Über eine allgemeine Erweiterung von Gruppen. I.

Von J. SZÉP (Szeged).

In der Gruppentheorie sind bisher zwei Erweiterungstheorien ausgearbeitet worden, deren Bedeutung durch mehrere wichtige Gruppenklassen belegt ist. Die eine ist die Schreiersche Theorie[1]), die andere die Theorie der faktorisierbaren Gruppen. Letztere behandelt folgendes Problem: von zwei gegebenen Gruppen A und B ausgehend, soll man sämtliche Gruppen

$$G = A'B'$$

mit $A' \approx A$, $B' \approx B$ gewinnen.

Mit Hilfe dieser beiden Erweiterungsmethoden kann jedoch nicht jede Gruppe gewonnen werden. Der Problemstellung der Schreierschen Methode entsprechend ergeben sich durch diese nur Gruppen mit Normalteilern. Auch kann man zeigen (ITÔ [15]), daß es bereits unter den endlichen Gruppen solche gibt, die keine Faktorisation zulassen, also nicht faktorisierbare Gruppen sind.

In der vorliegenden Arbeit behandeln wir eine Methode der Gruppenerweiterung, die eine Verallgemeinerung der Schreierschen Methode und der Theorie der faktorisierbaren Gruppen bildet. Durch diese neue Erweiterung läßt sich jede Gruppe darstellen.

Hier erwähnen wir, daß man auch aus dem Rédeischen schiefen Produkt [27] sowohl die Schreiersche als auch die Zappasche Erweiterung (der Fall $G = A'B'$, $A' \cap B' = 1$) herleiten kann. Ungeklärt ist, ob das schiefe Produkt auch Fälle liefert, die nicht auf die vorigen zwei zurückführbar sind [19], [31].

Es sei A eine beliebige Gruppe mit den Elementen $e, a, b, c, \ldots$ und Γ eine Menge von Symbolen $\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma, \ldots,$ wobei das Symbol ε mit dem Einselement e von A als identisch angesehen wird (dementsprechend werden wir statt ε immer e schreiben.)

---

[1]) Da die Schreiersche Theorie und das Schrifttum derselben allgemein bekannt sind, werden am Ende dieser Arbeit nur für die Theorie der faktorisierbaren Gruppen ausführliche Literaturangaben mitgeteilt.

Das Erweiterungsproblem. Es soll in der aus formalen Produkten bestehenden Elementenmenge $S = A\Gamma = (\ldots, a\alpha, \ldots)$ die Multiplikation derart definiert werden (die Multiplikation der Elemente $e, a, b, c, \ldots$ soll mit derjenigen in A identisch sein, also verstehen wir unter dem formalen Produkt ae natürlicherweise das Element a), daß S zu einer Gruppe G wird, für die die Zerlegung in Nebenklassen

$$G = A + A\alpha + A\beta + A\gamma + \cdots \tag{1}$$

gilt, d. h. Γ ein rechtsseitiges Representantensystem von A ist.

Zwecks Lösung unseres Erweiterungsproblems führen wir die folgenden (eindeutigen) Funktionen ein

$$\alpha^a, \alpha^\beta \; (\in \Gamma); \quad {}^{\alpha}a, {}^{\alpha}\beta \; (\in A) \tag{2}$$

mit den folgenden „Anfangsbedingungen“

$$\alpha^e = \alpha \tag{3}$$

$$\alpha^\beta = \beta \Longrightarrow \alpha = e \tag{4}$$

(5) Für jedes α gibt es ein und nur ein β mit $\beta^\alpha = e$.

Weitere formale Produkte $\alpha a, \alpha\beta$ definieren wir dann folgendermaßen:

$$\alpha a = {}^{\alpha}a\,\alpha^a, \quad \alpha\beta = {}^{\alpha}\beta\,\alpha^\beta. \tag{6}$$

Es seien noch folgende Relationen gültig:

$$(a\alpha)(b\beta) = (a(\alpha b))\beta = a((\alpha b)\beta) \tag{7}$$

$$e\alpha = \alpha \tag{8}$$

$$a\alpha = b\beta \Longleftrightarrow a = \beta, \alpha = \beta. \tag{9}$$

Satz 1. *Eine den Bedingungen* (3)—(9) *genüge leistende Menge ist dann* und nur *dann eine Gruppe, falls für die eingeführten Funktionen auch noch folgende Bedingungen gültig sind:*

$${}^{\alpha}(ab) = {}^{\alpha}a\;{}^{\alpha^a}b \tag{10}$$

$$(\alpha^a)^b = \alpha^{ab} \tag{11}$$

$$(\alpha^\beta)^a = (\alpha^{{}^{\beta}a})^{\beta^a} \tag{12}$$

$${}^{\alpha}\beta\;{}^{\alpha^\beta}a = {}^{\alpha}({}^{\beta}a)\;{}^{(\alpha^{{}^{\beta}a})}(\beta^a) \tag{13}$$

$$(\alpha^\beta)^\gamma = (\alpha^{{}^{\beta}\gamma})^{\beta^\gamma} \tag{14}$$

$${}^{\alpha}\beta\;{}^{\alpha^\beta}\gamma = {}^{\alpha}({}^{\beta}\gamma)\;{}^{(\alpha^{{}^{\beta}\gamma})}(\beta^\gamma) \tag{15}$$

BEWEIS. Zuerst beweisen wir die Behauptung „dann“ des Satzes.

