Über die Verallgemeinerung der Operatorenrechnung.

Von ISTVÁN FENYŐ (Budapest).

Jüngst hat J. MIKUSIŃSKI in seinem Buche [4] und einer Arbeit [5] eine sehr elegante Begründung der Operatorenrechnung gegeben. Der von Ihm eingeführte Begriff des Operators (im folgenden sei dieser Begriff durch M-Operator bezeichnet) erwies sich als eine Verallgemeinerung des Begriffes der eindimensionalen Distributionen [1]. Nun wollen wir den Gedanken von MIKUSIŃSKI verallgemeinern. Diese Verallgemeinerung hat interessante Anwendungen.

1. Bezeichnen wir durch C_T alle Funktionen von zwei Veränderlichen, welche im Bereiche $B_T: 0 \leqq x \leqq y \leqq T$ stetig sind und außer B_T indentisch verschwinden. Die Faltung von zwei Funktionen aus C_T $U(x, y)$ und $V(x, y)$ definieren wir folgendermaßen:

$$U * V = \int_x^y U(x, t)\, V(t, y)\, dt, \qquad \text{für} \qquad (x, y) \in B_T. \tag{1}$$

Auch $U * V$ gehört zur Klasse C_T. Im allgemeinen ist $U * V \neq V * U$; falls $U * V \equiv V * U$ zutrifft, so sagen wir, daß U und V *vertauschbar* sind. Hängen U und V blos von $y-x$ ab, so sind $U(y-x)$ und $V(y-x)$ immer vertauschbar.

Es sei $U(x, y)$ eine Funktion aus C_T, welche folgende Eigenschaften besitzt:

1°. $U(x, x) \neq 0$ $(0 \leqq x \leqq T)$,

2°. $\dfrac{\partial U}{\partial x}, \dfrac{\partial U}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ existieren, und $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \in C_T$.

Diejenigen Funktionen, welche diese Eigenschaften besitzen bilden die Funktionenklasse $\mathfrak{S}_T$.

Nun betrachten wir alle Funktionen aus C_T, welche mit einer ausgewählten Funktion $U(x, y) \in \mathfrak{S}_T$ vertauschbar sind, und welche in keinem zweidimensionalen Teilbereich von B_T, welcher die Gerade $y = x$ enthält, identisch verschwinden. Diese Funktionen bilden mit der gewöhnlichen

Addition und mit der unter (1) definierten Faltung einen Ring. Dieser soll mit $\mathfrak{G}_u$ bezeichnet werden.

Daß $\mathfrak{G}_u$ wahrlich ein Ring ist, folgt daraus, daß, einerseits: gemäß einem schon klassischen Satz von VESSIOT [7] und VOLTERRA [8] zwei, mit U vertauschbaren Funktionen auch untereinander vertauschbar sind, ist also G und $H \in \mathfrak{G}_u$, so ist $G * H = H * G$; andererseits gilt: $G * H = H * G \in \mathfrak{G}_u$. Daß die Assoziativitäts- und Distributionsgesetze gelten, ist trivial.

Als ein wichtiges Beispiel erwähnen wir den Ring aller Funktionen, welche vorige Eigenschaften besitzen und mit der Funktion

$$h(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{in } B_T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(im folgenden Einheitsfunktion) vertauschbar sind. Bezeichnen wir diesen Ring mit $\mathfrak{F}_T$. Es ist bekannt, daß alle Funktionen des Ringes $\mathfrak{F}_r$ bloß von der Differenz der Argumente abhängen und diese Funktionen $f(t)$ einer Veränderlichen in keiner rechsseitigen Umgebung des Nullpunktes identisch verschwinden.

Grundlegend ist der folgende Satz: *Die Ringe $\mathfrak{G}_u$ und $\mathfrak{F}_T$ sind isomorph.*

Dieser Satz wurde im wesentlichen von L. A. SACHNOVICH [10] bewiesen. Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit wenn wir voraussetzen, daß $U(x, x) \equiv 1$ und daß $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=y} = \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{x=y} = 0$ ist (U genügt natürlich den Bedingungen 1°. und 2°.) Denn wäre das nicht der Fall, so betrachten wir statt U die Funktion:

$$U^*(\xi, \eta) = \lambda(\xi)\,\mu(\eta)\,U[\psi(\xi), \psi(\eta)],$$

mit

$$\lambda(\xi) = \exp\left[-\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{\xi=\eta} U(\xi, \xi)^{-1} d\xi\right]$$

$$\mu(\eta) = U(\eta, \eta)^{-1} \exp\left[\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{\eta=\xi} U(\eta, \eta)^{-1} d\eta\right]$$

$$\psi(\xi) = \int U(x, x)^{-1} dx; \quad x = \psi^{-1}(\xi); \quad y = \psi^{-1}(\eta).$$

