Über die Reduktion der Stufe bei einer Klasse von Funktionalgleichungen.

Von J. ACZÉL in Debrecen und H. KIESEWETTER in Jena.

§ 1. Definitionen.

1. *Definition des Begriffes* T e r m *(vgl.* [11]).

α) Die unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *sind Terme.*

β) Sind $t_1, t_2, \ldots, t_l$ *Terme, dann ist auch* $\alpha = \alpha(t_1, \ldots, t_l)$ *ein Term, wobei* α *eine Funktion von* l *Veränderlichen ist.*

γ) Sonst gibt es keine anderen Terme.

2. *Definition des Begriffes* F u n k t i o n a l g l e i c h u n g.

Eine Funktionalgleichung ist eine Gleichung $t_1 = t_2$ *zwischen zwei Termen* t_1 *und* t_2, *welche genau* k *unabhängige komplexe oder reelle*[1]) *Zahlenvariable* $x_1, \ldots, x_k$ *und mindestens eine unbekannte komplex- oder reellwertige Funktion von einer oder mehreren Veränderlichen, aber höchstens endlich viele solche unbekannte und bekannte Funktionen enthalten.*

3. *Definition des Begriffes* F u n k t i o n a l g l e i c h u n g s s y s t e m.

Ein System von Funktionalgleichungen besteht aus zwei oder mehreren gekoppelten Funktionalgleichungen für eine oder mehrere unbekannte Funktionen, derart daß jede dem System angehörende Funktionalgleichung mit mindestens einer der übrigen dem System angehörenden Funktionalgleichungen mindestens eine unbekannte Funktion gemeinsam hat.

4. *Definition der* S t u f e *einer Funktionalgleichung bzw. eines Funktionalgleichungssystem.*

Die Stufe einer Funktionalgleichung ist die Anzahl k *der unabhängigen Veränderlichen.*

Die Stufe eines Funktionalgleichungssystem ist die größte der Stufen der Gleichungen des Systems.

---

1) Die unabhängigen Veränderlichen werden je nach der Fragestellung komplex oder nur reell veränderlich angenommen.

Eine Funktionalgleichung *lösen*, heißt alle Systeme von unbekannten Funktionen bestimmen, welche einer bestimmten Klasse von Funktionen angehören und der Funktionalgleichung genügen.

Die *Funktionsklasse* anzugeben, aus welcher allein man Lösungen einer Funktionalgleichung aussucht, ist empfehlenswert, weil man damit rechnen muß, daß in verschiedenen Funktionsklassen sich völlig verschiedene Lösungen ein und derselben Funktionalgleichung finden. Bei einer Differentialgleichung ist die funktionentheoretische Natur der Lösung durch gewisse Differenzierbarkeitsvoraussetzungen weitgehend vorgeschrieben. Im Gegensatz dazu werden von einer Funktionalgleichung an ihre Lösungen solche Forderungen nicht gestellt, so daß von vornherein eine sinnvolle Einschränkung der Funktionsklassen, aus denen allein Lösungen ausgesucht werden, angebracht ist. Als solche Klassen treten z. B. auf: die analytischen Funktionen, die stetigen Funktionen, die in einem festen Punkt stetigen Funtionen, die nirgends stetigen Funktionen, die messbaren Funktionen u. a. Die Angabe der Funktionsklasse, aus welcher allein Lösungen ausgesucht werden, kann sich z. B. auch äußern in gewissen „Anfangsbedingungen", welche zur Funktionalgleichung hinzutreten. Etwa von der Art $\exists \lim_{x \to x_0} [f(x)] = f(x_0)$.[2])

Wir sind jetzt bereit zur

5. *Definition des Begriffes Äquivalente Funktionalgleichungen bzw. Äquivalente Funktionalgleichungsysteme.*

Zwei Funktionalgleichungen (bzw. Funktionalgleichungssysteme) heißen äquivalent bezüglich gewisser Klassen von Funktionen, wenn beide Funktionalgleichungen (bzw. Funktionalgleichungssysteme) aus diesen Klassen genau dieselben Lösungen aussondern, d. h. jedes Lösungssystem der einen Funktionalgleichung (bzw. des einen Funktionalgleichungssystems), das diesen Klassen angehört, ist auch Lösung der anderen Funktionalgleichung (bzw. des anderen Funktionalgleichungssystems) und umgekehrt.

Wir betrachten weiter die Gesamtheit aller Funktionalgleichungen (bzw. Funktionalgleichungssysteme), die zu einer gegebenen Funktionalgleichung (bzw. einem gegebenen Funktionalgleichungssystem) äquivalent sind bezüglich gewisser Klassen von Funktionen. Unter ihnen gibt es mindestens eine Funktionalgleichung (bzw. ein Funktionalgleichungssystem) mit einer minimalen Anzahl unabhängiger Veränderlicher. Wir nennen sie eine Funktionalgleichung (bzw. ein Funktionalgleichungssystem) *minimaler Stufe* zur gegebenen Funktionalgleichung (bzw. zum gegebenen Funktionalgleichungssystem).

[2]) Hier und im folgenden verwenden wir die folgenden Bezeichnungen: $\exists$ = es existiert, & = und, $\Longrightarrow$ = folgt, $\Longleftrightarrow$ = äquivalent.

Ein wichtiges Mittel zur Erzeugung äquivalenter Funktionalgleichungen sind Transformationen in den unabhängigen Veränderlichen.

Der Inhalt der vorliegenden Arbeit wird sein zu zeigen, wie man für eine spezielle Klasse von Funktionalgleichungen die Stufe reduzieren kann.

§ 2. Die Reduktion der Stufe von $k \geqq 3$ nach $k = 2$.

Wir betrachten die spezielle Klasse von linearen Funktionalgleichungen für eine unbekannte Funktion von einer Veränderlichen

$$f[\psi(x_1, x_2, \ldots, x_k)] = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_k), \quad k \geqq 2. \tag{1}$$

$\psi(x_1, \ldots, x_k)$ sei fest vorgegeben. Die unabhängigen Größen $x_1, \ldots, x_k$ und alle anderen unabhängigen Größen denken wir uns in gewissen Gebieten der komplexen Zahlenebene stetig veränderlich, aber so, daß alle aufgeschriebenen Ausdrücke existieren. Wird gelegentlich nur Variabilität längs der reellen Achse vorausgesetzt, dann wird das ausdrücklich vermerkt.

