L'introduction de la différentiation absolue dans l'espace affin.

Par J. MERZA à Debrecen.

Nous connaissons quelques méthodes de l'introduction de la différentiation absolue. La base de la méthode classique est le transport parallèle, l'élaboration duquel est due à LEVI-CIVITA. L'autre méthode tenant compte de ce que la dérivée d'un tenseur généralement n'est pas un tenseur, cherche un procédé qui fait correspondre à un tenseur de nouveau un tenseur. Dans cet article nous donnons une nouvelle définition de la différentiation absolue et nous démontrons le théorème suivant:

Théorème. *La dérivée absolue d'un vecteur est la projection de sa dérivée ordinaire prise dans l'espace dans lequel la surface est plongée sur le plan tangent. Dans la géométrie affine du groupe unimodulaire linéaire la projection est parallèle avec le vecteur normal affin de la surface, dans la géométrie des affinités radiaux avec le vecteur de position.*

Nos considérations seront faites dans le cas de l'espace à trois dimensions, ensuite nous généralisons les résultats obtenus aux surfaces à n dimensions plongées dans un espace affin à $n+1$ dimensions.

Le théorème précédent est la généralisation d'un théorème connu. Notamment, dans le cas de la surface

$$x^i = x^i(u^1, u^2) \qquad (i = 1.2, 3)$$

de l'espace euclidien considérons le champ de vecteurs

$$l^i = l^i(t)$$

donné le long d'une courbe

$$u^\alpha = u^\alpha(t) \qquad (\alpha = 1, 2).$$

Chaque vecteur de ce champ peut être décomposé dans le plan tangent de cette manière:

$$l^i = \lambda^\alpha \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}.$$

Par la différentiation de cette relation, puis en employant les formules

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = \Gamma^\varrho_{\alpha\beta} \frac{\partial x^i}{\partial u^\varrho} + b_{\alpha\beta} n^i$$

de Gauss on trouve

$$\frac{dl^i}{dt} = \left(\frac{d\lambda^\varrho}{dt} + \Gamma^\varrho_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \frac{du^\beta}{dt}\right) \frac{\partial x^i}{\partial u^\varrho} + b_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \frac{du^\beta}{dt} n^i.$$

Projetons maintenant ce vecteur parallèlement avec le normal sur le plan tangent:

$$\operatorname{proj}\left(\frac{dl^i}{dt}\right) = \left(\frac{d\lambda^\varrho}{dt} + \Gamma^\varrho_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \frac{du^\beta}{dt}\right) \frac{\partial x^i}{\partial u^\varrho}.$$

Par conséquent, si nous appliquons l'opération

$$\frac{D\lambda^\alpha}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\lambda^\alpha}{dt} + \Gamma^\alpha_{\varrho\sigma} \lambda^\varrho \frac{du^\sigma}{dt}$$

au vecteur donné avec les composantes λ^α, nous obtenons de nouveau un vecteur dans le plan tangent. Cette méthode est apte à définir la différentiation absolue d'un vecteur. Le résultat reçu montre que la méthode de l'introduction est exact, parce que nous sommes arrivés au résultat connu. Décomposant des tenseurs par rapport au repère naturel nous pouvons définir tout de suite leurs dérivées absolues avec la méthode de projection.

Cette façon de l'introduction de la dérivation absolue fournit un modèle géométrique. On peut se poser la question de savoir s'il existe un modèle semblable dans l'espace affin. La réponse est affirmative. Pour la démonstration il faut déduire les formules de dérivation de la géométrie affine, n'utilisant pas la dérivée covariante. Par la suite la discussion se décompose en deux parties. Dans la première partie nous nous occuperons de la géométrie des affinités unimodulaires, puis nous ferons l'examen de la géométrie des affinités homogènes.

1. La géométrie des affinités unimodulaires.

La surface soit donnée par les équations

(1) $$x^i = x^i(u^1, u^2) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

où x^i signifie des coordonnées cartésiennes. Supposons que

$$\operatorname{rang} \left\| \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \right\| = 2 \qquad (\alpha = 1, 2).$$

La géométrie des affinités unimodulaires consiste en des propriétés des surfaces qui sont invariantes par le groupe des transformations affines

$$\bar{x}^i = a^i_j x^j + a^i; \quad \det(a^i_j) = +1.; \quad a^i_j = \text{const}; \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

et celui des transformations des paramètres.