U^* ist so beschaffen, daß $U^*(\xi, \xi) = 1$ und $\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_{\xi=\eta} = \left(\frac{\partial U^*}{\partial \eta}\right)_{\xi=\eta} = 0$ ist. Es seien G und H zwei Funktionen aus $\mathfrak{G}_u$, betrachten wir statt ihnen die Funktionen G^* und H^* welche mit der vorigen Transformation gebildet sind. Eine einfache Rechnung zeigt, daß

$$G * H = G^* * H^*$$

gültig ist. Wir werden also im weiteren voraussetzen, daß wenn eine Funktion an der Diagonale $y=x$ $(0 \leqq x \leqq T)$ in keinem Punkte verschwindet, so ist sie dort identisch 1. Auch die Tatsache ist bekannt, daß alle Funktionen aus $\mathfrak{G}_u$, welche in mindestens einem Punkte der Diagonale $y=x$ $(0 \leqq x \leqq T)$ verschwinden an dieser Geraden identisch verschwindend sind.

Betrachten wir den beliebigen, in B_T definierten Volterraschen Kern $K(x, y)$, dessen Resolvente durch $R(x, y)$ bezeichnet sei. Mit ihm bilden wir die folgende Transformation:

$$L(x, y)=P(F)=(\delta+K)*F*(\delta-R), \tag{2}$$

δ bedeutet den Identitätsoperator, also denjenigen, welcher jede Funktion aus C_T in sich selbst überführt. Diese Transformation P nennen wir eine, durch den Kern $K(x, y)$ bestimmte Ähnlichkeitstransformation. Im Sonderfall, wenn $K(x, y)$ mit $F(x, y)$ vertauschbar ist, ist die Ähnlichkeitstransformation gleich der Identitätstransformation. Das folgt aus der Definition des lösenden Kernes.

Die Ähnlichkeitstransformation ist eine eindeutige, homogene und lineare Transformation, welche eine eindeutige Inverse besitzt. Aus (2) folgt

$$F=P^{-1}(L)=(\delta-R)*L*(\delta+K).$$

Die wichtigste Eigenschaft der Ähnlichkeitstransformation ist, daß sie die Faltung von zwei Funktionen in die Faltung der Transformierten überführt. Falls $A(x, y)$ und $B(x, y)$ zwei beliebige Funktionen (aus C_T) sind, so ist die Eigenschaft

$$P(A)*P(B)=P(A*B) \tag{3}$$

gültig, denn es gilt

$$\begin{aligned}P(A)*P(B)&=(\delta+K)*A*(\delta-R)*(\delta+K)*B*(\delta-R)=\\&=(\delta+K)*A*B*(\delta-R)=P(A*B).\end{aligned}$$

Falls A und B vertauschbar sind, so besitzen $P(A)$ und $P(B)$ dieselben Eigenschaft.

SACHNOVICH hat bewiesen, daß, wenn die Funktion $U(x, y)$ die früher geschilderte Eigenschaften besitzt, so gibt es einen Kern $K(x, y)$ so daß die mit ihm gebildete Ähnlichkeitstransformation, die Funktion U in h überführt [10]:

$$U(x, y)=P_K(h),$$

Da aber $h \in \mathfrak{F}_T$, so ist jede Funktion

$$V(x, y)=P_K(v)$$

mit $v \in \mathfrak{F}_T$ ein Element von $\mathfrak{G}_u$. Durchläuft v den Ring $\mathfrak{F}_T$, so durchläuft $V(x, y)$ den Ring $\mathfrak{G}_u$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Eine weitere grundlegende Behauptung ist die folgende: *Der Ring $\mathfrak{G}_u$ ist Nullteilerfrei.* Bezeichnen wir den früheren Isomorphismus zwischen $\mathfrak{G}_u$ und $\mathfrak{F}_T$ durch P. Es sei

$$F = P(f),\ G = P(g)\ \ (f, g \in \mathfrak{F}_T),$$

so ist

$$F * G = P(f * g). \tag{4}$$

$F * G$ ist dann und nur dann $\equiv 0$, wenn $f * g \equiv 0$ ist. Im Falle $T = \infty$ ist aber $f * g$ nicht identisch verschwindend, da $\mathfrak{F}_T$ nach einem wohlbekannten Satze von TITCHMARSH [6] Nullteilerfrei ist. Ist aber $T < \infty$ so, betrachten wir die inverse Ähnlichkeitstransformation:

$$f = P^{-1}(F).$$

Falls $F(x, y)$ in keinem zweidimensionalem Teilbereich von B_T welcher die Diagonale $y = x$ $(0 \leqq x \leqq T)$ enthält, identisch verschwindet, so verschwindet natürlich auch f nicht identisch in einer rechtsseitigen Umgebung von 0. Dasselbe gilt auch für g. Gemäß einer Bemerkung von MIKUSIŃSKI ([5], p. 227. № 3) ist $f * g \not\equiv 0$, also ist auch $F * G \not\equiv 0$ erfüllt.