Aus (10) folgt ${}^{\alpha}e=e$, falls wir dort $a=e$ setzen, und die Bedingung (3) berücksichtigen. Mit Verwendung von (3), (6) und (8) gewinnen wir

$$\alpha e={}^{\alpha}e\alpha^{e}={}^{\alpha}e\alpha=e\alpha=\alpha. \tag{16}$$

Jetzt zeigen wir, daß S eine multiplikative Struktur mit Einselement ist.

Aus (7) ergibt sich $a(b\beta)=(ab)\beta$ bzw. $(a\alpha)\beta=a(\alpha\beta)$, falls wir dort $\alpha=e$ bzw. $b=e$ setzen. S ist multiplikativ; auf Grund von (6) und (7) (und dem Gesagten) gilt nämlich

$$\begin{aligned}(a\alpha)(b\beta)&=(a(\alpha b))\beta=(a({}^{\alpha}b\,\alpha^{b}))\beta=((a\,{}^{\alpha}b)\alpha^{b})\beta=\\&=(a\,{}^{\alpha}b)(\alpha^{b}\beta)=(a\,{}^{\alpha}b)({}^{\alpha^{b}}\beta(\alpha^{b})^{\beta})=\\&=(a\,{}^{\alpha}b\,{}^{\alpha^{b}}\beta)(\alpha^{b})^{\beta}\qquad(a\,{}^{\alpha}b\,{}^{\alpha^{b}}\beta\in A;\ (\alpha^{b})^{\beta}\in\Gamma).\end{aligned}$$

Das Produkt zweier beliebiger Elemente von S hat also wieder die Form $a\alpha$, so daß S tatsächlich multiplikativ ist. Anderseits hat S das Element e als Einselement, da auf Grund (7) und (16)

$$\begin{aligned}(a\alpha)e&=a(\alpha e)=a\alpha\\e(a\alpha)&=(ea)\alpha=a\alpha\end{aligned}$$

Jetzt zeigen wir, daß S assoziativ ist. Mit Hilfe von (6) und (7) erhalten wir

$$\begin{aligned}(a\alpha b\beta)c\gamma&=(a\,{}^{\alpha}b\alpha^{b}\beta)c\gamma=(a\,{}^{\alpha}b\,{}^{\alpha^{b}}\beta(\alpha^{b})^{\beta})c\gamma=\\&=(a\,{}^{\alpha}b\,{}^{\alpha^{b}}\beta)(((\alpha^{b})^{\beta}c)\gamma=(a\,{}^{\alpha}b\,{}^{\alpha^{b}}\beta\,{}^{(\alpha^{b})^{\beta}}c)((\alpha^{b})^{\beta})^{c}\gamma=\\&=a\,{}^{\alpha}b\,{}^{\alpha^{b}}\beta\,{}^{(\alpha^{b})^{\beta}}c\,{}^{((\alpha^{b})^{\beta})^{c}}\gamma\,(((\alpha^{b})^{\beta})^{c})^{\gamma}.\end{aligned} \tag{17}$$

Andererseits haben wir, wieder auf Grund von (6) und (7),

$$\begin{aligned}a\alpha(b\beta c\gamma)&=a\alpha(b\,{}^{\beta}c\beta^{c}\gamma)=a\alpha(b\,{}^{\beta}c\,{}^{\beta^{c}}\gamma(\beta^{c})^{\gamma})=\\&=a\,{}^{\alpha}(b\,{}^{\beta}c\,{}^{\beta^{c}}\gamma)\alpha^{(b\beta_{c}\,\beta^{c}\gamma)}(\beta^{c})^{\gamma}=\\&=a\,{}^{\alpha}(b\,{}^{\beta}c\,{}^{\beta^{c}}\gamma)\,{}^{\alpha^{(b\beta_{c}\,\beta^{c}\gamma)}}((\beta^{c})^{\gamma})(\alpha^{(b\beta_{c}\,\beta^{c}\gamma)})^{(\beta^{c})^{\gamma}}.\end{aligned} \tag{18}$$

Nach (9) müssen die folgende Gleichungen bestehen

$${}^{\alpha}b\,{}^{\alpha^{b}}\beta\,{}^{(\alpha^{b})^{\beta}}c\,{}^{((\alpha^{b})^{\beta})^{c}}\gamma={}^{\alpha}(b\,{}^{\beta}c\,{}^{\beta^{c}}\gamma)\,{}^{\alpha^{(b\beta_{c}\,\beta^{c}\gamma)}}((\beta^{c})^{\gamma}) \tag{19}$$

und

$$(((\alpha^{b})^{\beta})^{c})^{\gamma}=(\alpha^{(b\beta_{c}\,\beta^{c}\gamma)})^{(\beta^{c})^{\gamma}} \tag{20}$$

woraus dann die Assoziativität von S folgen wird.

Zuerst beweisen wir (19). Indem wir der Reihe nach (10), (11), (15), (10), (13), (11) und (12) verwenden, erhalten wir