Les deux formes fondamentaux de la géométrie différentielle affine sont

$$\varphi = G_{\alpha\beta}\, du^\alpha du^\beta$$

— c'est la forme quadratique — et

$$\psi = A_{\alpha\beta\gamma}\, du^\alpha du^\beta du^\gamma$$

— la forme cubique.

Les coefficients de la forme quadratique sont déterminés par les formules

$$L_{\alpha\beta} = \left| \frac{\partial x^i}{\partial u^1}, \frac{\partial x^i}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \right|$$

$$L = L_{11} L_{22} - L_{12}^2$$

$$G_{\alpha\beta} = \frac{L_{\alpha\beta}}{|L|^{1/4}}.$$

Nos observations ne sont valables que pour des surfaces le déterminant L desquelles n'est pas zéro. Les coefficients de la forme cubique ont la forme

$$A_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \cdot \left| \frac{\partial x^i}{\partial u^1}, \frac{\partial x^i}{\partial u^2}, \frac{\partial^3 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta \partial u^\gamma} \right| - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} + \frac{\partial G_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial G_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha} \right)$$

où

$$G = G_{11} G_{22} - G_{12}^2.$$

Il importe de remarquer qu'il existe encore une relation entre les coefficients de la forme quadratique et cubique. C'est „la condition d'apolarité“:

$$G^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta\gamma} = 0.$$

Choisissons sur la surface des systèmes de coordonnées en attachant à chaque point de la surface un trièdre qui se compose du vecteur normal affin et des tangents des deux courbes de coordonnées. Si les équations de la surface ont la forme (1, 1) alors le normal affin est défini par l'opération

$$n^i = \frac{1}{2} \Delta x^i$$

ou Δ signifie le paramètre différentiel du second ordre de Beltrami. Plus précisement

$$n^i = \frac{1}{2\sqrt{|G|}} \frac{\partial}{\partial u^\beta} \left(\sqrt{|G|}\, G^{\alpha\beta} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \right).$$

Accomplissons la dérivation marquée en appliquant les relations

$$\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u^\beta} = \Gamma^\varrho_{\varrho\beta} \qquad \text{et} \quad \frac{\partial G^{\alpha\beta}}{\partial u^\beta} = -G^{\alpha\varrho} \Gamma^\beta_{\beta\varrho} - G^{\varrho\beta} \Gamma^\alpha_{\beta\varrho}$$

dans lesquelles les quantités $\Gamma^{\varrho}_{\alpha\beta}$ sont les symboles de Christoffel de seconde espèce composés du tenseur fondamental $G_{\alpha\beta}$. On en déduit facilement la forme cherchée

$$n^i = \frac{1}{2} \cdot G^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} - \Gamma^{\varrho}_{\alpha\beta} \frac{\partial x^i}{\partial u^\varrho} \right)$$

du normal affin. Les tangents des courbes de coordonnées et le normal affin sont naturellement linéairement indépendents.

Dans ce trièdre dans le point P de la surface tous les vecteurs sont décomposables. Pour nous il est important de déterminer les dérivées des vecteurs de base, et cela nous conduira aux équations affines de Gauss et de Weingarten. L'introduction d'un symbole fera notre calcul plus clair. En faisant abstraction du sens géométrique, définissons le vecteur

$$\mathfrak{X} = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \cdot \left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^2} \right).$$

Évidemment les équations

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \cdot \mathfrak{X} = G_{\alpha\beta} \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^\sigma} \cdot \mathfrak{X} = 0 \tag{3}$$

sont vraies. En outre la formule

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial u^\varrho} \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^\alpha} = -G_{\alpha\varrho}$$

reçue par la différentiation de l'identité (3) est aussi valable. A l'aide des identités précédentes nous pouvons déduire d'autres relations très essentielles. En utilisant la définition des coefficients $A_{\alpha\beta\gamma}$, dérivons l'identité (1, 2). On en déduit

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^\gamma} = -(A_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\alpha\gamma\beta}).$$

En examinant „les produits scalaires" du normal affin et de sa dérivée nous trouvons par un calcul simple les relations

$$\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{X} = 1$$

et

$$\frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial u^\gamma} \cdot \mathfrak{X} = 0.$$

Cette dernière fournit, en tenant compte de (4), l'équation

$$\mathfrak{n} \cdot \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial u^\alpha} = 0.$$