Es ist üblich in der Theorie der Integralgleichungen die Faltung einer Funktion mit sich selbst die Iterierte dieser Funktion zu nennen. Die Iterierten von G sind also

$$G * G = G_2\,;\ G_2 * G = G_3\,, \ldots,\ G_n = G_{n-1} * G,$$

G_1 sei mit G identisch.

2. Aus dem eben bewiesenen Satze folgt, daß *der Ring $\mathfrak{G}_u$ zu einem Körper erweitert werden kann.* Wir bilden aus einem Funktionenpaar F, G aus $\mathfrak{G}_u$ den „Quotienten" L dieser Funktionen und wollen ihn durch $F * G_{-1}$ bezeichnen. Er besitzt folgende Eigenschaften:

$$(F^{(1)} + F^{(2)}) * G_{-1} = F^{(1)} * G_{-1} + F^{(2)} * G_{-1} \quad (F^{(1)}, F^{(2)}, G \in \mathfrak{G}_u);$$

$$\alpha \cdot F * G_{-1} = (\alpha F) * G_{-1} \qquad (\alpha \text{ ist eine beliebige Zahl});$$

$$A * (F * G_{-1}) = (F * G_{-1}) * A = (A * F) * G_{-1}\ (A \text{ ist ein beliebiges Element aus } \mathfrak{G}_u);$$

$$F * G_{-1} = \bar{F} * \bar{G}_{-1} \text{ dann und nur dann, falls } F * \bar{G} \equiv \bar{F} * G \text{ in } B_T;$$

$$F * G_{-1} + M * N_{-1} = (F * N + G * M) * (G * N)_{-1}\ \ (F, G, M, N \in \mathfrak{G}_u).$$

Die Gleichung

$$F * G_{-1} = L \qquad (L \in \mathfrak{G}_u)$$

bedeutet, daß $G * L = F$ in B_T, d. h. L ist dann und nur dann eine Funktion (aus $\mathfrak{G}_u$), falls die Volterrasche Integralgleichung erster Art $G * L = F$ eine Lösung besitzt. Diese ist, falls sie überhaupt existiert, eindeutig bestimmt, wie dies aus der Nullteilerfreiheit von $\mathfrak{G}_u$ folgt. Wir werden den jetz definierten „Quotienten“ von zwei Elementen $\mathfrak{G}_u$ aus $\mathfrak{K}_u$-*Operatoren* nennen, und den Körper der $\mathfrak{K}_u$-Operatoren mit $\mathfrak{K}_u$ bezeichnen. Die Rolle des Einselementes spielt der $\mathfrak{K}_u$-Operator $\delta = V * V_{-1}$ $(V \in \mathfrak{G}_u)$. Er ist von V unabhängig: aus

$$V * \overline{V} = \overline{V} * V \text{ folgt } V * V_{-1} = \overline{V} * \overline{V}_{-1}.$$

Falls G eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{G}_u$ ist, so haben wir

$$\delta * G = V * V_{-1} * G = (V * G) * V_{-1} = G,$$

δ ist sicherlich keine Funktion, denn wie bekannt, besitzt die Integralgleichung $V * \delta = V$ keine Lösung (der Volterrasche Kern ist Eigenwertsfrei!).

Man kann leicht nachweisen, daß z. B. folgende Rechenregeln gültig sind. A und B seien zwei beliebige $\mathfrak{K}_u$-Operatoren, so ist die Faltung von $A = P * Q_{-1}$ und $B = R * S_{-1}$:

$$A * B = (P * R) * (Q * S)_{-1}.$$

Speziell:

$$\delta * A = (V * P) * (V * Q)_{-1} = P * Q_{-1} = A.$$

Die Iterierten von A sind:

$$A_1 = A\,; \; A_2 = A * A = P_2 * (Q_2)_{-1}, \text{ usw.}$$

und

$$A_{-1} = Q * P_{-1}.$$

3. Die Elemente von $\mathfrak{K}_u$ können auch folgendermassen gedeutet werden. Wir betrachten eine Folge von Funktionen $\{F^{(n)}(x, y)\}$ deren Glieder zu $\mathfrak{G}_u$ gehöhren. Wir werden eine solche Folge als $\mathfrak{K}$-konvergente bezeichnen, falls es eine Funktion $L(x, y) \in \mathfrak{G}_u$ existiert, so daß die Folge $\{L * F^{(n)}\}$ in B_T glechmäßig zu einer Funktion $M(x, y)$ konvergiert. Wir beweisen: *Die $\mathfrak{K}$-konvergente Folge $\{F^{(n)}\}$ definiert den $\mathfrak{K}_u$-Operator $M * L_{-1}$.* Die Behauptung ist leicht beweisbar. Es sei $\overline{L}$ eine andere Funktion aus $\mathfrak{G}_u$, für welche

$$\lim_{n \to \infty} \overline{L} * F^{(n)} = \overline{M}$$

stattfindet, und die Konvergenz sei auch hier gleichmäßig. Es muß bewiesen werden, daß $M * L_{-1} = \overline{M} * \overline{L}_{-1}$ ist. Ist die Folge $\{F^{(n)}\}$ $\mathfrak{K}$-konvergent, so gehören die Funktionen M und $\overline{M}$ zu $\mathfrak{G}_u$, sie sind also mit den Funktionen $L, \overline{L}$, und $F^{(n)} (n = 1, 2, \ldots)$ vertauschbar. Wegen dieser Tatsache und wegen der gleichmäßigen Konvergenz ist

$$\lim_{n \to \infty} \overline{L} * L * F^{(n)} = \overline{L} * M \quad \text{und} \quad \lim_{n \to \infty} L * \overline{L} * F^{(n)} = L * \overline{M}.$$