Wir werden zeigen, daß die Stufe dieser Funktionalgleichungen bezüglich sehr allgemeiner Lösungsfunktionen reduziert werden kann von $k \geqq 3$ nach $k = 2$, indem wir zur Funktionalgleichung (1) äquivalente Funktionalgleichungen zweiter Stufe angeben. Die Beweise variieren je nach den Bedingungen, welche wir den Lösungsfunktionen auferlegen.

Satz 1. *Wenn die Funktionalgleichung* (1) *eine meßbare Lösung* $u = f_0(x)$ *besitzt, deren Umkehrfunktion* $x = f_0^{-1}(u)$ *existiert und eindeutig ist, dann gibt es eine Funktion*

$$\alpha(x_1, x_2) = f_0^{-1}[f_0(x_1) + f_0(x_2)]$$

derart, daß sämtliche meßbaren Lösungen $f(x)$ *von Gleichung* (1) *zugleich Lösungen von*

$$f[\alpha(x_1, x_2)] = f(x_1) + f(x_2) \tag{2}$$

sind und umgekehrt.[3])

Der Beweis wird geführt, indem gezeigt wird, daß sämtliche meßbaren Lösungen beider Gleichungen von der Gestalt

$$f(x) = a f_0(x) + b \overline{f_0(x)}, \qquad (\bar{c}: \text{ konjugiert komplexe Zahl zu } c), \tag{3}$$

sein müssen.

Zu diesem Zweck transformieren wir Gleichung (2) und auch Gleichung (1) in eine „Cauchysche Funktionalgleichung" für die Funktion

$$g(u) = f[f_0^{-1}(u)]. \tag{4}$$

---

[3]) $x = f_0^{-1}(u)$ ist die Umkehrfunktion zu $u = f_0(x)$.

Wir erhalten mit

$$(5)\qquad f_0(x_\nu)=u_\nu \quad \& \quad x_\nu=f_0^{-1}(u_\nu)$$

$$f\{f_0^{-1}[f_0(x_1)+f_0(x_2)]\}=f(x_1)+f(x_2)$$

$$(6)\qquad g(u_1+u_2)=g(u_1)+g(u_2).$$

Aus (1) folgt ($k\geqq 3$)

$$(7)\qquad g(u_1+u_2+\cdots+u_k)=g(u_1)+g(u_2)+\cdots+g(u_k).$$

Wir zeigen jetzt, daß die Gleichungen (6) und (7) äquivalent sind bezüglich der meßbaren Lösungen. Die allgemeine meßbare Lösung von Gleichung (6) ist

$$(8)\qquad g(u)=au+b\bar{u}.$$

Aus Gleichung (6) folgt nämlich durch Trennung von Real- und Imaginärteil

$$u_\nu=v_\nu+iw_\nu,\ g(u_\nu)=g_1(v_\nu,w_\nu)+ig_2(v_\nu,w_\nu)$$

$$g_1(v_1+v_2,w_1+w_2)=g_1(v_1,w_1)+g_1(v_2,w_2)\quad \text{bzw.}$$

$$g_2(v_1+v_2,w_1+w_2)=g_2(v_1,w_1)+g_2(v_2,w_2).$$

Die allgemeine meßbare Lösung dieser Funktionalgleichungen für reelle Veränderliche ist bekannt als

$$g_1(v,w)=A_1v+B_1w \quad \text{bzw.} \quad g_2(v,w)=A_2v+B_2w.$$

Das hat zur Folge

$$g(u)=(A_1+iA_2)\frac{u+\bar{u}}{2}+(B_1+iB_2)\frac{u-\bar{u}}{2i}=$$

$$=[A_1+B_2+i(A_2-B_1)]\frac{u}{2}+[A_1-B_2+i(A_2+B_1)]\frac{\bar{u}}{2}=au+b\bar{u}.$$

Dann und nur dann, wenn $g(u)$ komplex differenzierbar ist, folgt

$$(9)\qquad g(u)=au.$$

Es ist noch zu zeigen, daß auch die Gleichung (7) diese und nur diese Lösungen besitzt.

Jede Lösung von Gleichung (6) ist auch Lösung von Gleichung (7) trivialerweise. Umgekehrt könnte man so schließen:

$$u_2=u_3=\cdots=u_k=0 \implies g(0)=0$$

$$\& \ u_3=u_4=\cdots=u_k=0 \implies g(u_1+u_2)=g(u_1)+g(u_2).$$

Die Substitution $u=0$ würde aber voraussetzen

$$(10)\qquad \exists\omega,\ f_0(\omega)=0.$$

Das braucht aber nicht immer erfüllt zu sein.[4]) Deshalb muß man allgemein so schließen:

[4]) Beispiel: $f([\log(e^x+e^y+e^z)])=f(x)+f(y)+f(z)$ mit $f_0(x)=e^x$.

Wir setzen in (7)

$$u_3 = \cdots = u_k = c,\ u_1 = v_1 - (k-2)c,\ u_2 = v_2 - (k-2)c,$$

wo c ein Wert ist, den die Funktion f_0 annimmt, und erhalten

$$g[v_1 + v_2 - (k-2)c] = g[v_1 - (k-2)c] + g[v_2 - (k-2)c] + (k-2)g(c)$$

oder mit

$$h(v) = g[v - (k-2)c] + (k-2)g(c)$$

die Gleichung

$$h(v_1 + v_2) = h(v_1) + h(v_2),$$

welche, wie wir schon gesehen haben,

$$h(v) = av + b\bar{v}$$

als allgemeine meßbare Lösung hat. Deshalb ist jede meßbare Lösung der Gleichung (7) von der Gestalt

$$g(u) = au + b\bar{u} + C,$$

die aber (7) nur mit $C = 0$ erfüllt:

$$g(u) = au + b\bar{u}.$$

Es ist also auch jede Lösung von Gleichung (7) gleichzeitig Lösung von Gleichung (6). Bei der Transformation (4) gehen keine Lösungen verloren, denn jede Lösung von Gleichung (1) bzw. Gleichung (2) gibt Anlaß zu genau einer Lösung von Gleichung (7) bzw. Gleichung (6) und umgekehrt auf Grund der über $f_0(x)$ gemachten Voraussetzungen. Zu jeder fest vorgegebenen Funktion $f(x)$ gibt es nämlich eine und nur eine Funktion $g(u)$ gemäß (4), und umgekehrt zu jeder fest vorgegebenen Funktion $g(u)$ gibt es auch nur genau eine Funktion $f(x)$ gemäß

$$f(x) = g[f_0(x)]. \tag{11}$$

Damit ist Satz 1 bewiesen.

