Über Kurvenbögen, die gewisse Extrema liefern.

Herrn Professor Béla Gyires zum 50. Geburtstag gewidmet.

Von L. TAMÁSSY (Debrecen).

Einführung.

Wir wollen in dieser Arbeit zwei geometrische Extremumprobieme lösen. Das erste zu untersuchende Problem ist das Folgende: unter den Kurvenbögen die zwei Punkte von zwei sich scheidenden Geraden verbinden, ist derjenige zu bestimmen, dessen maximale Krümmung am kleinsten ausfällt, wenn von den Kurven gefordert wird, daß sie sich an die Geraden tangential verknüpfen, und ihre Krümmungen nicht negativ, stetig, und in den Endpunkten verschwindend sein müssen. Bei dem zweiten Problem tritt die zusätzliche Bedingung der Beschränktheit des Differenzenquotienten der Krümmung hinzu.

Diese zweite Frage ist gleichhzeitig der mathematische Inhalt eines technischen Problems. — Bedeuten die Geraden zwei Strecken einer Eisenbahnlinie, welche wir durch die erwähnten Punkte durch einen Kurvenbogen verbinden wollen, so sind die bei dem letzten Problem aufgezählten Bedingungen eben diejenigen, die man solchen Bögen gevöhnlicherweise auferlegt [1]). Von zwei, diese Bedingungen erfüllenden Bögen ist derjenige der vorteilhaftere, bei welchem der minimale Krümmungsradius größer ist [2]), weil bei diesem eine kleinere Zentrifugalkraft auftritt. So liefert die Lösung des zweiten Problems gleichzeitig den vom erwähnten Gesichtspunkt aus besten Bogen.

Dieses mathematische Problem wurde unter einfacheren Bedingungen schon von A. MOÓR und A. TÖRÖK untersucht [1]. Wir zeigen im 1. §, daß das erste Problem, unter den oben beschriebenen Bedingungen keine Lösung hat. Im 2. § bestimmen wir unter Anwendung der Methode des 1. § die einzige Lösung des zweiten Problems. Diese ist eine solche Kurve, für welche die Graphik der Krümmungs-Funktion ein Trapez ist, wobei die Richtungstangente der steigenden, bzw. der absteigenden Trapezseite die für den Dif-

---

[1]) Siehe [2], insbesondere Seite 317—318 und 334—335.

[2]) Siehe [3], insbesondere Seite 12.

ferenzenquotienten der Krümmung vorgeschriebene obere Grenze, bzw. deren entgegengesetzte ist. Dieser Wert ist in der Praxis eine durch die technischen Bedingungen bestimmte Konstante. Wir bemerken, daß solche Bögen bereits bekannt sind und verwendet werden [3]). So stellt unser Ergebnis auch einen nachträglichen Beweis dafür dar, daß dieser Bogen vom erwähnten Gesichtspunkt aus wirklich der beste ist.

§ 1.

Es sei der Winkel $\sphericalangle 0(a, b) = \alpha$ gegeben, mit den Punkten A und B an seinen Schenkeln, so daß $\overline{0A} \leqq \overline{0B}$ gilt. Es sei A' das Bild von A bei der Spiegelung auf die Winkelhalbierende f. Es sei ferner C der Schnittpunkt

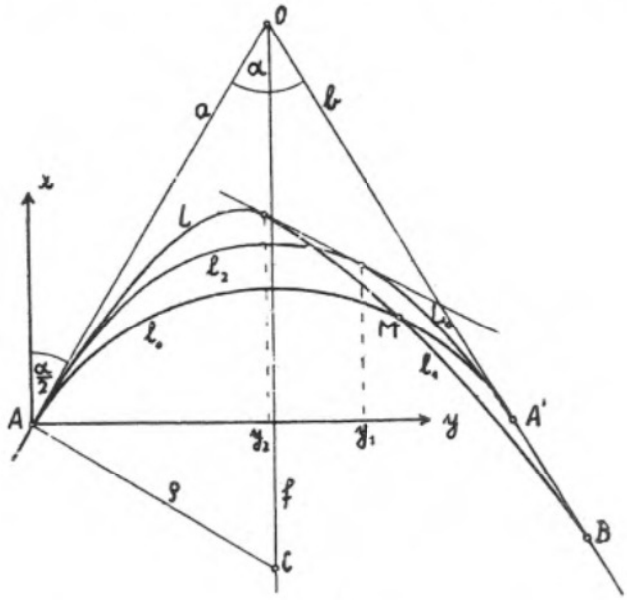

Fig. 1.

der von A auf a gelegten senkrechten Geraden mit f. Es bezeichne endlich A das Origo eines cartesischen Koordinatensystems, dessen y Achse AA' ist. Betrachten wir diejenige Kurvenbögen, die aus dem Dreieck $0AB$ nicht austreten, im Punkt A die Gerade a, im Punkt B die Gerade b berühren, und deren Krümmungen stetig, nicht negativ, und in Punkte A und B zero sind. Diese Kurven sollen zulässige genannt werden.