$$\begin{aligned} &{}^{\alpha}(b\,{}^{\beta}c\,{}^{\beta^c}\gamma)\,{}^{\alpha^{(b\,{}^{\beta}c\,{}^{\beta^c}\gamma)}}((\beta^c)^{\gamma}) = {}^{\alpha}(b\,{}^{\beta}c)\,{}^{\alpha^{(b\,{}^{\beta}c)}}({}^{\beta^c}\gamma)\,{}^{\alpha^{(b\,{}^{\beta}c\,{}^{(\beta^c)}\gamma)}}((\beta^c)^{\gamma}) = \\ &= {}^{\alpha}(b\,{}^{\beta}c)\,{}^{\alpha^{(b\,{}^{\beta}c)}}({}^{\beta^c}\gamma)\,{}^{(\alpha^{(b\,{}^{\beta}c)})^{{}^{(\beta^c)}\gamma}}((\beta^c)^{\gamma}) = {}^{\alpha}(b\,{}^{\beta}c)\,{}^{\alpha^{(b\,{}^{\beta}c)}}(\beta^c)\,{}^{(\alpha^{(b\,{}^{\beta}c)})^{\beta^c}}\gamma = \\ &= {}^{\alpha}b\,{}^{\alpha^b}({}^{\beta}c)\,{}^{\alpha^{(b\,{}^{\beta}c)}}(\beta^c)\,{}^{(\alpha^{b\,{}^{\beta}c})^{\beta^c}}\gamma = {}^{\alpha}b\,{}^{\alpha^b}\beta\,{}^{(\alpha^b)^{\beta}}c\,{}^{(\alpha^{b\,{}^{\beta}c})^{\beta^c}}\gamma = \\ &= {}^{\alpha}b\,{}^{(\alpha^b)}\beta\,{}^{(\alpha^b)^{\beta}}c\,{}^{((\alpha^b)^{{}^{\beta}c})^{\beta^c}}\gamma = {}^{\alpha}b\,{}^{\alpha^b}\beta\,{}^{(\alpha^b)^{\beta}}c\,{}^{((\alpha^b)^{\beta})^c}\gamma. \end{aligned}$$

Jetzt beweisen wir (20). Indem wir der Reihe nach (11), (14) und (12) anwenden, erhalten wir

$$(\alpha^{b\,{}^{\beta}c\,{}^{\beta^c}\gamma})^{(\beta^c)^{\gamma}} = ((\alpha^{b\,{}^{\beta}c})^{\beta^c})^{\gamma} = (((\alpha^b)^{\beta})^c)^{\gamma}.$$

Damit haben wir die Assoziativität von S gezeigt.

Um einen Nachweis der Gruppeneigenschaft von S zu erbringen, müssen wir noch zeigen, daß in S jedes Element ein und nur ein Inverses besitzt. Hierbei genügt es zu zeigen, daß es zu jedem Element von Γ ein Inverses gibt. Für $\alpha(b\beta) = (b\beta)\alpha = e$ gilt nämlich auch $(a\alpha)(b\beta a^{-1}) = a(\alpha b\beta)a^{-1} = e = (b\beta)(a^{-1}a)\alpha = (b\beta a^{-1})a\alpha$.

Dementsprechend zeigen wir jetzt, daß es zu jedem α ein und nur ein Element $b\beta$ gibt, für welches

$$(b\beta)\alpha = \alpha(b\beta) = e$$

gilt.

Zum Bestehen der Relationen $(b\beta)\alpha = (b\,{}^{\beta}\alpha)\beta^{\alpha} = e$ ist nämlich das Bestehen der Gleichungen

$$b\,{}^{\beta}\alpha = e \tag{21}$$

$$\beta^{\alpha} = e \tag{22}$$

notwendig und hinreichend. Gemäß (5) wird β durch (22) eindeutig bestimmt. Wegen ${}^{\beta}\alpha \in A$ wird b durch (21) eindeutig bestimmt. Somit lässt sich das Linksinverse von α eindeutig bestimmen. Wir zeigen, daß $b\beta$ zugleich auch Rechtsinverses ist. Es sei nämlich

$$\alpha(b\beta) = g\gamma$$

dann ist $(g\gamma)^2 = \alpha(b\beta)\alpha(b\beta) = \alpha((b\beta)\alpha)b\beta = \alpha e(b\beta) = g\gamma$, weiterhin

$$(g\gamma)^2 = (g\gamma)(g\gamma) = g\,{}^{\gamma}g\,\gamma^{g}\gamma = g\,{}^{\gamma}g\,{}^{\gamma^g}\gamma(\gamma^g)^{\gamma} = g\gamma.$$

Darum gilt wegen (9)

$$g\,{}^{\gamma}g\,{}^{\gamma^g}\gamma = g \quad \text{d. h.} \quad {}^{\gamma}g\,{}^{\gamma^g}\gamma = e \tag{23}$$

sowie

$$(\gamma^g)^\gamma = \gamma. \tag{24}$$

Wegen (4) folgt aus (24) $\gamma^g = e$, und daraus mit Rücksicht auf (23) ${}^\gamma g\, {}^e\gamma = e$. Da $e\gamma = {}^e\gamma e^\gamma$ ist, haben wir kraft (9) ${}^e\gamma = e$, $e^\gamma = \gamma$, und unter Zuhilfenahme dieses Ergebnisses ${}^\gamma g = e$. Wir werden zeigen, daß $g = \gamma = e$ ist. Wegen $\gamma^g = {}^\gamma g = e$ ergibt sich nach (10) (durch Setzen von $a = g$, $\alpha = \gamma$, $b = c$) ${}^\gamma(gc) = {}^e c$. Da $ce = ec = {}^e c e^e$ ist, gilt nach (9) ${}^e c = c$. Somit besteht $c = {}^\gamma(gc)$ für jedes c. Es sei $c = g^{-1}$. Dann ist $g^{-1} = {}^\gamma e (= e)$ und folglich $g = e$. Daraus ergibt sich $\gamma^e = e$ (wegen $\gamma^g = e$), und sodann aus (4) $\gamma = e$, womit wir unsere Behauptung bewiesen haben.

Wir haben jetzt noch die Behauptung „nur dann" des Satzes zu beweisen.