Die Reduktion der Stufe gelingt auch, wenn man die Voraussetzung über die Eindeutigkeit der Umkehrfunktion einer speziellen Lösung fallen läßt und dafür Differenzierbarkeitsvoraussetzungen einführt.

Satz 2. *Wenn $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ analytisch*[5]) *ist, und wenn eine nichtkonstante analytische*[5]) *Lösung $u = f_0(x)$ der Funktionalgleichung* (1) *existiert, die eine Nullstelle ω besitzt, ($f_0(\omega) = 0$), dann gibt es eine Funktion*

$$\alpha(x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2, \omega, \ldots, \omega)$$

---

[5]) „analytisch" kann für reelle Veränderliche ersetzt werden durch „zweimal stetig differenzierbar".

dergestalt, daß sämtliche analytischen [5]) *Lösungen von Gleichung* (1) *zugleich Lösungen von*

$$f[\alpha(x_1, x_2)] = f(x_1) + f(x_2) \tag{12}$$

sind und umgekekrt.

Beweis. Es ist bekannt[6]), daß unter diesen Voraussetzungen für die allgemeine Lösung $f(x)$ von Gleichung (1) ($k \geqq 2$) und auch von Gleichung (12) notwendig die Darstellung folgt

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} dt \exp\left[-\int_{t_0}^{t} d\tau\, q(\tau)\right] \qquad (f'(x) \neq 0), \tag{13}$$

und

$$q(x) = -\frac{f''(x)}{f'(x)}$$

berechnet sich z. B. aus

$$\frac{\psi_{\nu\lambda}}{\psi_\lambda} - \frac{\psi_{\nu\nu}}{\psi_\nu} = q(x_\nu), \quad \left(\lambda \neq \nu,\ \psi_\nu = \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu},\ \psi_{\nu\lambda} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\nu \partial x_\lambda}\right). \tag{14}$$

Aus (13) folgt bei Berücksichtigung der Integrationskonstanten und bei Benutzung einer speziellen nichtkonstanten Lösung $f_0(x)$ die Darstellung

$$f(x) = a f_0(x) + b, \qquad (a \text{ und } b \ldots \text{konstant}). \tag{15}$$

Die Einsetzung in (1) oder (12) ergibt $b = 0$, also

$$f(x) = a f_0(x)$$

für die allgemeine analytische Lösung von Gleichung (1) und auch von Gleichung (12).

Mit einer leichten Verallgemeinerung der Funktionalgleichung bestätigt man durch Einsetzen der Darstellung (15) in die Funktionalgleichung den folgenden

Satz 3. *Sind $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ und $f(x)$ analytisch* [5]) *und ist $f_0(x)$ eine spezielle nicht konstante analytische* [5]) *Lösung der Funktionalgleichung*

$$f[\psi(x_1, x_2, \ldots, x_k)] = c_1 f(x_1) + \cdots + c_k f(x_k) + c_0 \tag{16}$$

(c_ν *konstant*, $c_1 \cdot c_2 \cdots c_k \neq 0$, $k \geqq 2$), *so ist jede analytische* [5]) *Lösung von Gleichung* (16) *von der Form*

$$f(x) = a f_0(x) + (a-1) c_0 \qquad (a \text{ beliebig konstant}). \tag{17}$$

Nun beweisen wir ganz leicht Satz 2. Laut Voraussetzung ist $f_0(x)$ spezielle Lösung von Gleichung (1), und auf Grund der Konstruktion von $\alpha(x_1, x_2)$ ist $f_0(x)$ auch Lösung von Gleichung (12). Jede Lösung von Glei-

[6]) Vgl. z. B. [2], [8] und auch die Zusammenstellung der differentiellen Bedingungen in § 4a dieser Arbeit (Glchg. (35) und (57)).

chung (1) und auch von Gleichung (12) ist also von der Gestalt

$$f(x) = af_0(x), \tag{18}$$

woraus die Äquivalenz der Gleichungen (1) und (12) folgt.

Satz 2'. *Wenn $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ analytisch* [5]) *ist, und wenn eine nichtkonstante analytische* [5]) *Lösung $u = f_0(x)$ der Funktionalgleichung* (1) *existiert, dann gibt es eine Funktion*

$$\alpha(x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2, \omega, \ldots, \omega), \qquad (\omega \text{ konstant}),$$

dergestalt daß sämtliche analytischen [5]) *Lösungen von Gleichung* (1) *zugleich Lösungen von*

$$f[\alpha(x_1, x_2)] = f(x_1) + f(x_2) + (k-2)f(\omega) \tag{19}$$

sind und umgekehrt.

Die Funktionalgleichung (19) ist eine Funktionalgleichung zweiter Stufe, denn die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen ist gleich zwei. ω ist fest. Es ist bemerkenswert, daß der Funktionswert der gesuchten Lösungsfunktion an einer konstanten Stelle ω in die Funktionalgleichung eingeht. Man kann nicht $f(\omega) = c$ (const.) setzen, da man mit mehreren verschiedenen Lösungsfunktionen rechnen muß.

Wir beweisen Satz 2'. $f_0(x)$ ist sowohl Lösung von Gleichung (1) als auch von Gleichung (19). Die allgemeine Lösung von Gleichung (1) ist $f(x) = af_0(x)$. Die allgemeine Lösung von Gleichung (19) ist laut Satz 3 notwendig von der Form $f(x) = af_0(x) + b$. Durch Einsetzen in Gleichung (19) erkennt man $b = 0$, womit Satz 2' bewiesen ist.