P r o b l e m 1: Gesucht wird derjenige zulässige Kurvenbogen bei dem das Maximum der Krümmung am kleinsten ausfällt.

[3]) Siehe [2] Seite 347. letzter Absatz. (Klotoid ist die Name der mit linearer Krümmung versehener Kurve.)

Satz 1. *Die maximale Krümmung der zulässigen Kurvenbögen ist größer als* $\frac{1}{\overline{AC}}$, *aber bei beliebigem positiven* ε *gibt es einen zulässigen Kurvenbogen dessen maximale Krümmung nicht größer als* $\frac{1}{\overline{AC}} + \varepsilon$ *ist.*

Im Falle $B = A'$ und ohne der Bedingung des Verschwindens der Krümmung im Punkte A und B, sowie deren Stetigkeit wurde diese Frage schon von A. Moór und A. Török gelöst [1]. Nach ihrem Ergebnis ist die Lösung der mit l_0 bezeichneter Bogen des Kreises mit dem Mittelpunkt C, Radius $\varrho = \overline{AC}$ und Krümmung $\frac{1}{\varrho} = \varkappa_0$. Unser Ergebnis kann auch so formuliert werden, daß der Wert $\varkappa_0$, als Minimum der maximalen Krümmung, in dem hier zugelassenen in gewisser Hinsicht engeren Kurvenklasse, von oben beliebig angenähert, aber nie erreicht werden kann.

Zuerst zeigen wir, daß jede bei dem ersten Problem zugelassene Kurve l größere maximale Krümmung hat als $\varkappa_0$. — Die zulässigen Kurven l liegen in der Nähe des Punktes A zwischen a und l_0 (oder fallen mit a zusammen), weil ihre Krümmung in A gleich Null ist, gegenüber der Krümmung $\varkappa_0 > 0$ von l_0. So wird l_0 von den zulässigen Kurven entweder geschnitten (wie die Kurve l_1 der Abbildung), oder berührt (wie die Kurve l_2 der Abbildung). So erhalten wir in beiden Fällen einen „einfachen Mond" [4]), der im ersten Fall aus den Bögen $\widehat{AM}$ von l_1 und l_0, und im zweiten Fall aus den Bögen $\widehat{AA'}$ von l_2 und l_0 besteht. Aber bei solchen einfachen Monden ist die maximale Krümmung des äußeren Bogens größer als die minimale Krümmung des inneren Bogens [5]). So hat l_1 und l_2 — und folglich auch jeder l — größere maximale Krümmung als $\varkappa_0$.

Wir zeigen, daß es zu beliebig gegebenem positiven ε eine solche zulässige Kurve gibt, für welche das Maximum der Krümmung nicht größer als $\varkappa_0 + \varepsilon$ ausfällt.

Wir betrachten die vom Punkte A den Strahl $\overrightarrow{AO}$ berührend ausgehende Kurvenschar $\varLambda_\sigma$, wo die auf die Bogenlänge s bezogene Krümmung der Kurven

$$(1) \qquad \varkappa_\sigma(s) = \begin{cases} \dfrac{\varkappa_0 + \varepsilon}{\sigma} s & \text{wenn} \quad s < \sigma \\ \varkappa_0 + \varepsilon & \text{wenn} \quad s \geqq \sigma \end{cases} \qquad (\sigma > 0)$$

ist. Der Kreis $\varLambda_0$ mit der Krümmung $\varkappa_0 + \varepsilon$ ist die — gleichsam zu $\sigma = 0$

4) Der einfache Mond besteht aus zwei mit stetigen Tangenten versehenen konvexen Bögen, die nur ihre Endpunkte gemeinsam haben, und auf derselben Seite der die Endpunkte verbindenden Geraden liegen, und deren Totalkrümmungen kleiner als π sind.