Nous allons maintenant déterminer le groupe des équations de Gauss affines. Décomposons la deuxième dérivée du vecteur de position à l'aide des vecteurs de base du trièdre dans le point P de la surface. En désignant les composantes inconnues par $a^{\varrho}_{\alpha\beta}$ et $a_{\alpha\beta}$ nous pouvons écrire

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = a^{\varrho}_{\alpha\beta} \frac{\partial x^i}{\partial u^\varrho} + a_{\alpha\beta} n^i.$$

Multiplions „scalairement" par $\mathfrak{X}$ et puis par $\dfrac{\partial \mathfrak{X}}{\partial u^\gamma}$ tous les deux côtés de cette équation. Nous recevons le résultat

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = \left(A^{\varrho}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\varrho}_{\alpha\beta}\right) \frac{\partial x^i}{\partial u^\varrho} + G_{\alpha\beta} n^i.$$

Pour l'analogie plus formelle employons la notation

$$A^{\varrho}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\varrho}_{\alpha\beta} = \Gamma^{*\varrho}_{\alpha\beta}.$$

L'expression cherchée sera donc

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = \Gamma^{*\varrho}_{\alpha\beta} \frac{\partial x^i}{\partial u^\varrho} + G_{\alpha\beta} n^i.$$

Nous n'avons pas besoin des équations de Weingarten pour introduire la dérivée absolue mais remarquons que la déduction est possible de cette manière, la détermination des coefficients inconnus, leur connexion avec la courbure moyenne de la surface, est calculable des conditions d'intégrabilité des équations de Gauss sans l'utilisation de la dérivée covariante.

Ensuite l'interprétation de la dérivée absolue du vecteur est possible de même que dans le cas euclidien, seulement au lieu du symbole Γ il faut écrire le symbole affin Γ^*. La dérivée absolue affine du vecteur avec les composantes contrevariantes λ^ϱ sera donc

$$\frac{D^* \lambda^\varrho}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\lambda^\varrho}{dt} + \Gamma^{*\varrho}_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \frac{du^\beta}{dt}.$$

Si nous décomposons un tenseur contrevariant arbitraire sur la surface par rapport au repère naturel, dérivons ordinairement puis projetons sur le plan tangent alors nous obtenons sa dérivée comme dans le cas euclidien.

L'opération D^* a les propriétés caractéristique de l'opération différentielle. Notamment l'opération D^* satisfait la relation additive

$$D^*(\lambda^\alpha + \mu^\alpha) = D^* \lambda^\alpha + D^* \mu^\alpha$$

et pareillement la relation

$$D^*(\lambda^\alpha \mu^\beta) = \mu^\beta D^* \lambda^\alpha + \lambda^\alpha D^* \mu^\beta.$$

Il faut encore examiner que l'opération D^* donne-t-elle réellement un vecteur? Pour cela nous devons vérifier l'existence de la loi de transformation

$$\frac{\overline{D^*\lambda^\varrho}}{dt} = \frac{\partial \bar{u}^\varrho}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{D^*\lambda^\alpha}{dt}$$

Considérons la transformation

$$\bar{u}^\alpha = \bar{u}^\alpha(u^1, u^2)$$

des coordonnées. Nous pouvons observer que les quantités $\Gamma^{*\varrho}_{\alpha\beta}$ se transforment pareillement au cas euclidien parce que par l'addition des quantités $A^\varrho_{\alpha\beta}$-qui ont un caractère tensoriel-la loi de transformation des $\Gamma^\varrho_{\alpha\beta}$ ne change pas. A cause de celle-ci un calcul facile donne le résultat désiré.

Une autre méthode est la suivante. Il est clair que dans l'espace dans lequel la surface est plongée la dérivation $\frac{dl^i}{dt}$ est déterminée uniquement, c'est à dire

$$\frac{dl^i}{dt} = \frac{\overline{dl^i}}{dt}.$$

Nous en déduisons par un calcul immédiat la relation

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{u}^\varrho} \cdot \frac{\overline{D^*\lambda^\varrho}}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{D^*\lambda^\alpha}{dt}$$

d'où

$$\frac{\overline{D^*\lambda^\varrho}}{dt} = \frac{D^*\lambda^\alpha}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{u}^\varrho}{\partial u^\alpha}$$

La dérivation covariante des vecteurs covariants et des tenseurs covariants est déjà la conséquence des précédents.

