Über Tensoren, die aus angegebenen geometrischen Objekten gebildet sind.

Herrn Professor Béla Gyires zum 50. Geburtstag gewidmet.

Von ARTHUR MOÓR (Szeged).

Einleitung.

In diesem Aufsatz wollen wir in einigen Spezialfällen das folgende Problem untersuchen: Es soll $\mathfrak{M}$ die Mannigfaltigkeit geometrischer Objekte Ω^A bedeuten die ein bestimmtes Transformationsgesetz haben. Es soll ein Funktionensystem

$$T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}(y^1, \dots, y^t)$$

gebildet werden, das jedesmal einen Tensor darstellt, falls die Veränderlichen $y^1, \dots, y^t$ Komponenten eines beliebigen Elementes Ω_0^A von $\mathfrak{M}$ bedeuten. Bei unseren Untersuchungen wird also wesentlich sein, daß auch die geometrischen Objekte Ω_0^A Veränderlichen sind; unser Problem ist somit nicht identisch mit jenem, das aus einem gegebenen geometrischen Objekt ein anderes konstruieren will.

Die analytische Formulierung unseres Problems führt auf gewisse Funktionalgleichungen, deren Lösung die gesuchten Funktionen $T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$ ergibt. Die Differenzierbarkeit der Funktionen, wollen wir voraussetzen, falls die Ableitungen der Funktionen vorkommen, in mehreren, von uns untersuchten Fällen ist aber die Differentierbarkeit nicht nötig.

In § 1 werden wir diejenigen Tensoren untersuchen, die aus einem Vektor ξ^i bzw. aus einem Tensor zweiter Stufe g_{ij} gebildet sind. Dabei kann g_{ij} in i, j symmetrisch, oder schiefsymmetrisch sein. Wir werden im folgenden den Begriff des Tensors immer in seiner allgemeinsten Fassung benützen, obzwar man in der neueren Literatur lieber statt des Tensors die Benennung: „Affinor“ verwendet, während der Tensor den symmetrischen Affinor bedeutet. Die Symmetrieeigenschaften der einzelnen Tensoren werden wir immer einzeln angeben. In § 2 untersuchen wir die Tensoren dritter Stufe $T_i{}^j{}_k$, die aus den Übertragungsparametern $\Gamma_i{}^j{}_k$ gebildet sind. Endlich geben wir, in § 3, Beispiele für Tensoren $T_i{}^j{}_{kl}$, die aus

$$\Gamma_i{}^j{}_k \quad \text{und} \quad \partial_l \Gamma_i{}^j{}_k$$

gebildet sind. Die charakteristische Funktionalgleichung der Tensoren $T_i{}^j{}_{kl}$ ist durch (3. 3) angegeben, ihre allgemeinste Lösung ist aber noch nicht bestimmt.

Derartige Probleme wurden zuerst von S. Gołąb und M. M. Kucharzewski untersucht[1]). Der Problemkreis ist jedoch im Ganzen bisher noch nicht ausgearbeitet und bietet deshalb noch viele Möglichkeiten für weitere Untersuchungen.

§ 1. Über Tensoren die aus einem Vektor, bzw. aus einem Tensor g_{ik} gebildet sind.

$\mathfrak{M}$ soll die Mannigfaltigkeit der kontravarianten Vektoren ξ^i bedeuten. Es besteht der folgende

Satz 1. *Der allgemeinste rein kontravariante Tensor r-ter Stufe $t^{i_1 \dots i_r}$, der allein aus einem kontravarianten Vektor $\xi^i \in \mathfrak{M}$ gebildet ist, hat die Form:*

$$t^{i_1 \dots i_r} = c(x)\, \xi^{i_1} \dots \xi^{i_r} \qquad c(x)\colon \textit{Skalar}. \tag{1. 1}$$

Beweis. Da der Tensor $t^{i_1 \dots i_r}$ von ξ^i abhängig ist, hat er die Form:

$$t^{i_1 \dots i_r} = T^{i_1 \dots i_r}(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n).$$

Nach einer Koordinatentransformation

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, \dots, x^n) \tag{1. 2}$$

werden die Komponenten von $t^{i_1 \dots i_r}$ im Koordinatensystem $\bar{x}^i$ die Form

$$\bar{t}^{i_1 \dots i_r} = T^{i_1 \dots i_r}(\bar{\xi}^1, \bar{\xi}^2, \dots, \bar{\xi}^n)$$

haben, wo die $\bar{\xi}^i$ die Komponenten des Vektors ξ^i im Koordinatensystem $\bar{x}^i$ bedeuten. Beachtet man anderseits die Transformationsformel der kontravarianten Tensoren, so bekommt man:

$$T^{i_1 \dots i_r}(\bar{A}^1_t \xi^t, \bar{A}^2_t \xi^t, \dots, \bar{A}^n_t \xi^t) = \bar{A}^{i_1}_{s_1} \dots \bar{A}^{i_r}_{s_r} T^{s_1 \dots s_r}(\xi^1, \dots, \xi^n), \tag{1. 3}$$

wo

$$\bar{A}^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}$$

gesetzt wurde. Offenbar sind in (1. 3) die $\bar{A}^i_j$ und die x^i als unabhängige

---

1) S. Gołąb und M. M. Kucharzewski, Zur Theorie der geometrischen Objekte, *Ann. Polon. Math.* **2** (1955), 250—253.