5) Siehe im [1] das Lemma 1.

gehörende — Grenzkurve der Schar. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß Λ_0 den f schneidet. Schneidet nämlich Λ_0 den f nicht, so können wir einen solchen kleineren ε wählen, für welchen Λ_0 den f schon schneidet, und wir können die weiteren Überlegungen mit diesem letzteren ε durcführen.

Bezeichnen wir mit K_σ, bzw. mit K_0 diejenige Punkte der Kurve Λ_σ, bzw. Λ_0, für welche die Tangenten mit der y Achse parallel sind. Diese Punkte sind dadurch charakterisierbar, daß für die zu ihnen gehörenden Bogenlängen S_K^σ, bzw. S_K^0

$$\Psi_\sigma(S_K^\sigma) = \Psi_0(S_K^0) = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \tag{2}$$

gilt, wo

$$\Psi_\sigma(s) \equiv \int_0^s \varkappa_\sigma(s)\,ds, \quad \Psi_0(s) \equiv \int_0^s (\varkappa_0 + \varepsilon)\,ds$$

ist. Wir bezeichnen weiter mit R_σ, bzw. mit R_0 die Schnittpunkte der Kurven mit f [6]). Bei den aus dem Punkt A die Achse x berührend ausgehenden Kurven ist, wohlbekannterweise

$$y(s) = \int_0^s \sin \int_0^s \varkappa(s)\,ds\,ds.$$

So sind die Punkte R_σ, bzw. R_0 dadurch charakterisierbar, daß für sie

$$\int^{S_R^\sigma} \sin\left[\frac{\alpha}{2} + \Psi_\sigma(s)\right] ds = \int_0^{S_R^0} \sin\left[\frac{\alpha}{2} + \Psi_0(s)\right] ds = \frac{\overline{AA'}}{2} \tag{3}$$

ist. Es ist offensichtlich, daß an dem Kreis Λ_0, dessen Radius kleiner als ϱ ist, der Bogenlänge gemäß K_0 dem Punkt R_0 vorausgeht. Das heißt, es gilt

$$S_R^0 - S_K^0 = d > 0. \tag{4}$$

Aus (2) und aus (1) ist es klar, daß $S_K^0 < S_K^\sigma$ ist, S_K^σ mit σ stetig wächst, und daß $S_K^\sigma - S_K^0$ kleiner gemacht werden kann als eine beliebig gegeoene positive Zahl, falls nur σ genügend klein ist.

Aber S_R^σ ist auch eine stetige Funktion von σ, weil die Gleichung

$$\Phi(S_R^\sigma, \sigma) \equiv \int_0^{S_R^\sigma} \sin\left[\frac{\alpha}{2} + \int_0^s \varkappa_\sigma(u)\,du\right] ds - \frac{\overline{AA'}}{2} = 0 \tag{5}$$

---

[6]) Wenn es mehrere solche gibt, so die erste nach der Bogenlänge.

bei jedem σ eine Lösung für S_R^σ hat, in diesen Punkten hat Φ stetige partielle Differentialquotienten nach S_R^σ, und diese Differentialquotienten verschwinden nicht. So existiert die implizite Funktion $S_R^\sigma = \varphi(\sigma)$, welche gleichfalls stetig ist.

(5) hat wirklich eine Lösung für S_R^σ. Betrachten wir diejenige S_P^σ, auf welche $\Psi_\sigma(S_P^\sigma) = \Psi_0(S_R^0)$ ist. Dann ist

$$\int_0^{S_P^\sigma} \sin\left[\frac{\alpha}{2} + \Psi_\sigma(s)\right] ds > \int_0^{S_R^0} \sin\left[\frac{\alpha}{2} + \Psi_0(s)\right] ds = \frac{\overline{AA'}}{2}. \tag{6}$$

Nämlich gehört zu jedem Wert s ein einziger τ so, daß $\Psi_0(\tau) = \Psi_\sigma(s)$ ist, und zwar gilt wegen $\Psi_0(\tau) = (\varkappa_0 + \varepsilon)\tau$

$$\tau = \int_0^s \frac{\varkappa_\sigma(s)}{\varkappa_0 + \varepsilon} ds \equiv \int_0^s \lambda(s) ds,$$

wo wegen (1) $\lambda(0) = 0$ und $0 \leqq \lambda(s) \leqq 1$ ist. So ist für beliebige $0 \leqq \tau_1 < \tau_2$