Es sei A eine Untergruppe der Gruppe G, für welche

$$G = A + A\alpha + A\beta + \cdots$$

gilt. Sodann sei Γ $(= e, \alpha, \beta, \ldots)$ das betrachtete Representantensystem. Für zwei beliebige Elemente η, a gilt

$$\eta a = a'\eta' \qquad (\eta, \eta' \in \Gamma;\ a, a' \in A)$$

Da die Elemente η' und a' durch η und a eindeutig bestimmt werden, können wir

$$\eta a = {}^\eta a \eta^a$$

mit ${}^\eta a = a'$, $\eta^a = \eta'$ setzen. Entsprechend schreibt man

$$\eta\varrho = {}^\eta\varrho\, \eta^\varrho \qquad ({}^\eta\varrho \in A,\ \eta^\varrho \in \Gamma;\ \varrho \in \Gamma)$$

Für die somit eingeführten Funktionen gelten offenbar (3), (4) und (5). In G sind (7), (8) und (9) trivialerweise erfüllt. Wir müssen zeigen, daß die Relationen (10)—(15) erfüllt sind. Zu diesem Zweck berücksichtigen wir die in G bestehenden Relationen

$$(\alpha a)b = \alpha(ab) \tag{25}$$

$$(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a) \tag{26}$$

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma). \tag{27}$$

Unter Anwendung von (25) ergibt sich

$$(\alpha a)b = ({}^\alpha a \alpha^a)b = {}^\alpha a\, {}^{\alpha^a} b\, (\alpha^a)^b$$
$$\alpha(ab) = {}^\alpha(ab)\alpha^{ab}$$

woraus man (10) und (11) entnimmt;

unter Anwendung von (26) hat man

$$(\alpha\beta)a = ({}^\alpha\beta\alpha^\beta)a = ({}^\alpha\beta\, {}^{\alpha^\beta} a)\,(\alpha^\beta)^a$$
$$\alpha(\beta a) = \alpha({}^\beta a \beta^a) = {}^\alpha({}^\beta a)\alpha^{{}^\beta a} = {}^\alpha({}^\beta a)\, {}^{\alpha^{{}^\beta a}}(\beta^a)\,(\alpha^{{}^\beta a})^{\beta^a}$$

und, wie daraus ersichtlich, (12) und (13);

endlich ergibt sich mit Hilfe von (27)

$$(\alpha\beta)\gamma = ({}^{\alpha}\beta\alpha^{\beta})\gamma = {}^{\alpha}\beta\,{}^{\alpha^{\beta}}\gamma\,(\alpha^{\beta})^{\gamma}$$
$$\alpha(\beta\gamma) = \alpha({}^{\beta}\gamma\beta^{\gamma}) = {}^{\alpha}({}^{\beta}\gamma)\alpha^{{}^{\beta}\gamma}\beta^{\gamma} = {}^{\alpha}({}^{\beta}\gamma)^{\alpha^{{}^{\beta}\gamma}}(\beta^{\gamma})\,(\alpha^{{}^{\beta}\gamma})^{\beta^{\gamma}},$$

und daraus entnimmt man (14) und (15).

Damit haben wir Satz 1 bewiesen und folglich auch unser Erweiterungsproblem gelöst.

Satz 2. *In der Gruppe* $G = A\Gamma (= A + A\alpha + A\beta + \cdots)$ *ist* Γ *dann und nur dann ein beiderseitiges Representantensystem, falls zu jedem* α *ein und nur ein* β *existiert derart, daß* $\alpha^{\beta} = e$ *gilt.*

Zum Beweis des Satzes schicken wir zwei Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 1. *Existiert zu jedem* α *ein und nur ein* β *so, daß* $\alpha^{\beta} = e$ *gilt, so folgt aus* ${}^{\beta}a = e$ *immer* $a = e$.

Beweis. Es sei ${}^{\beta}a = e$. Nach (5) existiert zu β ein Element α mit $\alpha^{\beta} = e$. Nach (12) gilt $e = \alpha^{(\beta^{a})} (= \alpha^{\beta})$. Aus der Voraussetzung des Hilfssatzes folgt $\beta^{a} = \beta$. Mit Anwendung (13) gilt ${}^{\alpha}\beta a = {}^{\alpha}\beta$, woraus $a = e$ folgt.

Hilfssatz 2. *Es sei* $G = A\Gamma (= A + A\alpha + A\beta + \cdots)$ *eine Zerlegung von* G *nach* A. *Die Komplexe* $A, \alpha A, \beta A, \ldots$ *sind dann und nur dann paarweise fremd, falls aus* ${}^{\alpha}a = e$ *immer* $a = e$ *folgt.*[2]

Beweis. Um die Behauptung „dann" des Hilfssatzes zu beweisen, hat man nur zu zeigen, daß aus $\alpha a = \beta b$ immer $\alpha = \beta$, $a = b$ folgt. Ist nämlich $\alpha a = \beta b$, dann ist $\alpha = \beta(ba^{-1}) = {}^{\beta}(ba^{-1})\beta^{ba^{-1}}$ und folglich wegen (9) ${}^{\beta}(ba^{-1}) = e$ und $\beta^{ba^{-1}} = \alpha$. Der Voraussetzung gemäss folgt daraus $ba^{-1} = e$ und daraus wiederum $\alpha = \beta$.

Die Behauptung „nur dann" folgt einfach aus $\alpha a = {}^{\alpha}a\alpha^{a} = \alpha^{a} (\in \Gamma)$.