Veränderlichen zu betrachten. Setzt man

$$\xi^k = 1, \quad \bar{A}^i_j = \varrho^i \delta^i_j, \qquad (n.\,s.\ \text{über } i),[2]$$

so wird aus (1. 3)

$$T^{i_1 \dots i_r}(\varrho^1, \varrho^2, \dots, \varrho^n) = c^{i_1 \dots i_r} \varrho^{i_1} \dots \varrho^{i_r}, \quad (n.\,s.\ \text{über } i_1, \dots, i_r), \tag{1.4}$$

wo

$$c^{i_1 \dots i_r} = T^{i_1 \dots i_r}(1, 1, \dots, 1)$$

ist. Aus der Formel (1. 4) ist schon ersichtlich, daß der Tensor $T^{i_1 \dots i_r}$ multilinear in den ξ^i ist. Wir werden aber noch zeigen, daß die $c^{i_1 \dots i_r}$ miteinander gleich sind.

Beachtet man in der Gleichung (1. 3) die durch (1. 4) bestimmte Form der Funktion $T^{i_1 \dots i_r}$, so wird

$$c^{i_1 \dots i_r} \bar{A}^{i_1}_{s_1} \xi^{s_1} \dots \bar{A}^{i_r}_{s_r} \xi^{s_r} = \bar{A}^{i_1}_{s_1} \dots \bar{A}^{i_r}_{s_r} (c^{s_1 \dots s_r} \xi^{s_1} \dots \xi^{s_r}), \quad (n.\,s.\ \text{über } i_1, \dots, i_r).$$

Auf beiden Seiten dieser Gleichung steht ein Polynom der Veränderlichen $\bar{A}^i_s, \xi^t$. Nehmen wir für die ξ^i die Werte $\xi^1 = 1, \xi^2 = \xi^3 = \dots = \xi^n = 0$, so wird

$$c^{i_1 \dots i_r} \bar{A}^{i_1}_1 \dots \bar{A}^{i_r}_1 = \bar{A}^{i_1}_1 \dots \bar{A}^{i_r}_1 c^{1 \dots 1}, \quad (n.\,s.\ \text{auf } i_1, \dots, i_r).$$

Wir können für $\bar{A}^{i_j}_1$ solche Werte nehmen, für welche $\bar{A}^{i_j}_1 \neq 0$, und daraus folgt $c^{i_1 \dots i_r} = c^{1 \dots 1}$. Auf Grund von (1. 4) bekommt man somit die Formel (1. 1) w. z. b. w.

Offenbar kann mit dieser Methode das Analogon des Satzes 1 auf kovariante Vektoren η_i bewiesen werden. Es besteht der

Satz 1*. *Der allgemeinste rein kovariante Tensor $t_{i_1 \dots i_r}$ r-ter Stufe, der allein aus einem kovarianten Vektor η_i gebildet ist, hat die Form:*

$$t_{i_1 \dots i_r} = c(x)\, \eta_{i_1} \dots \eta_{i_r}, \qquad c(x):\ \textit{Skalar}.$$

Aus dem Satz 1 folgt die Richtigkeit des folgenden Korollariums:

Korollarium. *Ist der Vektor t^i vom Vektor ξ^i gebildet, so ist die Richtung von t^i und ξ^i identisch.*

Betrachten wir nun die Mannigfaltigkeit derjenigen kovarianten Tensoren g_{ik}, die in *i, k symmetrisch*, bzw. *schiefsymmetrisch* sind. Es besteht der

Satz 2. *Der allgemeinste Tensor zweiter Stufe: f_{ik}, der allein von g_{ab} abhängig, in seinen Veränderlichen stetig ist, hat die Form:*

$$f_{ik}(g_{ab}) = c(x)\, g_{ik}, \qquad c(x):\ \textit{Skalar}. \tag{1.5}$$

Hier wurde kurz

$$f_{ik}(g_{ab}) = f_{ik}(g_{11}, g_{12}, \dots, g_{nn}).$$

geschrieben.

---

[2]) *n. s.* bedeutet jetzt und im folgenden: „*nicht summieren*".