§ 3. Über die Reduktion der Stufe von zwei nach eins.

Die Stufe zwei spielt offenbar bei den Funktionalgleichungen für eine Funktion von einer Veränderlichen eine Sonderrolle in zweifacher Weise. Einerseits sind in unserem Beispiel die Funktionalgleichungen zweiter Stufe „stark“ genug, um die Funktionalgleichungen höherer Stufe im Sinne der Äquivalenz ersetzen zu können. Andererseits läßt sich durch Beispiele nahelegen, daß die Funktionalgleichungen erster Stufe, die man zur Bestimmung derselben Lösungsfunktionen heranziehen könnte, bedeutend schwächere Forderungen an die Lösungsfunktionen stellen als diejenigen zweiter Stufe, denn in den allgemeinen Lösungen für diese Funktionalgleichungen erster Stufe treten willkürlich wählbare Funktionen auf.

Der Nachweis einer Äquivalenz zwischen Funktionalgleichungen zweiter und erster Stufe und damit die Reduktion der Stufe von zwei nach eins gelingt nur bezüglich sehr enger Klassen von Funktionen, die so ausgewählt werden müssen, daß die in der allgemeinen Lösung auftretenden willkürlichen Funktionen bestimmbar werden. Man kann auch sagen: Die Funktionalgleichungen erster Stufe bedürfen der Ergänzung durch gewisse zusätzliche Forderungen („Anfangsbedingungen"), wenn sie Funktionalgleichungen zweiter Stufe im Sinne der Äquivalenz ersetzen sollen.

Beispiel: Die Funktionalgleichung

$$f(2x) = 2f(x) \tag{20}$$

hat dann und nur dann eine Lösung der Form

$$f(x) = cx \qquad (c = \text{const.}), \tag{21}$$

wenn $f(x)$ in einer vollen Umgebung von $x = 0$ existiert und in $x = 0$ differenzierbar ist[7]).

Beweis: Die Gleichung (20) hat bekanntlich die allgemeine Lösung

$$\begin{cases} f(x) = xp\left(\dfrac{\log x}{\log 2}\right), & (x \neq 0, \text{ beliebig komplex, } \log 2 > 0) \\ \& \; p(z+1) = p(z) & \text{beliebige periodische Funktion.} \end{cases} \tag{22}$$

Aus Gleichung (20) folgt nämlich durch die Transformation

$$f(x) = xh(x) \tag{23}$$

$$h(2x) = h(x). \tag{24}$$

Daraus schließt man: $h(x)$ ist dann und nur dann konstant, wenn $h(x)$ in $x = 0$ stetig ist. Ist nämlich $h(x)$ nicht konstant, dann nimmt $h(x)$ in jeder beliebig kleinen Umgebung von $x = 0$ (bzw. $x = \infty$) jeden Wert aus dem Wertebereich von $h(x)$ unendlich oft an. Jede Lösung von Gleichung (24) ist in einem Kreisring (etwa $1 \leqq |x| < 2$), bzw. in einer Kreisringspirale (etwa $1 \leqq |x| < 2$ & $\operatorname{arc} x < \infty$) bei mehrdeutigen Funktionen, willkürlich vorgebbar und kann dann vermöge (24) in die in 0 und ∞ punktierte Ebene (bzw. unendlich vielblättrige Fläche) fortgesetzt werden. Jedes solche $h(x)$ wird durch den Ansatz

$$h(x) = p\left(\frac{\log x}{\log 2}\right) \;\&\; p(z) = p(z+1), \; (x \neq 0, \infty; \; \log 2 > 0), \tag{25}$$

erfaßt, wobei die willkürliche periodische Funktion $p(z)$ die willkürlich vorgebbare Werteverteilung im Kreisring bzw. in der Kreisringspirale beschreibt. (22) ist also die allgemeinste (komplexe) Lösung von (20). Eine Lösung der Form (22) kann insbesonders sogar stetig sein in $x = 0$ bei Annäherung aus einem festen Blatt, wenn $p(z)$ in einem Rechteck der Breite 1 und der Höhe

---

7) Für reelle Veränderliche soll „differenzierbar" im Sinne „stetig differenzierbar" gebraucht werden.

$\frac{2\pi i}{\log 2}$, welche einem Blatt entspricht, beschränkt ist. (22) ist eindeutig, wenn zusätzlich $p\left(z+\frac{2\pi i}{\log 2}\right)=p(z)$ doppeltperiodisch ist. Ist insbesondere $h(x)$ analytische Funktion von x, dann sind im Falle $p(z) \neq \text{const.}$ die Punkte 0 und ∞ wesentlich singuläre Punkte. Aus diesen Bemerkungen ergibt sich der

Satz 4a. *Die Funktionalgleichungen*

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \tag{6}$$

$$f(2x)=2f(x) \tag{20}$$

sind zueinander äquivalent bezüglich der Funktionen, die in einer vollen Umgebung von $x=0$ existieren und in $x=0$ differenzierbar sind[7]) *und nur bezüglich dieser Funktionen.*

Dieses Ergebnis läßt sich verallgemeinern auf die Funktionalgleichungen

$$f[\psi(x,y)]=f(x)+f(y) \tag{26}$$

und

$$f[\psi(x,x)]=2f(x). \tag{27}$$

ω sei eine beliebige[8]) der Fixpunkte der Abbildung

$$y=\psi(x,x). \tag{28}$$

Diese Punkte $x=\omega$ sind ausgezeichnete Punkte für alle Lösungen von Gleichung (26) und also auch von Gleichung (27). Wenn $f(x)$ eindeutig ist, gilt entweder $f(\omega)=0$ oder $f(\omega)=\infty$, oder $f(\omega)$ existiert nicht. $f_0(x)$ sei eine spezielle Lösung von Gleichung (26), die in einer vollen Umgebung Einer ω-Stelle existiert, in $x=\omega$ differenzierbar ist[7]) und in $x=\omega$ verschwindet ($f_0(\omega)=0$). Dann erhält man mit dem Ansatz

$$f(x)=\varphi[f_0(x)] \tag{29}$$

und der Abkürzung $f_0(x)=u$ aus der Gleichung (27)

$$\varphi(2u)=2\varphi(u).$$

Daraus folgt die allgemeine Lösung von Gleichung (27) als

$$\left\{\begin{array}{ll} f(x)=f_0(x)p\left(\frac{\log f_0(x)}{\log 2}\right) & (f_0(x)\neq 0,\ \infty;\ \log 2>0) \\ \& \ p(z+1)=p(z) & \text{beliebig.} \end{array}\right. \tag{30}$$

