k) = b[\gamma(x_1, \ldots, x_k), x_{\varkappa+1}, \ldots, x_k]. \end{cases}$$

Herrn Professor Dr. J. Aczél, Debrecen, danke ich für zahlreiche Hinweise, sowie für die Anregung, die vorliegende Bemerkung zu veröffentlichen.

---

[4]) Für weitere Beispiele von Kennzeichnungen funktionaler Abhängigkeiten durch partielle Differentialgleichungen vgl. u. a. [2]—[7].

Literatur.

[1] N. H. Abel, Méthode générale pour trouver des fonctions d'une seule quantité variable, lorsqu'une propriété des ces fonctions est exprimée par une équation entre deux variables, *Magazin for Naturvidenskaberne*, Aargang I, Bind 1 (1823). (Oeuvres complètes de N. H. Abel I., *Christiania*, 1881, p. 1—3).

[2] L. Bal—I. Rusu, Asupra unei grupari de variabile in vederea construirii nomogramelor compuse, *Acad. Repub. Pop. Romîne Fil. Cluj Stud. Cerc. Sti.* **5** (1954), 45—49.

[3] L. Bal—F. Rado, Doua teoreme referitoare la separarea variabilelor pentru equatiile cu cinci variabile, *Comunicările Acad. Repub. Pop. Romîne* **5** (1955), 285—290.

[4] L. Bal—F. Rado, Separarea variabilelor in nomografie, *Comunicările Acad. Repub. Pop. Romîne* **5** (1955), 303—305.

[5] M. E. Goursat, Sur les équations de second ordre à *n* variables analogues à l'équation de Monge-Ampère, *Bull. Soc. Math. France* **27** (1899), 1—34.

[6] Л. Я. Неишулер, О трехчленном разъединении переменных в уравнении с четырьмя переменными, Докл. Акад. Наук СССР **82** (1952), 189—192.

[7] Л. Я. Неишулер, Уравнения с четырьмя разъединяющимися переменными и оптимальное двухчленное табулирование их, Докл. Акад. Наук СССР **95** (1954), 709—712

(Eingegangen am 6. August 1957.)