BEWEIS.[3]) Wir wollen zuerst den schiefsymmetrischen Fall behandeln. g_{ik} soll also einen schiefsymmetrischen Tensor bedeuten. Aus der Transformationsformel der kovarianten Tensoren folgt:

$$f_{ik}(g_{rs} A^r_a A^s_b) = f_{rs}(g_{ab}) A^r_i A^s_k, \qquad A^r_j \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^j}. \tag{1.6}$$

Nach der Substitution $A^t_i = \varrho \delta^t_i$ folgt aus der Gleichung (1.6)

$$f_{ik}(\varrho^2 g_{ab}) = \varrho^2 f_{ik}(g_{ab}).$$

f_{ik} ist also in den g_{ab} positiv homogen von erster Dimension. Setzen wir jetzt in die Gleichung (1.6)

$$A^r_a = \varrho^r \delta^r_a \qquad (n.\,s.\ \text{über } r)$$

ein, so bekommen wir

$$f_{ik}(g_{ab}\varrho^a\varrho^b) = f_{ik}(g_{ab})\varrho^i\varrho^k \qquad \left(n.\,s.\ \text{über} \begin{Bmatrix} a, b \\ i, k \end{Bmatrix}\right). \tag{1.7}$$

Nun setzen wir $\varrho^i = \varrho^k = 1$ und $\lim \varrho^a = 0$ für $a \neq i, k$. Es folgt aus der vorausgesetzten Stetigkeit nach (1.7), daß

$$f_{ik}(g_{ab}) = f_{ik}(0, \ldots, 0, g_{ii}, g_{kk}, g_{ik}, g_{ki}, 0, \ldots, 0)$$

ist und wegen der schiefen Symmetrie von g_{ik} folgt

$$f_{ik}(g_{ab}) = f_{ik}(0, \ldots, 0, g_{ik}, 0, \ldots, 0), \tag{1.8}$$

d. h. f_{ik} ist allein von g_{ik} abhängig. (Die Abhängigkeit von g_{ki} haben wir nicht ausgeschrieben, da $g_{ki} = -g_{ik}$ ist.)

Wegen der positiven Homogenität von erster Dimension von f_{ik} folgt somit, daß

$$f_{ik} = f_{ik}(1)\, g_{ik} \qquad \text{für } g_{ik} > 0 \tag{1.9a}$$

$$f_{ik} = -f_{ik}(-1)\, g_{ik} \qquad \text{für } g_{ik} < 0 \tag{1.9b}$$

gesetzt werden kann. Wir beweisen jetzt, daß

$$f_{ik}(1) = -f_{ik}(-1) = c \tag{1.10}$$

ist. Zu diesem Zweck setzen wir in (1.6)

$$g_{ab} > 0, \quad A^p_1 = A^q_2 = 1, \quad \lim A^r_1 = \lim A^s_2 = 0 \quad (r \neq p, s \neq q).$$

Wir bekommen dann für $i = 1$, $k = 2$ nach (1.9a)

$$f_{12}(g_{rs} A^r_1 A^s_2) = f_{rs}(1)\, g_{rs} A^r_1 A^s_2. \tag{1.11}$$

Beim Grenzübergang erhalten wir daraus:

$$f_{12}(g_{pq}) = f_{pq}(1)\, g_{pq} \qquad (n.\,s.\ \text{über } p, q).$$

---

[3]) Der nachfolgende Beweis dieses Satzes stammt im schiefsymmetrischen Fall von M. KUCHARZEWSKI. Unser ursprünglicher Beweis hat die Differenzierbarkeit von f_{ik} bedingt, während der Beweis von M KUCHARZEWSKI nur die Stetigkeit von f_{ik} in seinen Veränderlichen benützt.

Beachten wir jetzt für die linke Seite (1. 9a), so wird:

$$f_{12}(1)\,g_{pq}=f_{pq}(1)\,g_{pq} \qquad (n.\,s.\ \text{über}\ p, q),$$

d. h.

$$f_{12}(1)=f_{pq}(1)=c.$$

In ähnlicher Weise erhalten wir bei $g_{ab}<0$:

$$f_{12}(-1)=f_{pq}(-1)=c^*.$$

Nehmen wir jetzt an, daß gleichzeitig

$$g_{ab}>0, \quad g_{rs}\,A_1^r A_2^s<0,$$

so erhalten wir aus (1. 11) auf Grund von (1. 9b):

$$-c^*=-f_{pq}(-1)=f_{pq}(1)=c.\text{[4]} \tag{1. 12}$$

Die Gleichungen (1. 9) und (1. 12) beweisen aber eben die Gültigkeit von (1. 5) im schiefsymmetrischen Fall.

Ist nun g_{ik} symmetrisch, so bekommt man statt (1. 8)

$$f_{ik}(g_{ab})=f_{ik}(0,\ldots,0,g_{ii},g_{kk},g_{ik},g_{ki},0,\ldots,0)\equiv\Phi_{ik}(g_{ik},g_{ii},g_{kk}), \tag{1. 13}$$

d. h. f_{ik} ist von g_{ii}, g_{kk} und g_{ik} abhängig.