Da aber L und $\overline{L}$ vertauschbar sind, ist

$$\overline{L} * M = L * \overline{M} \quad \text{d. h.} \quad M * L_{-1} = \overline{M} * \overline{L}_{-1}.$$

Auch die Umkehrung unserer Behauptung ist richtig: *jeder $\mathfrak{K}_u$-Operator ist mit einer $\mathfrak{K}$-konvergenten Folge* (dessen Glieder zu $\mathfrak{G}_u$ gehören) *äquivalent.*

Die Behauptung ist gewiß richtig, falls der Grundring gleich $\mathfrak{F}_T$ ist [2]. Genauer: ist $l, m \in \mathfrak{F}_T$, so läßt sich immer eine Funktionenfolge $\{f^{(n)}\}$ aus $\mathfrak{F}_T$ auswählen, so daß

$$\lim_{n\to\infty} l * f^{(n)} = m$$

gültig sei. Nun betrachten wir eine Ähnlichkeitstransformation zwischen $\mathfrak{G}_u$ und $\mathfrak{F}_T$, den wir mit P bezeichnen wollen. Es sei $M = P(m)$, $L = P(l)$, $F^{(n)} = P(f^{(n)})$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz ist also

$$\lim_{n\to\infty} L * F^{(n)} = M \tag{5}$$

d. h. $F^{(n)}$ ist eine $\mathfrak{R}$-konvergente Folge, welche den $\mathfrak{R}_n$-Operator $M * L_{-1}$ definiert.

Wir bemerken, daß die $\mathfrak{R}$-Konvergente Folgen eine Verallgemeinerung der „fundamentalen Folgen“ (fundamental sequences“) von KOREVAAR [3] sind. Denn ist die $\mathfrak{R}$-konvergente Folge eine aus $\mathfrak{F}_T$ ausgewählte, und die Funktion welche die $\mathfrak{R}$-Konvergenz in die gleichmäßige Konvergenz überführt, eine Iterierte der Heavisideschen Sprungfunktion, so ist sie eine Korevaarsche fundamentale Folge.

Wir nennen eine Folge $\{A^{(n)}\}$ von $\mathfrak{R}_u$-Operatoren konvergent, falls ein $\mathfrak{R}_u$-Operator B existiert, so daß

1°. $B * A^{(n)}$ für $n = 1, 2, \ldots$; Funktionen aus $\mathfrak{G}_u$ sind,

2°. die Funktionenfolge $B * A^{(n)}$ im Bereiche B_T gleichmäßig zu $G(x, y)$ konvergiert. Wir benützen in diesem Falle die Bezeichnung:

$$\lim_{n\to\infty} A^{(n)} = G * B_{-1}.$$

Ist eine Folge der $\mathfrak{R}_u$-Operatoren $\{A^{(n)}\}$ konvergent, so ist auch die Folge $\{C * A^{(n)}\}$ konvergent, wobei C ein beliebiger $\mathfrak{R}_u$-Operator ist. Daß die Folge $\{A^{(n)}\}$ konvergent ist, bedeutet, daß die Funktionenfolge $\{B * A^{(n)}\}$ bei geeignetem B gleichmäßig zu einer Funktion G konvergiert; setzen wir $C = P * Q_{-1}$, so is auch $B * Q * C * A^{(n)}$ eine gleichmäßig konvergente Funktionenfolge.

Der jetzt ausgesprochene einfache Satz ist eine Verallgemeinerung des Satzes wonach die durch gliedweise Differenzierung einer konvergenten Distributionenfolge erhaltene Folge wieder konvergent ist.

Ist $\lim_{\nu\to\infty} A^{(\nu)} = A$ und $\lim_{\nu\to\infty} B^{(\nu)} = B$ $(A^{(\nu)}, B^{(\nu)} \in \mathfrak{R}_u)$,

so haben wir

$$\lim_{\nu\to\infty} [A^{(\nu)} + B^{(\nu)}] = A + B.$$

Aus unseren Voraussetzungen folgt nämlich, daß

$$P * A^{(\nu)} \to a; \; Q * B^{(\nu)} \to b \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathfrak{G}_u; \quad P, Q \in \mathfrak{R}_u,$$

und diese Konvergenzen sind gleichmäßig. Setzen wir

$$P = p * n_{-1}; \quad Q = q * n_{-1} \quad (p, q, n \in \mathfrak{G}_u)$$

(daß die „Nenner" gleich sind, bedeutet natürlich keine Einschränkung der Allgemeinheit), so gilt

$$\lim_{\nu \to \infty} p * A^{(\nu)} = a * n \quad \text{und} \quad \lim_{\nu \to \infty} q * B^{(\nu)} = b * n,$$

d. h.