Aus (30) wird $p(z)=\text{const.}$ ausgesondert, wenn man zusätzlich verlangt, daß alle Lösungen $f(x)$ in einer vollen Umgebung derselben ω-Stelle

---

[8]) Falls (26) eine reelle, stetige und eindeutig umkehrbare Lösung besitzt, gibt es höchstens drei solche ω, denn dann bilden die Veränderlichen eine Halbgruppe unter der Operation $\psi(x,y)$. Vgl. [6].

wie für $f_0(x)$ existieren und in $x=\omega$ differenzierbar) sind. Es ist nämlich bei Einhaltung der Voraussetzungen über $f_0(x)$ die Funktion

$$f(x)=f_0(x)h[f_0(x)] \qquad (h(u) \text{ wie in Gleichung (25)})$$

dann und nur dann differenzierbar in $x=\omega$, wenn $h(u)$ in $u=0$ stetig ist. Das heißt aber, daß $h(u)$ konstant sein muß. Für $x \neq \omega$ braucht man für die Lösungen weder Differenzierbarkeits-, noch Stetigkeits-, noch sonstige Voraussetzungen zu machen, außer der trivialen, daß die Lösungen überall dort existieren sollen, wo man sie betrachtet. Wir fassen zusammen im

Satz 4. *Wenn die Gleichung* (26) *eine nicht identisch verschwindende Lösung* $f_0(x)$ *besitzt, und wenn es eine* ω*-Stelle* $(\psi(\omega,\omega)=\omega)$ *gibt, so daß* $f_0(x)$ *in einer vollen Umgebung von* ω *existiert und in* $x=\omega$ *differenzierbar* [7]) *und gleich* 0 *ist, dann sind die Funktionalgleichungen* (26) *und* (27) *äquivalent bezüglich der Funktionen, die in einer vollen Umgebung von* ω *existieren und in* $x=\omega$ *differenzierbar sind* [7]).

§ 4. Bedingungen für die Argumentfunktionen ψ.

Alle Sätze, die sich auf die Funktionalgleichungen vom Typ (1) beziehen, setzen voraus, daß eine spezielle nicht identisch verschwindende Lösung $f_0(x)$ mit gewissen Eigenschaften existiert. Es gibt aber nicht zu jeder beliebig vorgegebenen Argumentfunktion ψ solche nicht identisch verschwindenden Lösungen. Als Beispiel sei angegeben:

$$f\left[(x-y)^2+\frac{x+y}{2}\right]=f(x)+f(y). \tag{31}$$

Durch die Spezialisierung $y=x$ erhält man $f(x)=2f(x)$, woraus man schließt: wenn eine Lösung $f(x)$ von Gleichung (31) an der Stelle x existiert, dann muß sie dort verschwinden $f(x)=0$ (oder $f(x)=\infty$) [9]).

Es ist also nötig, für die Argumentfunktionen ψ in den Gleichungen (1) Bedingungen anzugeben, welche sicherstellen, daß die zugehörige Funktionalgleichung mindestens eine nichttriviale Lösung besitzt.

a) Differentielle Bedingungen.

Durch partielle Differentiationen gewinnt man aus der Funktionalgleichung für die Argumentfunktionen ψ Bedingungen in der Form partieller Differentialgleichungen für ψ. Diese durch Differentiation gewonnenen Bedin-

---

[9]) Es gibt nicht einmal eine nicht konstante, zweimal differenzierbare Funktion $f(x)$, so daß $f\left[(x-y)^2+\dfrac{x+y}{2}\right]=A(x)+A(y)$ gilt.

gungen sind notwendige Bedingungen für die Existenz nichttrivialer differenzierbarer Lösungen und z. T. seit langem bekannt[10]). Sie sind aber nur hinreichend für etwas allgemeinere Funktionalgleichungen als (1). Um die verschiedenen aus (1) gewonnenen differentiellen Bedingungen in ihrer Leistungsfähigkeit zu beurteilen, seien diese und die durch sie charakterisierten allgemeineren funktionalen Verknüpfungen ohne Beweise [10]) zusammengestellt. Die betrachteten Ableitungen sollen in einem gewissen Gebiet $\mathfrak{G}$ der unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ existieren und stetig sein.

$k=2$:
$$\psi=\psi(x, y), \quad \psi_x=\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \psi_y=\frac{\partial \psi}{\partial y}$$
$$\psi_x(x, y) \cdot \psi_y(x, y) \neq 0$$
$$a, b, \ldots;\ A, B, \ldots;\ \alpha, \beta, \ldots \quad \text{willkürlich.}$$

(32) $$f'[\psi]\,\psi_x=f_1'(x) \Longleftrightarrow f[\psi]=f_1(x)+B(y).$$

(33) $$\left.\begin{aligned} & f'[\psi]\psi_x=f_1'(x) \\ \& \ & f'[\psi]\psi_y=f_2'(y) \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow f[\psi]=f_1(x)+f_2(y)+c.$$

(34) $$\psi_y f_1'(x)-\psi_x f_2'(y)=0 \Longleftrightarrow a[\psi]=f_1(x)+f_2(y).$$

(35) $$\frac{\psi_{xy}}{\psi_x \psi_y}=q[\psi(x, y)] \Longleftrightarrow f[\psi]=A(x)+B(y).$$

Hierbei ist
$$q(x)=-\frac{f''(x)}{f'(x)} \quad \& \quad f(x)=\int_{x_0} dt \exp\left[-\int_{t_0}^{t} d\tau\, q(\tau)\right]$$