Aus der Gleichung (1. 6) wird:

$$\Phi_{ik}(A_i^r A_k^s g_{rs},\, A_i^r A_i^s g_{rs},\, A_k^r A_k^s g_{rs})=\Phi_{rs}(g_{rs},g_{rr},g_{ss})\,A_i^r A_k^s, \quad (n.\,s.\ \text{über}\ i,k). \tag{1. 14}$$

Wählt man in dieser Gleichung

$$A_i^r=\delta_i^r, \quad A_k^r=x\,\delta_k^r \qquad (i, k\ \textit{fix},\ i\neq k),$$

so bekommt man:

$$\Phi_{ik}(x\,g_{ik},\,g_{ii},\,x^2 g_{kk})=x\,\Phi_{ik}(g_{ik},g_{ii},g_{kk}). \tag{1. 15}$$

Setzen wir voraus, daß $g_{ik}\neq 0$ ist, und nehmen wir dann $x=\dfrac{1}{g_{ik}}$, so wird nach Vertauschen der beiden Seiten von (1. 15):

$$\Phi_{ik}(g_{ik},g_{ii},g_{kk})=g_{ik}\,\varphi_{ik}\left(g_{ii},\frac{g_{kk}}{g_{ik}^2}\right), \quad \varphi_{ik}(x,y)\overset{\text{def}}{=}\Phi_{ik}(1,x,y), \quad (n.\,s.\ \text{über}\ i,k). \tag{1. 16}$$

Aus dem Funktionalgleichungssystem (1. 14) wird somit:

$$A_i^r A_i^s g_{rs}\,\varphi_{ik}\left(A_i^r A_i^s g_{rs},\,\frac{A_k^r A_k^s g_{rs}}{(A_i^r A_k^s g_{rs})^2}\right)=A_i^r A_k^s g_{rs}\,\varphi_{rs}\left(g_{rr},\frac{g_{ss}}{g_{rs}^2}\right). \tag{1. 17}$$

Es sei jetzt:

$$A_i^r=x\,\delta_i^r, \quad A_k^r=\delta_k^r \qquad (i, k\ \textit{fix}\ i\neq k),$$

so geht (1. 17) in die Gleichung:

$$\varphi_{ik}\left(x^2 g_{ii},\,\frac{1}{x^2}\frac{g_{kk}}{g_{ik}^2}\right)=\varphi_{ik}\left(g_{ii},\frac{g_{kk}}{g_{ik}^2}\right) \tag{1. 18}$$

---

[4]) c ist von den g_{ab} unabhängig. Selbstverständlich kann c von den x^i noch abhängig sein.

über. Wenn $i=k$ ist, so ist die Funktion Φ_{ik} in (1. 13) nur von g_{ii} abhängig, und nach der Substitution $A_i^r = x\delta_i^r$ bekommt man nach (1. 14):

(1. 19) $$\Phi_{ii}^*(x^2 g_{ii}) = x^2 \Phi_{ii}^*(g_{ii}), \quad (\Phi_{ii}^*(g_{ii}) \overset{\text{def}}{=} \Phi_{ii}(g_{ii}, g_{ii}, g_{ii})).$$

Wir werden jetzt zwei Fälle unterscheiden. 1. $g_{ii}>0$, 2. $g_{ii}<0$. Im Fall 1. setzen wir in (1. 18) und (1. 19) $x^2 = \dfrac{1}{g_{ii}}$, so wird:

(1. 20) $$\varphi_{ik}\left(g_{ii}, \frac{g_{kk}}{g_{ik}^2}\right) = \underset{(1)}{\varphi_{ik}}\left(\frac{g_{ii}g_{kk}}{g_{ik}^2}\right), \quad (\underset{(1)}{\varphi_{ik}}(y) \overset{\text{def}}{=} \varphi_{ik}(1, y),\ y>0),$$

(1. 21) $$\Phi_{ii}^*(g_{ii}) = g_{ii}\underset{(1)}{\varphi_{ii}}(1), \qquad (\underset{(1)}{\varphi_{ii}}(1) \overset{\text{def}}{=} \Phi_{ii}^*(1)).$$

(Offenbar können wir $\underset{(1)}{\varphi_{ii}}(1) = \Phi_{ii}^*(1)$ setzen, da die Gleichung (1. 20) für $i \neq k$ gültig, und somit $\underset{(1)}{\varphi_{ii}}$ noch nicht festgelegt war.) Die Formeln (1. 19), (1. 20) und (1. 21) zeigen aber, daß (1. 16) im Falle $g_{ii}>0$ auch für $i=k$ gültig ist; somit besteht aber auch (1. 17) für $i=k$.