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{s_1}^{s_2} \lambda(s) ds \leqq s_2 - s_1.$$

Demnach entsteht Ψ_σ aus Ψ_0 auf solche Weise, daß jedes Teilintervall seines Definitionsbereiches etwas gestreckt wird (wobei auch die identische Streckung vom Streckungskoeffizienten 1 nicht ausgeschlossen wird). Offensichtlich entstehen die zwei Integranden von (6) auseinander auf ähnliche Weise. Da es nun einen s_0 gibt, für welchen $\lambda(s_0) < 1$ ist, kann man die Ungleichheit für die Integrale (6) einsehen. Da an der linken Seite von (6) stehende Integral wegen der Posivität der Integranden eine monoton wachsende und stetige Funktion der oberen Grenze ist, so existiert S_R^σ, der (5) erledigt bei gegebenem σ. — Die Stetigkeit und die Positivität des partiellen Differentialquotienten ist ersichtlich.

Ist σ genügend klein, dann gilt $S_F^\sigma - S_K^0 < \frac{d}{2}$ und $|S_R^\sigma - S_K^0| < \frac{d}{2}$, und so ist wegen (4) für dieses σ $S_K^\sigma < S_R^\sigma$. Endlich gibt es Werte σ für welche $S_R^\sigma < S_K^\sigma$ ist. Für den Grenzfall $\sigma = \infty$ bekommen wir die Strahl $\overrightarrow{AO}$, also $S_R^\infty = \overline{AO}$. So ist der Wert von S_R^σ, wenn σ genügend groß ist, einerseits in der Nähe von $\overline{AO}$, anderseits erreicht Ψ_σ den Wert $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ nur für solche s, welche größer sind als $2\overline{AO}$. Also ist für solche σ $S_R^\sigma < S_K^\sigma$. Da aber S_K^σ und S_R^σ, wie wir das gezeigt haben, sich mit σ stetig ändern, so gibt es einen Wert σ_0, für welchen $S_K^{\sigma_0} = S_R^{\sigma_0}$ ist. Wenn wir den Bogen $\widehat{AR}_{\sigma_0}$ des zu diesem σ_0 gehörenden Λ_{σ_0} auf f spiegeln, und mit der Strecke $A'B$ ergänzen, erhalten wir eine zulässige Kurve, wo $\max \varkappa(s) = \varkappa_0 + \varepsilon$ ist, wobei ε der in dem Satz gegebener, oder ein kleinerer Wert ist.

§ 2.

Seien jetzt die zulässigen Kurven solche, die auch noch der Bedingung genügen, daß ihr Differenzenquotient beschränkt ist, das heißt

$$\left| \frac{\triangle \varkappa}{\triangle s} \right| \leqq m \tag{1}$$

gilt.

Problem 2: Gesucht sei jene, den mit (1) verschärften Bedingungen genügende zulässige Kurve, deren maximale Krümmung am kleinsten ausfällt.

Wir betrachten die durch

$$\varkappa^{\eta}(s) = \begin{cases} ms & \text{wenn} \quad s \leqq \dfrac{\eta}{m} \\ \eta & \text{wenn} \quad s > \dfrac{\eta}{m} \end{cases} \tag{2}$$

bestimmte Kurvenschar[7]), wo η der Parameter der Schar ist. Hierauf ist der Gang unseres Beweises der folgende. Wir werden zeigen, daß die Schar, wenn m nicht zu klein ist, ein einziges solches Element besitzt, welches die Gerade f in einem Punkt R senkrecht schneidet. Indem wir den Bogen $\widehat{AR}$ eines solchen Elements der Schar auf f spiegeln, und mit der Strecke $A'B$ ergänzen, erhalten wir eine sämtliche Bedingungen befriedigende Kurve. Wir zeigen, daß dies bei gegebenem m die einzige Lösung des Problems 2. ist. Endlich bestimmen wir denjenigen kleinsten Wert von m, für welchen die Schar (2) noch ein f senkrecht schneidendes Element besitzt, und wir zeigen, daß für kleinere m auch das Problem 2 keine Lösungskurve hat. — Zuerst beweisen wir einen Hilfssatz.