(36) $$q[\psi]\psi_x-\frac{\psi_{xx}}{\psi_x}=q_1(x) \Longleftrightarrow f[\psi]=B(y) f_1(x)+C(y),$$
$$q_1(x)=-\frac{f_1''(x)}{f_1'(x)},$$

(37) $$\left.\begin{aligned} & q[\psi]\psi_x-\frac{\psi_{xx}}{\psi_x}=q_1(x) \\ \& \ & q[\psi]\psi_y-\frac{\psi_{yy}}{\psi_y}=q_2(y) \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow f[\psi]=c f_1(x) f_2(y)+c_1 f_1(x)+ \\ +c_2 f_2(y)+c_3.$$
$$q_2(y)=-\frac{f_2''(y)}{f_2(y)},$$

(38) $$\frac{\psi_{xy}}{\psi_y}-\frac{\psi_{xx}}{\psi_x}=q_1(x) \Longleftrightarrow a[\psi]=f_1(x)+B(y).$$

---

[10]) Vgl. u. a. [2], [3], [4], [8], [12], [13].

$$(39)\qquad \left.\begin{array}{r} \dfrac{\psi_{xy}}{\psi_y}-\dfrac{\psi_{xx}}{\psi_x}=q_1(x) \\ \&\ \dfrac{\psi_{xy}}{\psi_x}-\dfrac{\psi_{yy}}{\psi_y}=q_2(y) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow a[\psi]=c_1 f_1(x)+c_2 f_2(y)+c_3$$

$$(40)\qquad \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\log\left(\frac{\psi_x}{\psi_y}\right)=0 \Longleftrightarrow a[\psi]=A(x)+B(y)$$

$$(41)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\log\left(\frac{\psi_x}{\psi_y}\right)&=\frac{\psi_{xxy}}{\psi_x}-\frac{\psi_{xx}\psi_{xy}}{\psi_x^2}-\frac{\psi_{xyy}}{\psi_y}+\frac{\psi_{yy}\psi_{xy}}{\psi_y^2}= \\ &=:\begin{vmatrix} \left(\dfrac{\psi_{xy}}{\psi_x\psi_y}\right)_x & \left(\dfrac{\psi_{xy}}{\psi_x\psi_y}\right)_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

$k=3:\qquad \psi=\psi(x,y,z),\qquad \psi_z=\dfrac{\partial\psi}{\partial z},$

$$\psi_x(x,y,z)\cdot\psi_y(x,y,z)\cdot\psi_z(x,y,z)\neq 0.$$

$$(42)\qquad f'[\psi]\psi_x=f_1'(x)\Longleftrightarrow f[\psi]=f_1(x)+\alpha(y,z).$$

$$(43)\qquad \left.\begin{array}{l} f'[\psi]\psi_x=f_1'(x) \\ \&\ f'[\psi]\psi_y=f_2'(y) \\ \&\ f'[\psi]\psi_z=f_3'(z) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow f[\psi]=f_1(x)+f_2(y)+f_3(z)+c.$$

$$(44)\qquad \psi_y f_1'(x)-\psi_x f_2'(y)=0\Longleftrightarrow \psi(x,y,z)=\alpha\{f_1(x)+f_2(y),z\}.$$

$$(45)\qquad \left.\begin{array}{l} \psi_y f_1'(x)-\psi_x f_2'(y)=0 \\ \&\ \psi_z f_2'(y)-\psi_y f_3'(z)=0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow a[\psi]=f_1(x)+f_2(y)+f_3(z).$$

$$(46)\qquad \frac{\psi_{xy}}{\psi_x\psi_y}=q[\psi(x,y,z)]\Longleftrightarrow f[\psi]=\alpha(x,z)+\beta(y,z).$$

$$(47)\qquad \frac{\psi_{xy}}{\psi_x\psi_y}=\frac{\psi_{yz}}{\psi_y\psi_z}=q[\psi(x,y,z)]\Longleftrightarrow f[\psi]=\alpha(x,z)+B(y).$$

$$(48)\qquad \frac{\psi_{xy}}{\psi_x\psi_y}=\frac{\psi_{yz}}{\psi_y\psi_z}=\frac{\psi_{zx}}{\psi_z\psi_x}\Longleftrightarrow \frac{\psi_{xy}}{\psi_x\psi_y}=\frac{\psi_{yz}}{\psi_y\psi_z}=\frac{\psi_{zx}}{\psi_z\psi_x}=q[\psi(x,y,z)].$$

$$(49)\qquad \left.\begin{array}{r} \dfrac{\psi_{xy}}{\psi_x\psi_y}=\dfrac{\psi_{yz}}{\psi_y\psi_z}=\dfrac{\psi_{zx}}{\psi_z\psi_x} \\ =q[\psi(x,y,z)] \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists f(x) \text{ wie in (35)}, \\ f[\psi]=A(x)+B(y)+C(z). \end{array}\right.$$

$$(50)\qquad \frac{\psi_{xy}}{\psi_x\psi_y}=\frac{\psi_{yz}}{\psi_y\psi_z}=\frac{\psi_{zx}}{\psi_z\psi_x}\Longleftrightarrow\begin{cases}\psi_x=\exp\left(a(x)+\int^{\psi}q[\psi]\,d\psi\right)\\ \psi_y=\exp\left(b(y)+\int^{\psi}q[\psi]\,d\psi\right)\\ \psi_z=\exp\left(c(z)+\int^{\psi}q[\psi]\,d\psi\right).\end{cases}$$

$k\geqq 4$: $\quad \psi=\psi(x_1,x_2,\ldots,x_k),\quad \psi_\nu=\dfrac{\partial\psi}{\partial x_\nu},\quad \psi_{\lambda\nu}=\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_\lambda\partial x_\nu},$
$\psi_1\psi_2\ldots\psi_k\neq 0.$

$$(51)\qquad f'[\psi]\psi_1=f_1'(x_1)\Longleftrightarrow f[\psi]=f_1(x_1)+\alpha(x_2,\ldots,x_k).$$

$$(52)\qquad \left.\begin{array}{l}f'[\psi]\psi_\nu=f_\nu'(x_\nu)\\ \nu=1,2,\ldots,k\end{array}\right\}\Longleftrightarrow f[\psi]=\sum_{\nu=1}^{k}f_\nu(x_\nu)+c.$$

$$(53)\qquad \psi_2f_1'(x_1)-\psi_1f_2'(x_2)=0\Longleftrightarrow\psi(x_1,x_2,\ldots,x_k)=$$
$$=\alpha\{f_1(x_1)+f_2(x_2),x_3,\ldots,x_k\}.$$