$$\lim_{\nu \to \infty} p * q * [A^{(\nu)} + B^{(\nu)}] = (a * q + b * p) * n.$$

Damit ist bewiesen, daß $\{A^{(\nu)} + B^{(\nu)}\}$ konvergent ist, und nach der Definition

$$\lim_{\nu \to \infty} [A^{(\nu)} + B^{(\nu)}] = a * n * p_{-1} + b * n * q_{-1} = a * P_{-1} + b * Q_{-1} = A + B$$

ist. In gleicher Weise läßt sicht beweisen, daß

$$\lim_{\nu \to \infty} A^{(\nu)} * B^{(\nu)} = A * B$$

gilt und falls $B \neq 0$ ist, so haben wir folgende Relation:

$$\lim_{\nu \to \infty} A^{(\nu)} * B_{-1}^{(\nu)} = A * B_{-1}.$$

Aus dieser letzteren Behauptung folgt, daß wenn

$$\lim_{\nu \to \infty} a^{(\nu)} = a \quad \text{und} \quad \lim_{\nu \to \infty} b^{(\nu)} = b \quad (a^{(\nu)}, b^{(\nu)} \in \mathfrak{G}_u)$$

ist und diese Konvergenzen gleichmäßig sind, dann ist die Folge $V^{(\nu)} = a^{(\nu)} * b_{-1}^{(\nu)}$ von $\mathfrak{K}_u$-Operatoren konvergent, und es gilt

$$\lim_{\nu \to \infty} V^{(\nu)} = a * b_{-1}, \quad \text{falls} \quad b \neq 0.$$

Die Funktionen $a^{(\nu)}$ und $b^{(\nu)}$ können ja als $\mathfrak{K}_u$-Operatoren aufgefasst werden, welche in unserem „Operatorensinne" zu a bzw. b konvergieren, deshalb ist unsere Aussage richtig.

Wenn wir von dem Ringe $\mathfrak{F}_T$ ausgehend den Operatorenkörper in der soeben diskutierten Weise ausbauen, erhalten wir den Mikusińskischen Operatorenkörper. Wir wollen ihn durch $\mathfrak{K}_M$ bezeichnen. Die Körper $\mathfrak{K}_u$ und $\mathfrak{K}_M$ sind isomorph. Denn es sei P eine Ähnlichkeitstransformation zwischen $\mathfrak{G}_u$ und $\mathfrak{F}_T$. Wenn $A = R * S_{-1} \in \mathfrak{K}_u$ und $R = P(r), S = P(s)$ ist, so setzen wir

$$R * S_{-1} = P(r) * P(s)_{-1} = P(r * s_{-1}),$$

$r * s_{-1} \in \mathfrak{K}_M$. Eine Ähnlichkeitstransformation gibt also eine eindeutige, und eindeutig umkehrbare Abbildung zwischen den Operatorenkörpern $\mathfrak{K}_u$ und $\mathfrak{K}_M$. Man kann leicht beweisen, daß diese Transformation stetig ist, wenn wir den vorigen Begriff des „Operatorenlimes" benützen.

Als Beispiel zeigen wir, daß der δ_n aus $\mathfrak{R}_n$ dem δ_M aus $\mathfrak{R}_M$ entspricht. Denn es ist $\delta_M = r * r_{-1} \in \mathfrak{R}_M$, also

$$P(\delta_M) = P(r) * P(r_{-1}) = R * R_{-1} = \delta_n \in \mathfrak{R}_n.$$

4. Nun betrachten wir statt B_T den halb offenen Bereich $N_T: 0 \leqq x \leqq y > T$ (T kann jetzt auch ∞ bedeuten). Betrachten wir eine beliebige monoton wachsende Folge $\{T_n\}$ positiver Zahlen mit $T_n \to T$ und die Folge von $\mathfrak{R}_n$-Operatoren $\{A^{(m)}\}$. Hier ist $A^{(n)}$ in B_{T_n} definiert. Wir sagen, daß die $\mathfrak{R}_n$-Operatorenfolge $\{A^{(n)}\}$ einen $\mathfrak{R}_u$-Operator in N_T definiert, wenn $A^{(n)} = A^{(m)}$ in B_{T_m} gilt, falls $m \leqq n$ zutrifft. Wir betrachten zwei in N_T definierten Operatoren als gleich:

$$\{A^{(n)}\} = \{B^{(n)}\}$$

wenn im gemeinsamen Teil von B_{T_n} und B_{T_m} für alle Indizes $A^{(n)} = B^{(m)}$ ist.