Hilfssatz. Es seien C_1 und C_2 zwei aus dem Origo ausgehende Kurven, die dort zu der x-Achse mit dem Winkel β neigende Tangenten haben. Die Krümmungen dieser Kurven sollen nicht negativ und stetig sein, und sollen höchstens im endlich vielen Punkten verschwinden. Außerdem soll ihre Totalkrümmung kleiner als $\pi - \beta$ sein. Es entspreche einem beliebigen

[7]) Wir werden im folgenden von jeder solchen Kurve die durch ihre Krümmung bestimmt ist voraussetzen, daß sie vom Punkt A ausgeht und die Gerade a berührt.

Punkt $P_1(x_1, y_1)$ von C_1 derjenige Punkt $P_2(x_2, y_2)$ von C_2, in welchem die Totalkrümmungen gleich sind, das heißt, wo die Tangenten parallel sind. Nehmen wir an, daß die Krümmungen $\varkappa_2(s_2)$ in den Punkten P_2 mindestens an einer Teilstrecke von C_2 kleiner, aber jedenfalls an der ganzen Kurve nirgends größer sind als die in den entsprechenden Punkten P_1 von C_1 genommenen Krümmungen $\varkappa_1(s_1)$. Wir behaupten, daß in den einander entsprechenden Endpunkten P_1^* und P_2^* zweier solcher Kurvenbogen y_1 kleiner als y_2 ist. Das heißt, wenn S_1 die Bogenlänge von C_1 vom Origo A bis P_1^*, S_2 die Bogenlänge von C_2 von A bis P_2^* ist, so gilt

$$y_1 = \int_0^{S_1} \sin [\beta + F_1(s)] ds < \int_0^{S_2} \sin [\beta + F_2(s)] ds = y_2, \tag{3}$$

wo

$$F_i(s) \equiv \int_0^s \varkappa^i d(u) u \qquad (i = 1, 2) \tag{4}$$

ist.

Beweis. Wir zeigen, daß wenn $0 \leqq s_1^* < s_1 \leqq S_1$ ist, und s_2 und s_2^* die Bedingungen $F_2(s_2) = F_1(s_1) = F_0$ bzw. $F_2(s_2^*) = F_1(s_1^*) = F_0^*$ erfüllen, dann auch $s_1 - s_1 \leqq s_2 - s_2^*$ gilt. Bezeichnen wir die Inverse von $F_i = F_i(s)$ mit $s_i = s_i(F)$. Nach unserer Bedingung ist

$$\varkappa_1(s_1) \geqq \varkappa_2(s_2). \tag{5}$$

Folglich gilt

$$s_1'(F_0) = \frac{1}{F_1'(s_1)} = \frac{1}{\varkappa_1(s_1)} \leqq \frac{1}{\varkappa_2(s_2)} = \frac{1}{F_2'(s_2)} = s_2'(F_0). \tag{6}$$

Und zwar steht in (6) das Zeichen $<$ bzw. $=$ je nachdem, in (5) das Zeichen $>$ oder $=$ steht. Denn $s_1'(F) \leqq s_2'(F)$ gilt nicht nur auf F_0, sondern auch auf F_0^*, und auch auf jeder zwischen F_0^* und F_0 fallenden F, so daß

$$\int_{F_0^*}^{F_0} s_1'(F) dF \leqq \int_{F_0^*}^{F_0} s_2'(F) dF$$

und folglich

$$s_1 - s_1^* \leqq s_2 - s_2^* \tag{7}$$

gilt. Das bedeutet, daß wenn wir aus dem Intervall $\langle \beta, \beta + F_1(S_1) = \beta + F_2(S_2) \rangle$ zwei beliebige Werte herausgreifen, so erreicht die Funktion F_1 ihren Zuwachs vom kleineren bis zum größeren Wert immer auf einem nicht größeren Intervall s, als das bei der Funktion F_2 geschieht. Wenn für ein solches Intervall in (5) überall die Ungleichheit steht, so steht auch in (7) die Ungleichheit.

Teilen wir jetzt das Intervall $\langle 0, S_1 \rangle$ durch die Werte $0 = \overset{0}{s_1}, \overset{1}{s_1}, \ldots$ $\ldots, \overset{n}{s_1} = S_1$ auf n beliebige Teile. Auf Grund der Übereinstimmung der Totalkrümmungen entsprich dieser Teilung eine Einteilung $0 = \overset{0}{s_2}, \overset{1}{s_2}, \ldots$ $\ldots, \overset{n}{s_2} = S_2$ des Intervalles $\langle 0, S_2 \rangle$, so daß

$$F_1(\overset{j}{s_1}) = F_2(\overset{j}{s_2}) \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