Um den vollständigen additiven Zerfall auf der rechten Seite zu charakterisieren, sind genau $\left\{\dfrac{k(k-1)}{2}-1\right\}$ Bedingungen von der Form wie in (53) nötig.

$$(54)\qquad \left.\begin{array}{l}\psi_\nu f_\lambda'(x_\lambda)-\psi_\lambda f_\nu'(x_\nu)=0\\ 1\leqq\lambda<\nu\leqq k,\ (\nu\neq 2)\end{array}\right\}\Longleftrightarrow a[\psi]=\sum_{\nu=1}^{k}f_\nu(x_\nu).$$

(Die Gleichung mit $\lambda=1$, $\nu=2$ ist eine Folge der übrigen Gleichungen.)

$$(55)\qquad \frac{\psi_{12}}{\psi_1\psi_2}=q[\psi(x_1,\ldots,x_k)]\Longleftrightarrow f[\psi]=\alpha(x_1,x_3,\ldots,x_k)+$$
$$+\beta(x_2,x_3,\ldots,x_k).$$

$$(56)\qquad \left.\begin{array}{l}\dfrac{\psi_{\lambda\nu}}{\psi_\lambda\psi_\nu}=\dfrac{\psi_{12}}{\psi_1\psi_2}\\ 1\leqq\lambda<\nu\leqq k\end{array}\right\}\Longleftrightarrow\frac{\psi_{\lambda\nu}}{\psi_\lambda\psi_\nu}=q[\psi]\quad\text{für alle }\lambda,\nu.$$

Das sind auf der linken Seite wieder $\left\{\dfrac{k(k-1)}{2}-1\right\}$ Bedingungen.

$$(57)\qquad \left.\begin{array}{l}\dfrac{\psi_{\lambda\nu}}{\psi_\lambda\psi_\nu}=\dfrac{\psi_{12}}{\psi_1\psi_2}\\ =q(\psi)\\ 1\leqq\lambda<\nu\leqq k\end{array}\right\}\Longleftrightarrow\begin{cases}\exists f(x)\quad\text{wie in (35)}\\ f[\psi]=\sum\limits_{\nu=1}^{k}A_\nu(x).\end{cases}$$

$$(58)\qquad \left.\begin{array}{l}\dfrac{\psi_{\lambda\nu}}{\psi_\lambda\psi_\nu}=\dfrac{\psi_{12}}{\psi_1\psi_2}\\ 1\leqq\lambda<\nu\leqq k\end{array}\right\}\Longleftrightarrow\begin{cases}\psi_\nu=\exp\left[a_\nu(x_\nu)+\int^{\psi}q(\psi)\,d\psi\right]\\ \nu=1,2,\ldots,k.\end{cases}$$

b) Assoziative Bedingungen.

Abel [1] bemerkte zuerst, wenn

$$(59)\qquad \begin{aligned} &\psi(x, y) = \psi(y, x) \\ \& \ &\psi[x, \psi(y, z)] = \psi[y, \psi(z, x)] = \psi[z, \psi(x, y)] \end{aligned}$$

ist, dann existiert eine differenzierbare Funkton $f(x)$ dergestalt, daß

$$(26)\qquad f[\psi(x, y)] = f(x) + f(y) \quad \text{ist.}$$

In Abschwächung der Voraussetzungen läßt sich sogar beweisen ([6] bzw. [7]):

Satz 5. *Die Funktionalgleichung* (26) *besitzt dann und nur dann eine streng monotone und stetige (reelle) Lösung* $f(x)$, *wenn*

$$(60)\qquad \begin{cases} \psi(x, y) \ \text{streng monoton und stetig in } x \text{ und } y \\ \& \ \psi[x, \psi(y, z)] = \psi[\psi(x, y), z] \qquad \text{(Assoziativität)} \end{cases}$$

ist.

Man kann auch $\psi[x, \psi(y, z)]$, $\psi[\psi(x, y), z]$, u. s. w. auffassen als verschiedene Darstellungen der Argumentfunktion $\psi(x, y, z)$ von drei Veränderlichen in der mit Gleichung (26) äquivalenten Funktionalgleichung dritter Stufe

$$(61)\qquad f[\psi(x, y, z)] = f(x) + f(y) + f(z).$$

Wenn nämlich eine streng monotone und stetige Lösung $f_0(x)$ von Gleichung (61) existiert, dann muß notwendig gelten

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z) &= f_0^{-1}[f_0(x) + f_0(y) + f_0(z)] = \\ &= \alpha[x, \alpha(y, z)] = \alpha[\alpha(x, y), z] = \text{u. s. w.,} \end{aligned}$$

wobei

$$\alpha(x, y) = f_0^{-1}[f_0(x) + f_0(y)] \qquad \text{ist.}$$

Daraus und aus Satz 5 ergibt sich der

Satz 6. *Die Funktionalgleichung* (61) *besitzt dann und nur dann eine streng monotone und stetige (reelle) Lösung, wenn*

$$(62)\qquad \begin{cases} \exists \alpha(x, y) \ \text{streng monoton und stetig in } x \text{ und } y \\ \& \ \psi(x, y, z) = \alpha[x, \alpha(y, z)] = \alpha[\alpha(x, y), z]. \end{cases}$$

Wenn man die Monotonievoraussetzungen durch Differenzierbarkeitsvoraussetzungen ersetzt, schließt man aus dem Ergebnis von Abel und aus (61)