Nehmen wir jetzt in (1. 17) $g_{rs}>0$, $A_b^a \geqq 0$; (selbstverständlich können nicht alle $A_b^a = 0$ sein). Es wird:

(1. 22) $$A_i^r A_k^s g_{rs} \underset{(1)}{\varphi_{ik}}\left(\frac{A_i^r A_i^s g_{rs} A_k^p A_k^t g_{pt}}{(A_i^r A_k^s g_{rs})^2}\right) = A_i^r A_k^s g_{rs} \underset{(1)}{\varphi_{rs}}\left(\frac{g_{rr}g_{ss}}{g_{rs}^2}\right).$$

Nehmen wir jetzt $A_i^1 = A_k^2 = 1$, $\lim A_i^r = \lim A_k^s = 0$ für $r \neq 1$, $s \neq 2$, so bekommt man aus (1. 22) für $i \neq k$:

$$\underset{(1)}{\varphi_{ik}}(y) = \underset{(1)}{\varphi_{12}}(y), \quad y = \frac{g_{11}g_{22}}{g_{12}^2}.$$

$\underset{(1)}{\varphi_{ik}}$ ist also in i, k symmetrisch. Für $i=k$ wird (1. 22) in die Formel

$$A_i^r A_i^s g_{rs} \underset{(1)}{\varphi_{ii}}(1) = A_i^r A_i^s g_{rs} \underset{(1)}{\varphi_{rs}}\left(\frac{g_{rr}g_{ss}}{g_{rs}^2}\right)$$

übergehen. Durch Koeffizientenvergleich bekommt man wegen der Symmetrie von $\underset{(1)}{\varphi_{ik}}$ in i, k, daß

$$\underset{(1)}{\varphi_{rs}}(y) = \underset{(1)}{\varphi_{ii}}(1)$$

besteht, d. h.

(1. 23) $$\underset{(1)}{\varphi_{rs}}(y) = c = Konst.$$

Im Falle 2., d. h. für $g_{ii}<0$, setzen wir in (1. 18) und (1. 19) $x^2 = \dfrac{1}{-g_{ii}}$. Wir erhalten somit

(1. 24) $$\varphi_{ik}\left(g_{ii}, \frac{g_{kk}}{g_{ik}^2}\right) = \underset{(2)}{\varphi_{ik}}\left(\frac{g_{ii}g_{kk}}{g_{ik}^2}\right), \quad (\underset{(2)}{\varphi_{ik}}(y) \overset{\text{def}}{=} \varphi_{ik}(-1, -y),\ y>0),$$

(1. 25) $$\Phi_{ii}^*(g_{ii}) = g_{ii}\underset{(2)}{\varphi_{ii}}(1), \qquad (\underset{(2)}{\varphi_{ii}}(1) \overset{\text{def}}{=} -\Phi_{ii}^*(-1)).$$

Die Formel (1. 16) und (1. 17) werden wieder auch für $i=k$ bestehen. Wir substitutieren jetzt in (1. 17) $g_{rs}<0$, $A_b^a \geqq 0$, so wird man die zu (1. 22) analoge Formel bekommen, wo aber jetzt statt $\underset{(1)}{\varphi_{ik}}$ die Funktion $\underset{(2)}{\varphi_{ik}}$ stehen wird. Ebenso, wie im Falle 1. kann man beweisen, daß

$$\underset{(2)}{\varphi_{rs}}(y)=c^*=Konst.$$

ist.

Nehmen wir jetzt an, daß $g_{rr}<0$, $(r=1,2,\ldots,n)$, $A_i^r A_k^s g_{rs}>0$ ist, so bekommt man aus (1. 17)

$$A_i^r A_k^s g_{rs}\, c = A_i^r A_k^s g_{rs}\, c^*,$$

d. h. $c=c^*$. Aus (1. 13), (1. 16), (1. 20) und (1. 23) folgt aber, daß (1. 5) auch für symmetrische g_{ik} besteht, w. z. b. w.[5])

Im Satz 2 betrachteten wir diejenigen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ der kovarianten Tensoren zweiter Stufe g_{ik}, die in den Indizes i, k symmetrisch oder schiefsymmetrisch sind. Für die allgemeinen Tensoren g_{ik} ist der Satz 2 nicht gültig. Wir verweisen auf die Arbeit von MINEO IKEDA und SHINGO ABE.[6])

§ 2. Über die aus $\Gamma_i{}^j{}_k$ gebildeten Tensoren dritter Stufe.

Betrachten wir jetzt die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ der (im allmeinen nichtsymmetrischen) Übertragungsparameter: $\Gamma_i{}^j{}_k$. Die Transformationsformel von $\Gamma_i{}^j{}_k$ bei einer Koordinatentransformation (1. 2) lautet:

$$\bar{\Gamma}_i{}^j{}_k = A_i^r \bar{A}_s^j A_k^t\, \Gamma_r{}^s{}_t + B_i{}^j{}_k, \tag{2. 1}$$

wo

$$B_i{}^j{}_k \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^i\, \partial \bar{x}^k}\, \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^r} \tag{2. 2}$$

ein in i, k symmetrisches Objekt bedeutet. Offenbar sind die $B_i{}^j{}_k$ von den $\bar{A}_j^i$ und auch von den A_j^i unabhängig. (In (2. 2) kommen auch die Ableitungen von A_j^i vor. Es ist nämlich

$$\frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^i\, \partial \bar{x}^k} = \frac{\partial A_i^r}{\partial \bar{x}^k}.)$$

Denn wie wir auch Werte für erste und zweite Ableitungen in einem Punkte ganz beliebig (und von einander unabhängig) wählen, gibt es immer Funktionen deren Ableitungen dort eben diese Werte sind.