Beweis des Satzes 2. Zuerst beweisen wir die Behauptung „dann" des Satzes. Nach den Hilfssätzen 1, 2 sind die Komplexe $A, \alpha A, \beta A, \ldots$ paarweise fremd, falls die Bedingung des Satzes erfüllt ist. Betrachten wir den Komplex $\Omega = A + A\alpha^{-1} + A\beta^{-1} + \cdots$. Wir werden zeigen, daß $\Omega = G$ gilt, woraus die Behauptung folgt. Wir beweisen, daß man jedes Element $a\varrho$ $(a \in A,\ \varrho \in \Gamma)$ von G auch in der Form $a'\eta^{-1}$ $(a' \in A,\ \eta \in \Gamma)$ schreiben kann, das heißt es gilt $a\varrho \in \Omega$. Dazu genügtes zu zeigen, daß es zu jedem $\varrho (\in \Gamma)$ ein Element $\eta (\in \Gamma)$ mit $\varrho\eta \in A$ gibt. Es sei η ein Element mit $\varrho^{\eta} = e$. In diesem Fall ist $\varrho\eta = {}^{\varrho}\eta\varrho^{\eta} = {}^{\varrho}\eta \in A$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Die Behauptung „nur dann" des Satzes sieht man folgendermaßen ein. Es sei Γ ein beiderseitiges Representantensystem von A. In diesem Fall kann

[2] Ist G eine endliche Gruppe, so folgt schon aus dem Hilfssatz 2, daß Γ neben der Bedingung des Hilfssatzes zweiseitiges Representantensystem ist.

man jedes Element $a\varrho$ von G in der Form $a'\eta^{-1}$ schreiben, woraus $\varrho\eta\in A$ folgt. Aus $\varrho\eta={}^{\varrho}\eta\varrho^{\eta}\in A$ folgt $\varrho^{\eta}=e$. Somit ist der Satz bewiesen.

BEMERKUNG. Beschränken wir uns auf denjenigen Spezialfall unseres Erweiterungsproblems, wo Γ ein zweiseitiges Representantensystem ist, so ermöglicht dies bereits die Darstellung aller solcher Gruppen, welche Untergruppen von endlichem Index enthalten. Ist nämlich A eine Untergruppe von G, welche in G einen endlichen Index hat, dann gibt es in G bekanntlich ein zweiseitiges Representantensystem von A (ZASSENHAUS, Lehrbuch der Gruppentheorie, 1937, S. 11, Satz 3.). Insbesondere gehören alle endlichen Gruppen hierher.

Satz 3. *Der Normalteiler A' von A ist dann und nur dann Normalteiler in G, falls für jedes $a'\in A'$ und jedes $\alpha\in\Gamma$*

$$\alpha^{a'}=\alpha \tag{28}$$

gilt.

BEWEIS. A' ist dann und nur dann Normalteiler in G, falls für jedes $a'\in A'$ und jedes $\alpha\in\Gamma$ die Relation

$$a''\alpha=\alpha a'$$

mit $a''\in A'$ besteht. Dann ist aber

$$\alpha a'={}^{\alpha}a'\alpha^{a'}=a''\alpha$$

woraus man die Behauptung des Satzes entnimmt.

Ist insbesondere A Normalteiler in G, so sieht man auf Grund von (28), daß von den definierenden Relationen (10)—(15) der Gruppe G (11) und (12) trivialerweise erfüllt sind, während die übrigen Relationen sich folgendermaßen gestalten:

$$ {}^{\alpha}a\,{}^{\alpha}b={}^{\alpha}(ab) \tag{29}$$

$$ {}^{\alpha}\beta\,{}^{\alpha^{\beta}}a={}^{\alpha}({}^{\beta}a)\,{}^{\alpha}\beta \tag{30}$$

$$ (\alpha^{\beta})^{\gamma}=\alpha^{\beta^{\gamma}} \tag{31}$$

$$ {}^{\alpha}\beta\,{}^{\alpha^{\beta}}\gamma={}^{\alpha}({}^{\beta}\gamma)\,{}^{\alpha}(\beta^{\gamma}) \tag{32}$$

BEMERKUNG. 1. Die Relationen (29—(32) für sich sind mit den Schreierschen Relationen nicht äquivalent. Man gelangt jedoch zu einer solchen Äquivalenz, indem man berücksichtigt, daß die Kenntnis der Faktorgruppe G/A bei der Schreierschen Erweiterung in unserem Falle die Kenntnis der Funktionen α^{β} bedeutet. Die Relationen (29)—(32) definieren z. B. im Fall der endlichen Gruppen sämtliche Gruppen G (mit derselben Ordnung), die die Untergruppe A als Normalteiler enthalten.[3])

[3]) Zu diesem Problem s. noch den zweiten Teil dieser Arbeit.

Bemerkung. 2. Man sieht leicht ein, daß G dann und nur dann eine Abelsche Gruppe ist, falls A Abelsch ist und die Relationen ${}^{\alpha}a = a$, $\alpha^{a} = \alpha$, ${}^{\alpha}\beta = {}^{\beta}\alpha$, $\alpha^{\beta} = \beta^{\alpha}$ bestehen. Dann sind (10)—(13) trivialweise erfüllt, und (14) und (15) reduzieren sich auf

$$(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta\gamma} \tag{33}$$

bzw. auf

$${}^{\alpha}\beta\, {}^{\alpha^{\beta}}\gamma = {}^{\beta}\gamma\, {}^{\alpha}(\beta^{\gamma}). \tag{34}$$

Satz 4. *Die durch die Elemente von Γ erzeugte Gruppe $\{\Gamma\}$ ist dann und nur dann eine echte Untergruppe von G, falls G eine Untergruppe $A' \subset A$ besitzt derart, daß für beliebige α, β und für $a' \in A'$ immer*

$${}^{\alpha}\beta \in A' \quad \textit{und} \quad {}^{\alpha}a' \in A' \tag{35}$$

gilt.