ist. So gelangen wir zu einer Näherungssumme der in (3) vorkommenden Integrale. Die Funktionswerte seien immer in den rechten (oder linken) Endpunkten der geeigneten Intervalle genommen. Es folgt aus unseren Bedingungen, daß es immer eine solche Teilstrecke gibt, wo $\varkappa_1(s)$ den Wert $\varkappa_2(s)$ überall um eine positive Konstante übertrifft. Es seien die Endpunkte dieser Teilstrecke Teilungspunkte. So gelangen wir gemäß (8), (7) und dem letzten Satz des vorigen Absatzes zu einer (3) ähnlichen Ungleichheit, wo die rechte Seite die linke Seite immer mindestens um eine geeignete positive Konstante übertrifft. Daraus folgt aber (3) durch Grenzübergang.

Wir bemerken, daß die Behauptung des Hilfssatzes auch dann richtig ist, wenn die Kurve C_2 auch Strecken mit Krümmung Null besitzt. Wir lassen dann nämlich aus der Zuordnung der Punkte nach gleichen Totalkrümmungen diejenigen Strecken von C_2 weg, die verschwindende Krümmung besitzen, also die auf C_1 keine Entsprechende haben. Falls wir jetzt die Integration vollziehen, so ist über den nicht verschwindende Krümmung besitzenden Strecken die Ungleichheit (3) gültig, während die über verschwindende Krümmung besitzenden Strecken genommenen positiven Integrale nur die rechte Seite von (3) vermehren.

Wir kehren zu dem am Anfang des Paragraphen skizzierten Weg der Lösung des Problems 2 zurück.

In jenen Punkten K der Kurven der Schar (2), wo die Tangente mit der y Achse parallel ist, gilt (unter Benutzung derselben Bezeichnungen wie vorher)

$$\int_0^{S_K^\eta} \varkappa^\eta(s)\, ds = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2},$$

woraus

$$S_K^\eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi - \alpha}{\eta} + \frac{\eta}{m}\right)$$

folgt. Eine Kurve der Schar schneidet f dann senkrecht, wenn $S_K^\eta = S_R^\eta$ ist, das heißt, wenn η die Gleichung

$$\int_0^{\frac{\pi-\alpha}{2\eta} + \frac{\eta}{2m}} \sin\left[\frac{\alpha}{2} + \eta\left(\tau - \frac{\eta}{2m}\right)\right] d\tau = \frac{\overline{AA'}}{2} \tag{9}$$

befriedigt. Wenn m so groß ist, daß an der Kurve mit der Krümmung $\varkappa(s)=ms$ die y Koordinate des Punktes K nicht größer als $\frac{\overline{AA'}}{2}$ ausfällt (das heißt m nicht zu klein ist), so besitzt (9) eine Lösung für η. Nämlich kann man ebenso, wie die ähnliche Tatsache des vorigen Paragraphen einsehen, daß bei diesem m für einen genügend grossen η $S_K^\eta < S_R^\eta$, während für einen genügend kleinen η $S_R^\eta < S_K^\eta$ ist, und daß S_K^η so wie S_R^η sich mit η stetig ändern. Dann aber gibt es ein η_0, für welche $S_K^{\eta_0}=S_R^{\eta_0}$ ist, was aber eine Lösung von (9) ist. — Spiegeln wir jetzt den Bogen $\widehat{AR}$ dieser Kurve auf f, und ergänzen wir dies mit der Strecke $A'B$. Wir bezeichnen diese Kurve mit L_0, und ihre Krümmung mit $\varkappa_0(s)$. An dieser Kurve können wir drei Strecken unterscheiden: a) während die Krümmung wächst, b) während sie konstant ist, c) während sie abnimmt.