---

[5]) Wir haben im Beweis $g_{ik} \neq 0$ vorausgesetzt. Für $g_{ik}=0$ bleibt der Satz wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Funktionen f_{ik} gültig.

[6]) MINEO IKEDA and SHINGO ABE, On tensorial concomitants of a non-symmetric tensor $g_{\mu\nu}$ I., *Tensor* (new series), 7 (1957), 59—69.

Der folgende Satz ist gültig:

Satz 3. *Diejenigen Tensoren dritter Stufe und vom Typ $F_i{}^j{}_k$, die allein von einem Element $\Gamma_i{}^j{}_k$ von $\mathfrak{M}$ abhängig sind, können nur Funktionen des schiefsymmetrischen Teiles von $\Gamma_i{}^j{}_k$ sein.*

Beweis. Schreiben wir $\Gamma_i{}^j{}_k$ in der Form:

$$\Gamma_i{}^j{}_k = \gamma_i{}^j{}_k + \Omega_i{}^j{}_k \tag{2.3}$$

wo

$$\gamma_i{}^j{}_k = \frac{1}{2}(\Gamma_i{}^j{}_k + \Gamma_k{}^j{}_i), \qquad \Omega_i{}^j{}_k = \frac{1}{2}(\Gamma_i{}^j{}_k - \Gamma_k{}^j{}_i) \tag{2.4}$$

ist, so folgt aus (2. 1) unmittelbar, daß $\gamma_i{}^j{}_k$ dieselbe Transformationsformel hat, wie $\Gamma_i{}^j{}_k$, $\Omega_i{}^j{}_k$ aber einen Tensor bedeutet.

Da nach unserer Annahme der Tensor $F_i{}^j{}_k$ eine Funktion von $\Gamma_i{}^j{}_k$ ist, kann nach (2. 3) $F_i{}^j{}_k$ als eine Funktion der $\gamma_i{}^j{}_k$ und der $\Omega_i{}^j{}_k$ betrachtet werden. Auf Grund der Transformationsformel der Tensoren und nach (2. 1) wird:[7])

$$\begin{aligned} F_i{}^j{}_k(\gamma_r{}^s{}_t A_a^r \bar{A}_s^b A_c^t + B_a{}^b{}_c, \Omega_r{}^s{}_t A_a^r \bar{A}_s^b A_c^t) = \\ = F_r{}^s{}_t(\gamma_a{}^b{}_c, \Omega_a{}^b{}_c) A_i^r \bar{A}_s^j A_k^t \end{aligned} \tag{2.5}$$

eine Identität in den A_a^r und $B_a{}^b{}_c$. Betrachten wir jetzt einen beliebigen Punkt $\underset{(0)}{x^i}$. Es gibt immer ein Koordinatensystem in welchem

$$\gamma_r{}^s{}_t(\underset{(0)}{x^i}) = 0$$

ist; so bekommt man aus (2. 5), daß

$$F_i{}^j{}_k(B_a{}^b{}_c, \Omega_r{}^s{}_t A_a^r \bar{A}_s^b A_c^t) = F_r{}^s{}_t(0, \Omega_a{}^b{}_c) A_i^r \bar{A}_s^j A_k^t$$

besteht. Diese Formel drückt aber aus, daß die $F_i{}^j{}_k$ von $B_a{}^b{}_c$ d. h. von den an der ersten Stelle stehenden $\frac{1}{2}n^2(n+1)$ Komponenten unabhängig sind.

$F_i{}^j{}_k$ kann also nur von $\Omega_a{}^b{}_c$ abhängig sein, w. z. b. w.

Eine einfache Folgerung des Satzes 3 ist das folgende

Korollarium. *Aus einem in i, k symmetrischen $\Gamma_i{}^j{}_k$ kann kein Tensor vom Typ $F_i{}^j{}_k$ gebildet werden.*

Die Funktionalgleichung (2. 5) reduziert sich für den Tensor $F_i{}^j{}_k$ auf die Form:

$$F_i{}^j{}_k(\Omega_r{}^s{}_t A_a^r \bar{A}_s^b A_c^t) = F_r{}^s{}_t(\Omega_a{}^b{}_c) A_i^r \bar{A}_s^j A_k^t. \tag{2.6}$$

Die Lösungen dieses Funktionalgleichungssystems können mannigfache Formen haben. Wir zeigen das an einigen Beispielen.

---

[7]) $F_i{}^j{}_k(\gamma_a{}^b{}_c, \Omega_a{}^b{}_c)$ bedeutet selbstverständlich $F_i{}^j{}_k(\gamma_1{}^1{}_1, \ldots, \Omega_1{}^1{}_2, \ldots)$.