Beweis. Es sei $\{\Gamma\} \cap A = A' (\neq A)$, dann ist offenbar

$$\{\Gamma\} = A'\Gamma$$

so daß einerseits aus $\alpha\beta = {}^{\alpha}\beta\alpha^{\beta}$ ${}^{\alpha}\beta \in A'$ folgt, andererseits aber wegen $a\gamma a'\gamma' = a\, {}^{\gamma}a'\gamma^{a'}\gamma' = a\, {}^{\gamma}a'\, {}^{\gamma^{a'}}\gamma' (\gamma^{a'})^{\gamma'}$ $(a, a' \in A';\ \gamma' \in \Gamma)$ $a\, {}^{\gamma}a'\, {}^{\gamma^{a'}}\gamma' \in A'$ ist, so daß mit Rücksicht auf $a, {}^{\gamma^{a'}}\gamma' \in A'$ ${}^{\gamma}a' \in A'$ folgt.

Falls nun umgekehrt (35) besteht, so ist $A'\Gamma$ eine Gruppe, da wir mit den hier uns zur Verfügung stehenden Funktionen $\alpha^{a'}, \alpha^{\beta} (\in \Gamma)$; ${}^{\alpha}a', {}^{\alpha}\beta (\in A')$ genau diese Gruppe erhalten.

Die Gruppe G ist in diesem Falle offensichtlich faktorisierbar, und es gilt

$$G = A\{\Gamma\}.$$

Ist insbesondere $\{\Gamma\} = \Gamma$, so ist ${}^{\alpha}\beta = e$ und $\alpha\beta = \alpha^{\beta}$, sodaß in diesem Falle die definierenden Relationen (10)—(15) von G sich folgendermaßen gestalten:

$${}^{\alpha}a\, {}^{\alpha^{a}}b = {}^{\alpha}(ab) \tag{36}$$

$$(\alpha^{a})^{b} = \alpha^{ab} \tag{37}$$

$$(\alpha\beta)^{a} = \alpha^{\beta_a}\beta^{a} \tag{38}$$

$${}^{\alpha\beta}a = {}^{\alpha}({}^{\beta}a) \text{ [4]} \tag{39}$$

(14) und (15) sind jetzt trivialerweise erfüllt, da Γ eine Gruppe ist.

Es sei im folgenden Γ ein zweiseitiges Representantensystem der Gruppe $G = A\Gamma$. Wir betrachten die Gleichung

$$\alpha a = {}^{\alpha}a\alpha^{a}. \tag{40}$$

---

[4]) Die Relationen (36)—(39) werden in den Arbeiten [27], [33], [45] untersucht.

Falls hier α für festbleibendes a die Elemente von Γ durchläuft, so gilt dasselbe auch für α^a. Betrachten wir die Gleichungen

$$(41) \qquad \begin{aligned} \alpha' a &= {}^{\alpha'}a\,\alpha'^a \\ \alpha'' a &= {}^{\alpha''}a\,\alpha''^a. \end{aligned}$$

Der Beweis unserer Behauptung läßt sich in zwei Schritte zerlegen.

a) Wir zeigen, daß für $\alpha' \neq \alpha''$ in (41) auch $\alpha'^a \neq \alpha''^a$ gilt. Anderfalls hat man nämlich

$$\begin{aligned} \alpha' a &= {}^{\alpha'}a\,\alpha'^a \\ \alpha'' a &= {}^{\alpha''}a\,\alpha'^a, \end{aligned}$$

woraus sich $({}^{\alpha'}a)^{-1}\alpha' = ({}^{\alpha''}a)^{-1}\alpha''$, und daraus folgend $\alpha' = \alpha''$ ergibt, was einen Widerspruch bedeutet.

b) Wir zeigen, daß unter den Elementen α^a (wobei α die Elemente von Γ durchläuft) sämtliche Elemente von Γ vorkommen. Setzen wir nämlich voraus, daß β unter den Elementen α^a nicht vorkommt. Dann besteht die Relation

$$\beta a^{-1} = {}^{\beta}(a^{-1})\beta^{(a^{-1})},$$

und daraus ergibt sich $\beta^{(a^{-1})}a = ({}^{\beta}(a^{-1}))^{-1}\beta$, was einen Widerspruch bedeutet. Damit haben wir unsere Behauptung bewiesen.

Wir ordnen dem Element a die (eindeutig bestimmte) Permutation $\pi_a = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^a \end{pmatrix}$ der Elemente von Γ zu. Man sieht sogleich, daß

$$(42) \qquad \pi_{ab} = \pi_b \pi_a$$

ist, es gilt nämlich $\alpha a b = {}^{\alpha}a\alpha^a b = {}^{\alpha}a\,{}^{\alpha^a}b(\alpha^a)^b$ woraus (42) folgt. Die Menge der den Elementen von A auf die oben angeführte Weise zugeordneten Permutationen bezeichnen wir mit π_A. π_A ist offenbar eine Gruppe, und es gilt der Homomorphismus

$$(43) \qquad A \sim \pi_A.$$

Satz 5. *Der Kern des Homomorphismus*

$$A \sim \pi_A$$

ist ein Normalteiler in G.