2. La géométrie des affinités homogènes.

Dans le cas euclidien et dans le cas unimodulaire la direction de la projection était parallèle avec le normal de la surface. Dans la géométrie des affinités homogènes ce n'est pas vrai et nous prouverons que c'est le vecteur de position avec lequel la direction de la projection est parallèle.

Choisissons comme base de départ les équations (2, 1) et comme forme quadratique la forme

$$\varphi = G_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$$

où les coefficients $L_{\alpha\beta}$ sont autrement no.més, à savoir de la manière suivante

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{w} \cdot L_{\alpha\beta}$$

où

$$w = \left| \frac{\partial x^i}{\partial u^1}, \frac{\partial x^i}{\partial u^2}, x^i \right|.$$

Les coefficients de la forme cubique sont donnés par les quantités

$$A_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{w} \cdot \left| \frac{\partial x^i}{\partial u^1}, \frac{\partial x^i}{\partial u^2}, \frac{\partial^3 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta \partial u^\gamma} \right| - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} + \frac{\partial G_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial G_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha} \right).$$

La définition du normal affin est la même comme dans le paragraphe précédent. Si nous introduisons pour la simplification de nos formules le vecteur

$$\mathfrak{X} = \frac{1}{w} \cdot \left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^2} \right),$$

alors les équations suivantes sont de nouveau vraies:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \cdot \mathfrak{X} = G_{\alpha\beta} \qquad \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^\alpha} \cdot \mathfrak{X} = 0$$

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial u^\varrho} \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^\alpha} = -G_{\alpha\varrho} \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial u^\gamma} = -(A_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\alpha\gamma\beta}).$$

Et voici la différence essentielle! Nous pouvons voir facilement que

$$\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{X} = 1$$

et ce qui résulte de ceci

$$\mathfrak{x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial u^\alpha} = 0$$

parce que

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^\alpha} \cdot \mathfrak{X} = 0.$$

Les vecteurs du trièdre sur la surface seront donc les tangents des lignes de coordonnées et le vecteur de position. L'appliquation successive des méthodes du premier paragraphe nous conduit aux formules de Gauss homogènes-affine

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = \overset{*}{\Gamma}{}^{\varrho}_{\alpha\beta} \frac{\partial x^i}{\partial u^\varrho} + G_{\alpha\beta} x^i$$

par l'emploi desquelles, en faisant une projection parallèle avec le vecteur de position, dans la géométrie des affinités homogènes nous pouvons introduire la différentiation absolue.

Finalement nous remarquons que nos résultats sont généralisables aux surfaces à n dimensions plongées dans l'espace affin à $n+1$ dimensions. La surface soit donnée par les équations

$$x^i = x^i(u^1, \ldots, u^n) \qquad (i = 1, \ldots, n+1).$$

Les quantités $L_{\alpha\beta}$ ont la forme

$$L_{\alpha\beta} = \left| \frac{\partial x^i}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial x^i}{\partial u^n}, \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \right|.$$

Formons de ces quantités les coefficients

$$G_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{L_{\alpha\beta}}{|L|^{1/n+2}} \qquad \text{ou} \qquad G_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{w} \cdot L_{\alpha\beta}$$

où nous avons employés les notations

$$L = \det(L_{\alpha\beta}) \qquad \text{ou} \qquad w = \left| \frac{\partial x^i}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial x^i}{\partial u^n}, x^i \right|.$$

L'expression des formes différentielles est la même que dans le cas à trois dimensions. Les coefficients de la forme quadratique et de la forme cubique sont liés par la condition d'apolarité en supposant qu'il s'agit de la géométrie des affinités unimodulaires. Le normal affin est défini par l'opération

$$n^i = \frac{1}{n} \cdot \Delta x^i.$$

Les n composants du vecteur $\mathfrak{X}$ sont les n déterminants proprement normés de la matrice

$$\left\| \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \right\| \qquad (\alpha = 1, \ldots, n).$$

A l'aide du vecteur $\mathfrak{X}$ la déduction du groupe des formules de Gauss et l'introduction de la différentiation absolue est possible comme dans le cas précédent.

Bibliographie.

[1] W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie II., *Berlin,* 1923.
[2] A. Duschek—W. Mayer, Lehrbuch der Differentialgeometrie I—II., *Berlin,* 1930.
[3] L. P. Eisenhart, An introduction to Differential Geometry, *Princeton,* 1949.
[4] E. Salkowski, Affine Differentialgeometrie, *Berlin und Leipzig,* 1934.

(Reçu le 15 septembre 1957.)