Wegen der schiefen Symmetrie der $\Omega_i{}^j{}_k$ in i, k ist

$$\gamma_{ik} = \Omega_t{}^t{}_s \, \Omega_i{}^s{}_k$$

auch schiefsymmetrisch. Die folgenden Formeln bestimmen dann einige Lösungen des Systems (2. 6):

1. $$F_i{}^j{}_k = c(x)\, \Omega_i{}^j{}_k,$$
2. $$F_i{}^j{}_k = c(x)\, \gamma_{ir}\, \Omega_k{}^r{}_s\, \gamma^{sj},$$
3. $$F_i{}^j{}_k = c(x)\, \Omega_a{}^b{}_c\, \Omega_b{}^j{}_d\, \gamma^{ad}\, \Omega_i{}^c{}_k,$$

wo $c(x)$ immer einen beliebigen Skalar bedeutet, und γ^{ik} durch

$$\gamma_{ij}\, \gamma^{jk} = \delta_i^k$$

bestimmt ist.

§ 3. Über Tensoren vierter Stufe gebildet aus $\Gamma_i{}^j{}_k$ und $\partial_l \Gamma_i{}^j{}_k$.

Zuletzt wollen wir diejenigen Tensoren $T_i{}^j{}_{kl}$ untersuchen, die aus den $\Gamma_i{}^j{}_k$ und $\partial_l \Gamma_i{}^j{}_k$ zusammengesetzt sind. Von der Transformationsformel (2. 1) bekommt man die Transformationsformel der Derivierten $\partial_l \Omega_i{}^j{}_k$. Es ist

$$\overline{\partial_l \Gamma_i{}^j{}_k} = \partial_p \Gamma_r{}^s{}_t\, A_i^r\, \bar{A}_s^j\, A_k^t\, A_l^p + C_i{}^j{}_{kl} + (\ldots), \tag{3. 1}$$

wo

$$C_i{}^j{}_{kl} = \frac{\partial^3 x^r}{\partial \bar{x}^i\, \partial \bar{x}^k\, \partial \bar{x}^l}\, \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^r} \tag{3. 2}$$

und $(\ldots)$ solche Glieder bedeutet in denen $\dfrac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^i\, \partial \bar{x}^k}$ vorkommt. Aus (3. 2) sieht man, daß $C_i{}^j{}_{kl}$ in den Indizen i, k, l totalsymmetrisch ist.

Ein Tensor $T_i{}^j{}_{kl}$, der von den $\Gamma_i{}^j{}_k$ und $\partial_l \Gamma_i{}^j{}_k$ abhängig ist genügt der Transformationsformel:

$$T_i{}^j{}_{kl}\left(\overline{\partial_d \Gamma_a{}^b{}_c},\, \bar{\Gamma}_a{}^b{}_c\right) = T_p{}^r{}_{st}\left(\partial_d \Gamma_a{}^b{}_c,\, \Gamma_a{}^b{}_c\right) A_i^p\, \bar{A}_r^j\, A_k^s\, A_l^t, \tag{3. 3}$$

wo $\bar{\Gamma}_a{}^b{}_c$ und $\overline{\partial_d \Gamma_a{}^b{}_c}$ durch (2. 1) und (3. 1) angegeben sind. Nach einer partiellen Ableitung von (3. 3) nach $C_e{}^f{}_{gh}$ wird wegen der totalsymmetrischen Eigenschaften von $C_e{}^f{}_{gh}$:

$$\frac{\partial T_i{}^j{}_{kl}}{\partial(\partial_e \Gamma_g{}^f{}_h)} + \{Permutation\}_{egh} = 0 \tag{3. 4}$$

bestehen. (3. 4) bestimmt also die erste Gruppe der Differentialgleichungen, die der Tensor $T_i{}^j{}_{kl}$ befriedigt. Aus (3. 4) kann man schon gewisse Typen, die auch in der Differentialgeometrie eine wichtige Rolle spielen, bestimmen.

Die Gleichung (3.4) kann in den folgenden drei Formen geschrieben werden:

$$\left\{ \frac{\partial T_i{}^j{}_{kl}}{\partial(\partial_e \Gamma_g{}^f{}_h)} + \frac{\partial T_i{}^j{}_{kl}}{\partial(\partial_h \Gamma_g{}^f{}_e)} \right\} + \{Zykl.\,P.\}_{egh} = 0, \tag{3.5a}$$

$$\left\{ \frac{\partial T_i{}^j{}_{kl}}{\partial(\partial_e \Gamma_g{}^f{}_h)} + \frac{\partial T_i{}^j{}_{kl}}{\partial(\partial_g \Gamma_e{}^f{}_h)} \right\} + \{Zykl.\,P.\}_{egh} = 0, \tag{3.5b}$$

$$\left\{ \frac{\partial T_i{}^j{}_{kl}}{\partial(\partial_e \Gamma_g{}^f{}_h)} + \frac{\partial T_i{}^j{}_{kl}}{\partial(\partial_e \Gamma_h{}^f{}_g)} \right\} + \{Zykl.\,P.\}_{egh} = 0, \tag{3.5c}$$

wo $\{\text{zykl. P.}\}_{egh}$ die zyklische Permutation auf die Indizes e, g, h bedeutet.