Wir zeigen, daß L_0 die einzige Lösung des Problems 2 ist. Es sei nämlich L eine beliebige zulässige Kurve, für welche das Maximum der Krümmung $\varkappa(s)$ nicht größer als $\max \varkappa_0(s)=\eta_0$ ist. $\varkappa(s)$ kann wegen (1) und wegen $\varkappa(s) \leqq \eta_0$ auf den Strecken a) und b) nicht größer sein als $\varkappa_0(s)$. Aber sie kann auch nicht kleiner sein. Gibt es nämlich an diesen Strecken einen Punkt mit Parameter s_0 (und so wegen der Stetigkeit der Krümmungen auch eine ganze Strecke) wo $\varkappa(s_0)<\varkappa_0(s_0)$ ist, so gelangt L außerhalb L_0 (außerhalb des von L_0 und $\overline{AB}$ begrenzten Gebietes). Dann sollte aber L die L_0 berühren, oder schneiden, was aber — wie wir zeigen werden — zu einem Widerspruch mit unseren Bedingungen führt. So muß aber an den Strecken a) und b) $\varkappa(s)\equiv\varkappa_0(s)$ sein. In diesem Fall jedoch müssen die zwei Krümmungen auch an der Strecke c) zusammenfallen. Nämlich kann dann $\varkappa(s)$ wegen (1) an der Strekke c) nicht kleiner als $\varkappa_0(s)$ sein; aber er kann auch nicht größer als $\varkappa_0(s)$ sein, weil $\varkappa(s)$ müsste von einem solchen Punkt an wegen (1) durchweg größer als $\varkappa_0(s)$ sein, was aber nach dem Zusammenfallen der Krümmungen an den Strecken a), b) einen Widerspruch damit bedeutet, daß die Totalkrümmung auch von L $\pi-\alpha$ ist. Also ist — wenn m nicht zu klein ist — L_0 wirklich die einzige Lösung des Problems 2.

Jetzt werden wir unter Anwendung unseres Hilfssatzes nachträglich zeigen, daß wenn L den L_0 aus den oben erwähnten Gründen (das heißt wenn es solche Werte s_0 gibt, für welche $\varkappa(s_0)<\varkappa_\sigma(s_0)$ ist) schneidet, oder von außen berührt, dies einen Widerspruch mit unserer Bedingung $\max \varkappa(s) \leqq \eta_0$ bedeutet. Ordnen wir jene Punkte des L und des Bogens $\widehat{AA'}$ der Kurve L_0 einander zu, in welchen die Totalkrümmungen gleich sind. In den so zugeordneten Punkten ist die Krümmung von L_0 nie kleiner als die von L. Für die Strecke a) gilt dies wegen (1)[8]), für die Strecke b) wegen der Bedingung $\max \varkappa(s) = \eta_0$, während sich dies für die Strecke c) ebenso einsehen läßt, wie für a), wenn wir die dort angewandte Erwägung jetzt in solcher Weise durchführen, daß wir aus dem der A' entsprechenden, die Krümmung Null besitzenden Punkte von L in der Richtung der abnehmenden s ausgehen. So erfüllen sich für einen außer L_0 endigenden, oder für einen den L_0 von aussen berührenden Bogen von L, und für einen entsprechenden Bogen von L_0 die Bedingungen des Hilfssatzes. So sollte nach dem Hilfssatz von den y Koordinaten der parallele Tangenten besitzenden Endpunkte socher Bögen die erste größer als die zweite sein. Wenn aber L außerhalb L_0 gelangt, so kann man zu ihnen eine solche gemeinsame Tangente ziehen (siehe die Abbildung), daß in Gegensatz zum Hilfssatz $y_1 \geqq y_2$ ausfällt. So kann $\varkappa(s)$ an den Strecken a) und b) tatsächlich nirgends kleiner als $\varkappa_0(s)$ sein.

Jetzt untersuchen wir die Frage nach denjenigen Werten von m, für welche das Problem 2 eine Lösungskurve besitzt.

Satz 2. *Das Problem 2 besitzt dann, und nur dann eine Lösungskurve, wenn die Totalkrümmung im Schnittpunkt der Kurve von der Krümmung* $\varkappa(s) = ms$ *mit der Winkelhalbierenden* f *nicht kleiner als* $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ *ist.*

Gilt dies, so besitzen wir eine Lösungskurve. Nämlich folgt dann auf der Kurve von Krümmung $\varkappa(s) = ms$ (nach wachsender Bogenlänge gerichtet) der Punkt K, in welchem die Tangente mit der y Achse parallel ist, nicht später, als der Schnittpunkt R der Kurve und von f. Das heißt, die Schar (2) besitzt für genügend große η ein solches Element, für welches $S_K^\eta \leqq S_R^\eta$ ist. Dann existiert aber, ähnlich zu den Vorangehenden eine L_0, welche die einzige Lösung des Problems 2 ist.