Beweis. Es sei N der Kern des Homomorphismus. N ist einerseits Normalteiler in A, andererseits gilt aber wegen $\alpha a = {}^{\alpha}a\alpha$ $(a \in N)$ auch $\alpha N \alpha^{-1} \subseteq A$ $(\alpha \in \Gamma)$. Betrachten wir jetzt die Konjugierten von N in G. Es seien dies $N_1, N_2, \ldots$. Die von $N_1, N_2, \ldots$ erzeugte Gruppe $\bar{N}$ $(\subseteq A)$ ist ein Normalteiler in G. Da für jedes Element $\bar{b}$ von $\bar{N}$

$$\alpha \bar{b} = \bar{b}' \alpha \qquad (\bar{b}' \in \bar{N})$$

d. h. $\pi_{\bar{b}} = \pi_e$ gilt, folgt $\bar{N} = N$.

Man sieht leicht ein, daß N maximalen in A enthaltener Normalteiler von G ist.

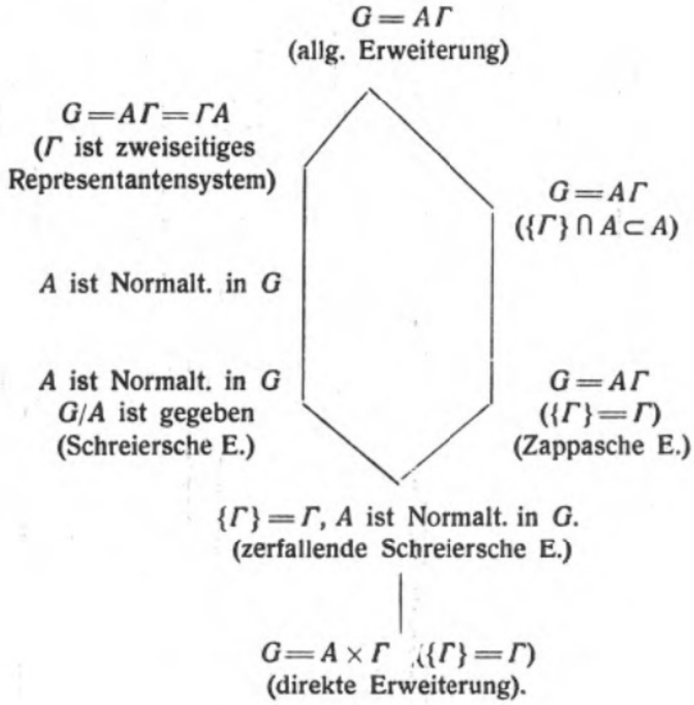
Bemerkung 1. Aus Satz 5. lassen sich mehrere, in früheren Arbeiten teilweise auf anderen Wege gewonnene Sätze mühelos herleiten. Z. B. [27], [32], [33].

Bemerkung 2. Wir betrachten die Gleichung

$$xa = a'\alpha' \qquad (x \in G;\ a, a' \in A;\ \alpha' \in \Gamma)$$

Falls hier a bei festbleibendem x die Elemente von A durchläuft, so gilt dasselbe auch für a' (um dies einzusehen kann man ebenso wie im obigen Falle verfahren, indem man die offenbare Tatsache berücksichtigt, daß, falls $\Gamma(=e, \alpha, \beta, \ldots)$ ein zweiseitiges Representantensystem von A ist, dasselbe auch für $\Gamma^{-1}(=e, \alpha^{-1}, \beta^{-1}, \ldots)$ gilt). Dann läßt sich jedem Element x von G die Permutation $\pi_x = \begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}$ eindeutig zuordnen. Offenbar gilt $\pi_e = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$. Diese Permutationen bilden aber, mindestens für die übliche Multiplikation von Permutationen, im allgemeinen keine Gruppe.

Zu unseren Erweiterungen nehmen wir noch die zerfallende Schreiersche Erweiterung und die Direkte Erweiterung zu (diese kann man z. B. aus (36)—(39) leicht herleiten), so können wir die entstandene wichtigere Erweiterungen folgendermaßen überblicken:



Bemerkung bei der Korrektur. Mittlerweile ist eine Arbeit von C. M. Tibiletti erschienen (Una scomposizione del prodotto sghembo di Rédei, *Collectanea Math. Milano* N. **167**, (1958). 1—15), wo das am Anfang unserer Arbeit erwähnte, auf das Rédeische schiefe Produkt bezügliche Problem entschieden ist. Das Rédeische schiefe Produkt läßt sich auch im allgemeinsten Fall mit zwei Schreierschen Erweiterungen und mit zwei vertauschbaren Gruppen herstellen.

Literatur.

[1] R. Baer, The cohomology theory of a pair of groups, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass., 1950*, **2** (1952), 15—20.

[2] R. Baer, Factorisation of n-soluble and n-nilpotent groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* **4** (1953), 15—26.

[3] N. Blackburn, Über das Produkt von zwei zyklischen 2-Gruppen, *Math. Z.* **68** (1957), 422—427.

[4] G. Casadio, Construzione di gruppi come prodotto di sottogruppi permutabili, *Rend. Math. e Appl.* (V) **2** (1941), 348—360.

[5] P. M. Cohn, A remark on the general produkt ot two infinite cyclic groups, *Arch. Math.* **7** (1956), 94—99.

[6] L. Fuchs, The Zappa extension of partially ordered groups, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.* **55** (1952), 363—368.

[7] L. Fuchs, Rédeian skew produkt of operator groups, *Acta Sci. Math. Szeged* **14** (1952), 228—238.

[8] B. Huppert, Über das Produkt von paarweise vertauschbaren zyklischen Gruppen, *Math. Z.* **58** (1953), 243—264.

[9] B. Huppert, Über die Auflösbarkeit faktorisierbarer Gruppen, *Math. Z.* **59** (1953), 1—7.