Die im halboffenen Intervalle $[O, T)$ definierten Distributionen bilden eine Teilmenge der in diesem Intervalle definierten $\mathfrak{R}_M$-Operatoren. Daraus folgt, daß eine Ähnlichkeitstransformation alle in $[O, T)$ definierten Distributionen in $\mathfrak{R}_u$ abbildet.

Die $\mathfrak{R}_u$-Operatoren im offenen Bereiche N_T können auch folgendermaßen gedeutet werden. Wir nennen eine Folge von $\mathfrak{G}_u$ Funktionen $\{F^{(n)}\}$ einen $\mathfrak{R}_u$-operator im halboffenen Bereich N_T falls sie folgende Eigenschaft besitzt: es existiert für alle $0 \leqq \tau < T$ eine Funktion $Q_\tau(x, y)$ aus $\mathfrak{G}_u$, für welche $\lim\limits_{r \to \infty} Q_\tau * F^{(n)}$ vorhanden ist und die Konvergenz ist gleichmäßig.

Das diese zweite Definition mit der ersten äquivalent ist, ist selbstverständlich.

5. Es existieren unendlich viele Ähnlichkeitstransformationen welche den Ring $\mathfrak{F}_T$ (bzw. Körper $\mathfrak{R}_M$) in $\mathfrak{G}_u$ (bzw. $\mathfrak{R}_u$) überführen. Diese können sehr einfach charakterisiert werden. Es sei denn U eine Funktion aus $\mathfrak{G}_u$ mit den Eigenschaften $U(x, x) \equiv 1$; $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=y} = \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{x=y} = 0$. So existiert immer ein Kern $K(x, y)$ der die Ähnlichkeitstransformation folgendermaßen definiert

$$U = P_K(h). \tag{6}$$

Wenn wir diese Gleichung bei gegebenem U als eine Integralgleichung in K auffassen, so besitzt sie folgende allgemeine Lösung

$$K(x, y) = \mu(y - x) + K_0(x, y) + \mu * K_0 \tag{7}$$

falls K_0 eine Lösung dieser Gleichung ist. Wir haben also

$$\delta + K = \delta + K_0 + \mu + \mu * K_0 = (\delta + \mu) * (\delta + K_0)$$

und

$$(\delta + K)^{-1} = \delta - R = (\delta + K_0)^{-1} * (\delta + \mu)^{-1},$$

daraus folgt, daß

$$P_K = P_\mu \cdot P_{K_0}$$

ist.

In der Theorie der Mikusińskischer Operatorenrechnung spielt die Einheitsfunktion eine besondere Rolle. Ihr entspricht in $\mathfrak{R}_u$ die unter (6) definierte Funktion U. Sie ist aber nicht die einzige. Denn ist K_0 ein anderer Kern, der durch eine Ähnlichkeitstransformation denselben Ring definiert, welchem auch U angehört, so ist auch die Funktion $P_{K_0}(h)$ eine, die der Eiheitsfunktion entspricht. Umgekehrt: ist $V(x,y)$ eine Funktion aus $\mathfrak{G}_u$, mit $V(x,x)\equiv 1$, dann existiert ein Kern K so, daß die Ähnlichkeitstransformation P_K der Einheitsfunktion die Funktion V zuordnet. Das ist eine direkte Konsequenz des Satzes von SACHNOVICH [10]. Durchläuft μ $\mathfrak{F}_T$, so erhalten wir sämtliche Ähnlichkeitstrasformationen welche den Ring $\mathfrak{G}_u$ charakterisieren. Zu jedem $\mu \in \mathfrak{F}_T$ gehört ein Element $U_\mu \in \mathfrak{G}_u$ welches der Einheitsfunktion entspricht.

6. Nun wollen wir uns mit einigen Anwendungen des bisherigen beschäftigen.

Es seien U und V zwei beliebige Funktionen aus $\mathfrak{G}_u$ und wir suchen die Lösung der Integralgleichung erster Art

$$U * \Phi = V. \tag{9}$$

Sie hat gewiß immer eine $\mathfrak{R}_u$-Operatorenlösung: $V * U_{-1}$. Wir stellen die Frage: unter welchen Bedingungen besitzt (9) eine Lösung aus $\mathfrak{G}_u$?

Setzen wir voraus, daß $U(x,x) \neq 0$ so können wir auch voraussetzen, daß $U(x,x) = 1$ ist. Wir wollen noch annehmen, daß U und V einem solchen Funktionenring angehören, welcher durch eine Ähnlichkeitstransformation mit $\mathfrak{F}_T$ isomorph ist. In diesem Falle existiert eine solche Ähnlichkeitstransformation sie sei durch P bezeichnet, bei welcher $U = P(h)$ ist. Dann entspricht V der Funktion v so daß $V = P(v)$. Falls (9) eine Lösung Φ aus $\mathfrak{G}_u$ besitzt, so existiert eine Funktion φ, für welche $\Phi = P(\varphi)$ stattfindet. Man kann statt (9) folgendes schreiben:

$$P(h) * P(\varphi) = P(v) \quad \text{oder} \quad P(h * \varphi) = P(v) \tag{9a}$$

und wegen Eindeutigkeit der Ähnlichkeitstransformation

$$h * \varphi = v. \tag{9b}$$

Umgekehrt, besitzt die Gleichung (9b) eine Lösung, so hat auch (9) eine. (9b) hat aber dann und nur dann eine Lösung, falls v totalstetig, und $v(0) = 0$ ist. Daraus folg aber: *die notwendige und hinreichende Bedingung, daß die Integralgleichung* (9) *mit* $U(x,x) \equiv 1$ *eine mit* U *vertauschbare Lösung besitzt ist, daß die Funktion* $v = P^{-1}(V)$ *totalstetig und* $V(x,x) \equiv 0$ (in $0 \leqq x \leqq T$) *sei,* P^{-1} *bedeutet hier die Inverse derjenigen Ähnlichkeitstransformation, welche die Funktion* U *in die Einheitsfunktion überführt.*

Im Sonderfall, wenn U eine stetige partielle Ableitung nach x besitzt und die Ableitung von v integrierbar ist, besitzt (9) nach dem jetzt bewiesenen Satze gewiß eine mit U und V vertauschbare Lösung. Dies ist seit langem bekannt [9] und sehr leicht beweisbar.

Wenn in (9) $U(x,y)$ die Form

$$U(x,y)=(y-x)^n a(x,y)$$

mit $a(x,x)\neq 0$ (in $0\leqq x\leqq T$) besitzt und n eine positive ganze Zahl bedeutet, so kann man die Bedingung der Lösbarkeit von (9) folgendermaßen bestimmen.

Nach einem Satze von Volterra [9] existiert eine Funktion W (auch unendlich viele, W bedeute eine von ihnen), für welche $W_n=U$ und $W(x,x)\equiv 1$ ist. Bezeichnen wir mit P diejenige Ähnlichkeitstransformation, für welche $W=P(h)$ ist. Schreiben wir (9) in folgende Gestallt:

$$W_n * \Phi = P\left(\frac{(y-x)^{n-1}}{(n-1)!} * \varphi\right) = P(v).$$

Das ist mit folgender Gleichung gleichbedeutend:

$$\frac{(y-x)^{n-1}}{(n-1)!} * \varphi = v,$$

Diese ist nur in dem Falle lösbar, wenn v mindestens $(n-1)$-mal stetig differenzierbar und $v^{(n-1)}$ totalstetig außerdem $v(0)=v'(0)=\cdots=v^{(n-1)}(0)=0$ ist. Sind diese Bedingungen erfüllt, so besitzt (9) eine Lösung. *Notwendig und hinreichend, damit die Gleichung* (9) *eine mit U und V vertauschbare Lösung besitzt, sind die Bedingungen, daß*

1°. $v=P^{-1}(V)$ *mindestens* $(n-1)$*-mal differenzierbar und* $v^{(n-1)}$ *totalstetig sei;*

2°. $v(0)=v'(0)=\cdots=v^{(n-1)}(0)=0$ *sei.*

Wenn a n-mal nach x differenzierbar ist und die Forderungen des Satzes erfüllt sind, so ist V mindestens n-mal differenzierbar, und nach einem Satze von Volterra [9] ist die Gleichung (9) sicher lösbar.

Es ist bekannt, daß wenn $v\in\mathfrak{F}_T$ ist, so entspricht der M-Operator $v*h_{-1}$ dem Differentialquotienten von v. Denn besitzt v eine Ableitung, so ist([4], S. 37).

$$v*h_{-1}=v'+v(0). \tag{10}$$

Wir wollen wieder einen Ring von vertauschbaren Funktionen betrachten und wir setzen $U=P(h)$, P ist wieder das Zeichen einer Ähnlichkeitstransformation. Falls V ein anderes Element aus $\mathfrak{G}_u$ ist, so haben wir die Relation:

$$V*U_{-1}=P(v*h_{-1}).$$

Wenn v differenzierbar ist, so können wir

$$V * U_{-1} = P(v' + v(0)) = P(v') + v(0)\delta,$$

schreiben; wenn wir die Bezeichnung $P(v') = \overline{V}$ benützen, so erhält die vorige Gleichung die Form

$$U * \overline{V} = V - \alpha\delta. \tag{11}$$

Hier bedeutet α eine Konstante. $\overline{V}$ kann als der „Differentialquotient" von V in $\mathfrak{K}_u$ betrachtet werden. Dieser kann aus (11) auch explizit ausgerechnet werden, denn er genügt einer Volterraschen Intregralgleichung erster Art. Setzen wir voraus, daß U einen stetigen partiellen Differentialquotienten besitzt. Um (11) lösen zu können ist es notwendig und hinreichend, daß auch V eine stetige partielle Ableitung nach x besitze. Nur in diesem Falle ist der $\mathfrak{K}_u$-Operator $V * U_{-1}$ mit einer Funktion aus $\mathfrak{G}_u$ identisch. Nun differenzieren wir beide Seiten von (11)

$$\overline{V} - \frac{\partial U}{\partial x} * \overline{V} = \alpha \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Das ist eine Volterräsche Integralgleichung zweiter Art, ihre Lösung ist:

$$\overline{V} = \left(\delta - \frac{\partial U}{\partial x}\right)^{-1} * \left[\alpha \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x}\right].$$