Ist die Totalkrümmung im Schnitlpunkt R kleiner als $\frac{\pi - \alpha}{2}$, so haben wir keine zulässige Kurve. Dann ist die y Koordinate von K größer als $\frac{\overline{AA'}}{2}$. Wir spiegeln den Bogen $\widehat{AK}$ auf die Gerade die K passiert, und mit f parallel ist. Der Endpunkt der so entstandenen Kurve $\overline{C}_1$ fällt außer b. Nehmen wir an, daß $\overline{C}_2$ bei diesem m eine sämtliche Bedingungen erfüllende

---

[8]) Wäre nämlich $\varkappa(s_2) \geqq \varkappa_0(s_1)$, so müßte wegen (1) $s_2 \geqq s_1$ sein. Dann wäre aber im Intervall $\left(s_2 - \frac{\varkappa(s_2)}{m}, s_2\right)$ $\varkappa(s) \geqq m(s - s_2) + \varkappa(s_2)$, ferner in $\left(0, s_2 - \frac{\varkappa(s_2)}{m}\right)$ $\varkappa(s) \geqq 0$, was in Widerspruch zu

$$\int_0^{s_1} \varkappa_0(s)\, ds = \frac{m s_1^2}{2} \int_0^{s_2} \varkappa(s)\, ds$$

steht.

(zulässige) Kurve ist, deren Krümmung mit $\bar{\varkappa}(s)$ bezeichnet wird. $\bar{\varkappa}(s)$ kann an der Strecke von steigender Krümmung der $\bar{C}_1$ mit ms nicht identisch sein, dazu nämlich, daß die Totalkrümmung nicht größer als $\pi-\alpha$ sei, als auf $\bar{C}_2$ neben der Behaltung von (1) die Krümmung Null wieder erreicht wird, müßte in diesem Falle $\bar{C}_2$ mit $\bar{C}_1$ zusammenfallen. So würde aber der Endpunkt von $\bar{C}_2$ ausser b fallen, was einen Widerspruch damit bedeutet, daß $\bar{C}_2$ alle Bedingungen erfüllt. — Da die Krümmung von $\bar{C}_2$ im Intervall s, wo die $\bar{C}_1$ steigende Krümmung besitzt, wegen (1) nicht größer als ms sein kann, und da sie gemäß den Vorangehenden auch nicht ihr gleich sein kann, so muß es einen s_0 geben, so daß $\bar{\varkappa}(s_0) < ms_0$ ist. Dann gelangt aber $\bar{C}_2$ außer $\bar{C}_1$, und so wird sie $\bar{C}_1$ schneiden. Dann kann man aber zu $\bar{C}_1$ und zu $\bar{C}_2$ eine gemeinsame Tangente ziehen, so daß die Koordinate y_2 des Berührungspunktes E_2 auf $\bar{C}_2$ kleiner als die Koordinate y_1 des Berührungspunktes E_1 auf $\bar{C}_1$ ist, was im Widerspruch mit dem Hilfssatz steht. Das Erfülltsein der Bedingungen des Hilfssatzes im Falle $\bar{C}_1$ und $\bar{C}_2$ kann man ebenso einsehen, wie das im Falle von L und L_0 geschah.

So kann die Kurve L_0 nur dann nicht konstruiert werden, wenn bei Problem 2 überhaupt keine zulässige Kurve gibt. Damit ist der folgende Satz völlig bewiesen.

Satz 3. *Existieren zulässige Kurven, so besitzt das Problem 2 eine Lösungskurve. Diese wird durch diejenige eindeutig bestimmte Kurve L_0 gegeben, welche aus folgenden Bögen zusammengesetzt wird:* a) *der Bogen zwischen dem Punkt A und dem Schnittpunkt mit der Winkelhalbierenden f derjenigen Kurve der Schar* (2), *deren Parameter η_0 bei gegebenem m eine Lösung von* (9) *ist,* b) *deren Spiegelung auf f,* c) die Strecke $A'B$.

Literatur.

[1] A. Moór—A. Török, Über zwei Extremaleigenschaften des Kreisbogens und der Kugelfläche, *Acta Sci. Math. Szeged* **15** (1954), 157—163.

[2] E. Nemesdy, Übergangsbogen bei Eisenbahnen und städtischen Schnellbahnen, *Acta Techn. Acad. Sci. Hungar.* **5** (1952), 291—354.

[3] E. Nemesdy, Íves vágányok kitűzése és szabályozása, (Die Absteckung und die Regelung von bogenförmigen Eisenbahnstrecken), *Budapest*, 1954 (ungarisch).

(Eingegangen am 23. Oktober, 1958.)