[10] B. Huppert, Über Produkte von endlichen Gruppen, *Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin, Math. Nat. Reihe* **3** (1954), 363—364.

[11] B. Huppert - N. Itô, Über die Auflösbarkeit faktorisierbarer Gruppen II, *Math. Z.* **61** (1954), 94—99.

[12] T. Ikuta, On the factorisable groups I, II, *Rep. Liberal Arts Fac. Schizuoka Univ.* No. 5, 6 (1954), 1—4, 1—4.

[13] T. Ikuta, Über die Normalisatoren der Untergruppen von einem Zappaschen Produkt von zwei Gruppen, *Rep. Liberal Arts Fac. Shizuoka Univ.* No. 8 (1955), 7—10.

[14] N. Itô, Remarks on factorisable groups, *Acta Sci. Math. Szeged* **14** (1951), 83—84.

[15] N. Itô, On the factorisations of the linear fractional groups $LF(2, p^n)$, *Acta Sci. Math. Szeged*, **15** (1953), 79—84.

[16] N. Itô, Über das Produkt von zwei Abelschen Gruppen, *Math. Z.* **63** (1955), 400—401.

[17] N. Itô, Über das Produkt von zwei zyklischen 2-Gruppen, *Publ. Math. Debrecen* **4** (1956), 517—520.

[18] N. Itô—A. Ohara, Sur les groups factorisables par deux 2-groupes cycliques I, II, *Proc. Japan Acad.* **32** (1956), 736—740, 741—743.

[19] R. Kochendörffer, Zur Theorie der Rédeischen schiefen Produkte, *J. Reine Angew. Math.* **192** (1953), 96—101.

[20] E. Maillet, Sur les groups échangeables et les groupes decomposables, *Bull. Soc. Math. France.* **28** (1900), 7—16.

[21] G. A. MILLER, Groups which are the products of two permutable proper subgroups, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **21** (1935), 469—472.
[22] B. H. NEUMANN, Decomposition of groups, *J. London Math. Soc.* **10** (1935), 3—6.
[23] A. OHARA, Note on commutator subgroups of factorisable groups, *Proc. Japan Acad.* **31** (1955), 612 - 614.
[24] O. ORE, Structures and group Theory I, II, *Duke Math. J.* **3** (1937), 149—174, (1938), 247—265.
[25] O. ORE, Contributions to the theory of groups of finite order, *Duke Math. J.* **5** (1938), 431—460.
[26] L. RÉDEI, Zur Theorie der faktorisierbaren Gruppen I, *Acta Sci. Math. Hungar.* **1** (1950), 74—98.
[27] L. RÉDEI, Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, *J. Reine Angew. Math.* **188** (1950), 201—228.
[28] L. RÉDEI A. STÖHR, Über ein spezielles schiefes Produkt in der Gruppentheorie, *Acta Sci. Math. Szeged* **15** (1953), 7—11.
[29] L. RÉDEI—J. SZÉP, Die Verallgemeinerung der Theorie des Gruppenproduktes von Zappa-Casadio, *Acta Sci. Math. Szeged* **16** (1955), 165—170.
[30] F. RÜHS, Über ein spezielles Rédeisches schiefes Produkt in der Gruppentheorie, *Acta Sci. Math. Szeged* **16** (1955), 160—164.
[31] F. RÜHS, Über die einfach ausgearteten Rédeischen schiefen Producte, *J. Reine Angew. Math.* **198** (1957), 81—86.
[32] J. SZÉP, Über die als Produkt zweier Untergruppen darstellbaren endlichen Gruppen, *Comment. Math. Helv.* **22** (1949), 31—33.
[33] J. SZÉP, On the structure of groups, which can be represented as the product of two subgroups, *Acta Sci. Math. Szeged* **12** A (1950), 57—61.
[34] J. SZÉP, On factorisable not simple groups, *Acta Sci. Math. Szeged* **13** (1950), 239—241.
[35] J. SZÉP, On factorisable simple groups, *Acta Sci. Math. Szeged* **14** (1952), 22.
[36] J. SZÉP, Zur Theorie der endlichen einfachen Gruppen, *Acta Sci. Math. Szeged* **14** (1952), 111—112.
[37] J. SZÉP, Zur Theorie der einfachen Gruppen, *Acta Sci Math. Szeged* **14** (1952), 246.
[38] J. SZÉP, Zur Theorie der faktorisierbaren Gruppen, *Publ. Math. Debrecen* **2** (1951), 43 45.
[39] J. SZÉP, Véges egyszerű csoportokról, *Comptes Rendus du I Congres des Math. Hongrois* (1951), 461 463.
[40] J. SZÉP, Zur Theorie der faktorisierbaren Gruppen, *Acta Sci. Math. Szeged* **16** (1955), 54—57.
[41] J. SZÉP—N. ITÔ, Über die Faktorisation von Gruppen, *Acta Sci. Math. Szeged* **16** (1955), 229—231.
[42] J. SZÉP—L. RÉDEI, On factorisable groups, *Acta Sci. Math. Szeged* **13** (1950), 235—238.
[43] C. M. TIBILETTI, Sul prodotto di gruppi permutabili, *Ann. Mat. Pura Appl. Ser. IV*, **43** (1957), 341—356.
[44] H. WIELANDT, Über das Produkt paarweise vertauschbarer nilpotenter Gruppen, *Math. Z.* **55** (1951), 1—7.
[45] G. ZAPPA, Sulla construzione dei gruppi di due dati sottogruppi permutabili tra loro, *Atti 2, Congr. Un. Math. Ital.* (1942), 119—125.

(Eingegangen am 18. März 1958.)