Wenn wir den lösenden Kern von $\frac{\partial U}{\partial x}$ mit L bezeichnen, so erhalten wir für $\overline{V}$ die formel

$$\overline{V} = \alpha \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x} + \alpha L * \frac{\partial U}{\partial x} - L * \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Der Operator, der die Funktion V in $\overline{V}$ überführt (falls $\overline{V}$ überhaupt eine Funktion ist) ist ein Integrodifferentialoperator. Das gibt einen Anlaß, die Idee des symbolischen Rechnens für etwas verwickelte Integrodifferentialgleichung

$$\overline{V} + \lambda V = \Phi$$

zu lösen. λ ist eine gegebene Konstante, und wir suchen eine solche Lösungsfunktion, welche mit Φ vertauschbar ist und der Bedingung $V(x, x) = \alpha$ genügt.

Aus des Definition von V ergibt sich:

$$V * U_{-1} - \alpha\delta + \lambda V = \Phi$$

oder

$$(\delta * U_{-1} + \lambda\delta) * V = \Phi + \alpha\delta$$

und daraus folgt, daß

$$V = (\Phi + \alpha\delta) * (\delta * U_{-1} + \lambda\delta)^{-1} = \Phi * (\delta * U_{-1} + \lambda\delta)^{-1} + \alpha\delta * (\delta * U_{-1} + \lambda\delta)^{-1} =$$
$$= \Phi * \delta * (\delta * U_{-1} + \lambda\delta)^{-1} + \alpha\delta * (\delta * U_{-1} + \lambda\delta)^{-1} \text{ ist.}$$

Wegen der Linearität der Ähnlichkeitstransformation ist

$$\delta * (\delta * U_{-1} + \lambda\delta)^{-1} = P[\delta * (\delta * h_{-1} + \lambda\delta)^{-1}] = P(e^{-\lambda t})$$

(siehe [4], § 24. (24. 1)), wir gewinnen also die Lösung

$$V = P(\varphi) * P(e^{-\lambda t}) + \alpha P(e^{-\alpha t}) = P(\varphi * e^{-\lambda t} + \alpha e^{-\lambda t}).$$

Wenn wir den Kern derjenigen Ähnlichkeitstransformation welche der Einheitsfunktion U zuordnet mit K bezeichnen, so haben wir

$$V(x, y) = (\delta - K) * (\varphi * e^{-\lambda t} + \alpha e^{-\lambda t}) * (\delta + R),$$

mit

$$\varphi = (\delta + R) * \Phi * (\delta - K).$$

7. Es ist auch von großem Interesse im allgemeinen solche Funktionen zu betrachen, welche zwei Operatorenkörper aufeinander abbilden. Mittels des Begriffes der Konvergenz in $\mathfrak{R}_n$ kann man die Stetigkeit und Differenzierbarkeit solcher Abbildungen definiren, und die Diskussion solcher Abbildungen führt auf interessante Resultate. Auf diese Fragen werden wir in einer späteren Arbeit zurückkehren.

Literatur.

[1] St. Fenyő, Über den Zusammenhang zwischen den Mikusińskischen Operatoren und den Distributionen, *Math. Nachr.*

[2] I. Fenyő, A Mikusiński-féle operátorfogalom és a disztribució fogalma közti kapcsolatról (Über den Zusammenhang zwischen den Mikusińskischen Operatoren und den Distributionen), *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **8** (1958), 385—392 (ungarisch).

[3] J. Korevaar, Distributions defined from the point of view of applied mathematics, *Indag. Math.* **17** (1955), 368—378.

[4] J. Mikusiński, Операторное исчисление, Москва, 1956.

[5] J. Mikusiński, Le calcul opérationnel d'intervalle fini, *Studia Math.* **15** (1956), 225—251.

[6] E. C. Titchmarsch, The zeros of certain integral-functions, *Proc. London Math. Soc.* **25** (1926), 283—302.

[7] E. Vessiot, Sur les fonctions permutables et les groupes continus de transformations fonctionelles linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris* **154** (1912), 682.

[8] V. Volterra, Sopra le funzioni permutabili, *Atti R. Accad. Lincei* II (1910), 520—527.

[9] V. Volterra, Leçons sur les fonctions de lignes, Paris, 1913.

[10] L. A. Sachnovich (Л. А. Сахнович), Спектальнй анализ операторов вида $Kf = \int_0^x f(t) K(x-t)\, dt$ Избезтия Акад. Наук СССР. Сер. Мат. 22 (1958), 299—308.

(Eingegangen am 31. Januar 1958.)