Satz 7. *Die Funktionalgleichung* (61) *besitzt dann und nur dann eine (komplex) differenzierbare Lösung* $u = f_0(x)$, *welche eine Nullstelle* ω ($f_0(\omega) = 0$)

besitzt, und deren Ableitung $f_0'(x)$ nicht verschwindet und deren Umkehrfunktion $x=f_0^{-1}(u)$ eindeutige Funktion von u ist, wenn

$$(63)\quad \begin{cases} \exists\, \alpha(x,y)=\alpha(y,x) \text{ eindeutig und differenzierbar und } \dfrac{\partial}{\partial x}\alpha(x,y)\neq 0 \\ \&\ \ \exists\, \omega,\ \alpha(x,\omega)=x \quad \text{für alle} \quad x \\ \&\ \ \psi(x,y,z)=\alpha[x,\alpha(y,z)]=\alpha[y,\alpha(z,x)]=\alpha[z,\alpha(x,y)]. \end{cases}$$

(Die Voraussetzungen ergeben sich aus der genauen Analyse des Abelschen Beweises). Wir sprechen von (59), (60), (62), (63) als von „assoziativen Bedingungen". Es bietet prinzipiell keine Schwierigkeiten, für die Funktionalgleichungen vom Typ (1) mit höherer Stufe als drei, ähnliche Beziehungen anzugeben. Die Anzahl der verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten der Argumentfunktion $\psi(x_1,\ldots,x_k)$ durch Funktionen von nur zwei Veränderlichen wächst mit der Stufe k. Dadurch sind in reichlicher Anzahl Möglichkeiten gegeben, nicht alle sondern nur einen Teil der vielen verschiedenen Darstellungen von ψ durch Funktionen zweier Veränderlicher als einander gleich zu fordern. Das äußert sich darin, daß die rechte Seite der Funktionalgleichung (1) mit weniger Symmetrien ausgestattet ist.

Unter Umständen ist es auch möglich (Vgl. [3], [9]) im Satz 7 die Kommutativität $\alpha(x,y)=\alpha(y,x)$ zu unterdrücken.

Beispiel: (Vgl. [7], § 3).

Satz 8. *Die Funktionalgleichung*

$$(64)\qquad f[\psi(x_1,x_2,x_3,x_4)]=a^2f(x_1)+abf(x_2)+abf(x_3)+b^2f(x_4)+(a+b+1)c$$

(a, b, c konstant)

besitzt dann und nur dann eine streng monotone, stetige (reelle) Funktion $f(x)$ als Lösung, wenn

$$(65)\quad \begin{cases} \exists\, \alpha(x_1,x_2) \text{ streng monoton und stetig} \\ \&\ \ \psi=\alpha[\alpha(x_1,x_2),\alpha(x_3,x_4)]=\alpha[\alpha(x_1,x_3),\alpha(x_2,x_4)] \quad \text{(Bisymmetrie)} \end{cases}$$

Aber auch, wenn die Symmetrie in der rechten Seite der linearen Funktionalgleichungen (1) vollkommen verloren geht

$$(66)\qquad f[\psi(x_1,\ldots,x_k)]=f_1(x_1)+\cdots+f_k(x_k), \qquad (k\geqq 2),$$

bleibt die Tatsache erhalten, daß die Argumentfunktionen $\psi(x_1,\ldots,x_k)$ in verschiedener Weise in Funktionen zweier Veränderlicher zerfallen, wie man unter Differenzierbarkeitsvoraussetzungen direkt aus (53) schließen kann. Es bleiben also auch die „assoziativen" Bedingungen als Gleichungen zwischen den verschiedenen Zerfällungen von ein und derselben Argumentfunktion ψ in Funktionen zweier Veränderlicher. Diese müssen von der Form sein

$$(67)\qquad \alpha(x,y)=h[f(x)+g(y)].$$

Man vergleiche die Arbeiten von M. Hosszú [9], [10].

Literatur.

[1] N. H. Abel, Recherche des fonctions de deux quantités variables indépendantes x et y, telles que $f(x, y)$, qui ont la propriété que $f(z, f(x, y))$ est une fonction symétrique de z, x et y, *J. reine angew. Math.* **1** (1826), 11—15. (Oeuvres complètes de N. H. Abel I, *Christiania*, 1881, p. 61—65.)

[2] J. Aczél, Zur Charakterisierung nomographisch einfach darstellbarer Funktionen durch Differential- und Funktionalgleichungen, *Acta Sci. Math. Szeged* **12A** (1950), 73—80.

[3] J. Aczél, Einige aus Funktionalgleichungen zweier Veränderlicher ableitbare Differentialgleichungen, *Acta Sci. Math. Szeged* **13** (1950), 179—189.

[4] J. Aczél, Über Niveaukurven und Flächen von Lösungsfunktionen partieller Differentialgleichungen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **1** (1950), 125—132.

[5] J. Aczél, Grundriß einer allgemeinen Behandlung von einigen Funktionalgleichungstypen, *Publ. Math. Debrecen* **3** (1953), 119—132.

[6] J. Aczél, Sur les opérations définies pour nombres réels, *Bull. Soc. Math. France* **76** (1949), 59—64.

[7] J. Aczél, On mean values, *Bull. Amer. Math. Soc.* **54** (1948), 392 400.

[8] Gy. Botos—M. Hosszú, Implicit alakú függvénykapcsolatok ábrázolása pontsoros nomogrammokkal, *Magy. Tud. Akad. Alk. Mat. Int. Közl.* **3** (1954), 195—208.

[9] M. Hosszú, Some functional equations related with the associative law, *Publ. Math. Debrecen* **3** (1954), 212—213.

[10] M. Hosszú, A generalization of the functional equation of bisymmetry, *Studia Math.* **14** (1953), 100—106.

[11] L. Kalmár, Über ein Problem, betreffend die Definition des Begriffes der allgemeinrekursiven Funktion, *Z. Math. Logik. Grundlagen der Math.* **1** (1955), 93—95.

[12] S. Martis-Biddau, Sulla caratterizzazione di alcune classi di funzioni, *Collectanea Math.* **1** (1948), 67—84.

[13] P. Saint-Robert, De la résolution de certaines équations à trois variables par le moyen d'une règle glissante, *Memorie Acad. Torino* (2) **25** (1871), 53—72.

(Eingegangen am 19. September 1957.)