Ein Satz über Halbgruppen.

Von ISTVÁN PEÁK (Szeged).

Üblicherweise verstehen wir unter einer Halbgruppe eine (nichtleere) Menge, in der eine assoziative Multiplikation definiert ist. Regulär heißt eine Halbgruppe, in der die Kürzungsregeln gelten. Ein Ideal einer Halbgruppe H bedeutet eine nichtleere Untermenge $\mathfrak{a}$ von H mit $H\mathfrak{a}, \mathfrak{a}H \subseteqq \mathfrak{a}$. Echt heißt ein Ideal von H, wenn es aus mindestens zwei Elementen besteht und von H verschieden ist. Die sämtlichen unechten Ideale von H sind H selbst, außerdem nur noch das (etwaige) Nullelement von H. Im regulären Fall ist H das einzige unechte Ideal von H. Wir beweisen den folgenden

Satz. *Jede reguläre Halbgruppe mit Zentrum und ohne echte Ideale ist eine Gruppe.*

BEWEIS. Es sei H eine reguläre Halbgruppe mit dem (nichtleeren) Zentrum Z und ohne echte Ideale. Wir haben zu beweisen, daß H eine Gruppe ist.

(1) *Das Zentrum von H ist eine Gruppe.* Hierzu genügt es zu beweisen, daß für $\alpha, \beta \in Z$ die Gleichung $\xi\alpha = \beta$ in Z lösbar ist. Wir betrachten das durch α erzeugte Hauptideal $H\alpha$. Da H regulär ist und kein echtes Ideal hat, ist $H\alpha = H$. Also gibt es ein Element $\eta\,(\in H)$ mit $\eta\alpha = \beta$.

Anderseits gilt für jedes $\varrho\,(\in H)$

$$\eta\varrho\alpha = \eta\alpha\varrho = \beta\varrho = \varrho\,\beta = \varrho\eta\alpha,$$

woraus sich durch Kürzung mit α

$$\eta\varrho = \varrho\eta,$$

d. h. $\eta \in Z$ ergibt.

(2) *H enthält ein Einselement.* Nach (1) hat nämlich Z sein Einselement ε. Wir zeigen daß ε auch in H ein Einselement ist. Aus $\varepsilon^2 = \varepsilon$ folgt, für ein beliebiges Element ϱ von H, $\varepsilon^2\varrho = \varepsilon\varrho$, also $\varepsilon\varrho = \varrho$. Da $\varepsilon \in Z$, folgt $\varrho\varepsilon = \varrho$. Somit ist ε tatsächlich das Einselement von H.

(3) *Jedes Element $\sigma\,(\in H)$ hat in H sein Inverses,* d. h. ein Element σ' von H mit $\sigma\sigma' = \sigma'\sigma = \varepsilon$. Wegen $H\sigma H = H$ gibt es Elemente $\mu, \nu\,(\in H)$ mit $\mu\sigma\nu = \varepsilon$. Wir zeigen $\sigma' = \nu\mu$. Da $\mu\sigma\nu$ das Einselement von H ist, so folgt

$\mu\sigma\nu\mu = \mu$, also $\sigma\nu\mu = \varepsilon$. Ähnlich erhalten wir $\nu\mu\sigma\nu = \nu$, also $\nu\mu\sigma = \varepsilon$. Hiernach ist $\sigma' = \nu\mu$ das Inverse von σ. Somit ist der Satz bewiesen.[1])

Als unmittelbare Folgerungen haben wir:

1. Eine kommutative reguläre Halbgruppe ohne echte Ideale ist eine abelsche Gruppe. (Dies ist ein Analogon für Halbgruppen des bekannten Satzes, gemäß welchem ein kommutativer, nullteilerfreier, einfacher Ring ein Körper ist.)

2. Eine reguläre Halbgruppe mit Einselement und ohne echte Ideale ist eine Gruppe.

3. Wenn die Halbgruppe sämtlicher Elemente ($\neq 0$) eines nullteilerfreien Ringes R ein nichtleeres Zentrum und keine echte Ideale hat, dann ist R ein Schiefkörper.

Die folgenden zwei Probleme konnten wir nicht lösen:

1° *Ist eine beliebige reguläre Halbgruppe ohne echte Ideale notwendig eine Gruppe?*

2° *Ist ein beliebiger nullteilerfreier einfacher Ring notwendig ein Schiefkörper?*[2])

(Eingegangen am 4. Dezember 1958.)

---

[1]) Herr A. Ádám bemerkte, daß im Beweis des Satzes statt der Bedingung, daß H ohne echte Ideale ist, nur der Umstand benutzt wurde, daß jedes Ideal von H das Zentrum von H enthält. Daraus folgt, daß für eine reguläre Halbgruppe H mit Zentrum die folgenden zwei Behauptungen äquivalent sind:

(1) H ist ohne echte Ideale,

(2) jedes Ideal von H enthält das Zentrum von H.

[2]) Dieses Problem rührt von J. Szendrei her.