Eine der einfachsten, aber vom geometrischen Standpunkt aus vielleicht wichtigsten Lösungen der Differentialgleichungssysteme (3.5a)—(3.5c) bekommen wir durch die Forderung, daß jeder Klammerausdruck einzeln verschwinde; somit bekommt man diejenigen Spezialfälle von (3.5a)—(3.5c), die alle zum Typ:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$$

gehören. Die allgemeinste Lösung dieser Differentialgleichung ist die Funktion[8])

$$f(x, y) = \varphi(x - y),$$

wo $\varphi(z)$ eine beliebige Funktion von z ist. (3.5a), (3.5b) und (3.5c) bestimmen somit drei Typen der Lösungen undzwar:

$$T_i{}^j{}_{kl} = T_i{}^j{}_{kl}(\partial_{[d} \Gamma_{|a|}{}^b{}_{c]}, \Gamma_a{}^b{}_c), \quad T_i{}^j{}_{kl} = T_i{}^j{}_{kl}(\partial_{[d} \Gamma_{a]}{}^b{}_c, \Gamma_a{}^b{}_c),$$
$$T_i{}^j{}_{kl} = T_i{}^j{}_{kl}(\partial_d \Omega_a{}^b{}_c, \Gamma_a{}^b{}_c).$$

Beachtet man die Transformationsformeln (2.1) und (3.1) so sieht man, daß diese Typen der Lösungen etwa durch die folgenden Funktionen realisiert werden können:

a) $$T_i{}^j{}_{kl} = 2(\partial_{[l} \Gamma_{|i|}{}^j{}_{k]} + \Gamma_i{}^r{}_{[k} \Gamma_{|r|}{}^j{}_{l]}),$$

b) $$T_i{}^j{}_{kl} = 2(\partial_{[l} \Gamma_{k]}{}^j{}_i + \Gamma_{[k}{}^r{}_{|i|} \Gamma_{l]}{}^j{}_r),$$

c) $$T_i{}^j{}_{kl} = \partial_i \Omega_k{}^j{}_l - \Gamma_i{}^r{}_k \Omega_r{}^j{}_l + \Gamma_i{}^j{}_r \Omega_k{}^r{}_l - \Gamma_i{}^r{}_l \Omega_k{}^j{}_r.$$

Im Fall a) und b) ist $T_i{}^j{}_{kl}$ der Krümmungstensor, der zu den kovarianten Ableitungen:

$$\nabla_k \xi^i = \partial_k \xi^i + \Gamma_r{}^i{}_k \xi^r, \quad \text{bzw.} \quad \overset{*}{\nabla}_k \xi^i = \partial_k \xi^i + \Gamma_k{}^i{}_r \xi^r$$

gehört. Im Falle c) ist $T_i{}^j{}_{kl} = \overset{*}{\nabla}_i \Omega_k{}^j{}_l$. Diese Größen kommen bekanntlich in gewissen Vertauschungsformeln der kovarianten Ableitungen vor. Z. B. für

[8]) Vgl. E. Kamke, Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen II., *Leipzig*, 1944, S. 137, Beispiel 2.1.

den Fall c) ist

$$\frac{1}{2}(\overset{*}{\nabla}_j \nabla_k - \nabla_j \overset{*}{\nabla}_k)\xi^i = \xi^r \overset{*}{\nabla}_j \Omega_r{}^i{}_k + \Omega_j{}^i{}_t \overset{*}{\nabla}_k \xi^t - \Omega_j{}^t{}_k \overset{*}{\nabla}_t \xi^i + \Omega_t{}^i{}_k \overset{*}{\nabla}_j \xi^t.$$

Wir bemerken noch, daß in den Fällen a) und b) die $\Gamma_a{}^b{}_c$ auch durch $\gamma_a{}^b{}_c$ ersetzt werden können, da die $\Gamma_a{}^b{}_c$ und $\gamma_a{}^b{}_c$ dieselbe Transformationsformel haben. (Für $\gamma_i{}^j{}_k$ vgl. (2. 4).)

Es bleibt noch ein unentschiedenes Problem, ob die Typen a), b) und c) und noch

d) $$T_i{}^j{}_{kl} = 2(\partial_{[l}\gamma_{k]}{}^j{}_i + \gamma_i{}^r{}_{[k}\gamma_{l]}{}^j{}_r)$$

(ungeachtet einen skalaren Faktor) alle Lösungen des Funktionalgleichungssystems (3. 3) bestimmen.

Über diesen ganzen Problemkreis habe ich mit Prof. J. ACZÉL und mit Prof. S. GOŁĄB einige Diskussionen geführt; diesen verdanke ich einige wertvolle Hinweise, für die ich meinen Dank auch an dieser Stelle aussprechen will.

(Eingegangen am 8. Oktober 1957, in veränderter Form am 23. Oktober 1958.)