Sur l'équation fonctionnelle $f[x+y\cdot f(x)]=f(x)\cdot f(y)$.

Dédié à Monsieur Béla Gyires à propos de son cinquantième anniversaire.

Par S. GOŁĄB (Cracovie) et A. SCHINZEL (Varsovie).

Introduction. On peut déterminer de façons diverses les sousgroupes des groupes centroaffines. En effet il faut ici résoudre certains systèmes d'équations fonctionnelles itérées.

L'ensemble des solutions du système des équations fonctionnelles dépend, comme on le sait, des hypothèses concernant la régularité des solutions cherchées. Il peut s'élargir avec l'affaiblissement des hypothèses de la régularité.

Le premier des auteurs a réduit un des problèmes, dont on parle au commencement à l'équation fonctionnelle

$$f[x+y\cdot f(x)]=f(x)\cdot f(y) \tag{1}$$

qui, étant admise la dérivabilité de la solution cherchée $f(x)$, a comme solutions les suivantes

$$f(x)\equiv 0 \qquad \text{ou} \tag{2}$$

$$f(x)=1+mx \qquad (m=\text{constant quelconque}). \tag{3}$$

À cette occasion s'est imposé la question de la classe des solutions de l'équation (1) dans le domaine des fonctions réelles de la variable réelle ayant des propriétés de régularité plus faibles. Le travail présent — quoiqu'il ne fournit pas la solution complète de cette équation donne quelques théorèmes dans cette direction. La question de la détermination de toutes les solutions (sans aucune hypothèse de régularité) nous semble difficile. L'équation (1) possède des solutions non mesurables. Nous donnons ici des exemples de pareilles solutions, dûs à MM. W. Sierpiński et S. Marcus.

Nous ne pouvons même pas déterminer toutes les solutions mesurables. Dans le domaine des fonctions continues il existent encore d'autres solutions outre la solution (2) et (3). Parmi les solutions nous distinguons certaine classe de celles-ci que nous nommons triviales. Ces sont les solutions, pour lesquelles les valeurs $f(x)$ sont comprises dans l'ensemble T, qui se compose des trois nombres

$$0,\ 1,\ -1. \tag{4}$$

Si l'ensemble des valeurs de la fonction $f(x)$ donnant la solution est plus ample que T, alors il doit être infini. Ça résulte de ce que le groupe multiplicatif contenant au moins un élément différent des nombres $+1$ et -1 doit contenir déjà un nombre infini des éléments.

Dans nos considérations les soi-disant *fonctions micropériodiques* jouent un rôle spécial; ces sont des fonctions périodiques non triviales (non constantes), *possédant des périodes aussi petits qu'on veut* (ne possédant pas de soi-disant période principal). Les fonctions micropériodiques étaient l'objet des recherches des travaux de C. Burstin ([2]) et A. Łomnicki ([4]). En particulier, *une fonction micropériodique et continue à un point est toujours constante.*

§ 1. Excluons d'abord la solution qui est identique à 0. Nous affirmons, que dans ce cas il doit être

$$f(0)=1. \tag{5}$$

En effet soit

$$f(x_0)\neq 0. \tag{6}$$

En substituant dans l'équation (1) $y=0$, $x=x_0$ nous recevrons

$$f(x_0)=f(x_0)\cdot f(0),$$

de là, vu (6), résulte (5).

Supposons d'abord, que la solution $f(x)$ est partout dérivable. Désignons

$$m=f'(0) \tag{7}$$

et différentions (1) par rapport à x.

Nous recevons

$$f'[x+y\cdot f(x)]\cdot[1+y\cdot f'(x)]=f'(x)\cdot f(y).$$

En substituant $x=0$ et en tenant compte de (5) et de (7) nous recevons

$$f'(y)(1+my)=mf(y),$$

d'où, pour $f(y)\neq 0$, nous obtenons

$$\frac{f'(y)}{f(y)}=\frac{m}{1+my},$$

et ensuite

$$f(y)=C(1+my),$$

où C désigne une certaine constante, mais, vu (5), on a

$$C=1$$

et alors

$$f(x)=1+mx, \tag{8}$$

si $x \neq -\frac{1}{m}$. Mais, vu l'hypothèse de dérivabilité, la formule (8) doit être valable aussi pour $x=-\frac{1}{m}$ autrement dit la formule (8) est toujours juste. D'autre part on voit facilement que pour chaque valeur constante m la fonction (8) remplit l'équation (1). De cette façon nous avons déterminé toutes les solutions dérivables.*) Pour trouver à son tour toutes les solutions continues, nous devons d'abord démontrer certains lemmes.

§ 2. Lemme 1. *Si pour la solution $f(x)$ on a*

$$f(x_1)=f(x_2)\neq 0 \qquad \text{où} \qquad x_2>x_1 \tag{9}$$

alors le nombre

$$\omega=x_2-x_1$$

est un période de la fonction $f(x)$.

Démonstration. Supposons (9) et prenons $y=\frac{x-x_1}{f(x_1)}$; nous recevrons

$$\begin{aligned} f(x+\omega)&=f(x+x_2-x_1)=f\left[x_2+\frac{x-x_1}{f(x_1)}f(x_1)\right]= \\ &=f[x_2+y\cdot f(x_1)]=f[x_2+y\cdot f(x_2)]=f(x_2)\cdot f(y)= \\ &=f(x_1)\cdot f(y)=f[x_1+y\cdot f(x_1)]=f(x) \end{aligned}$$

pour chaque x, ce qui démontre le lemme.

Lemme 2. *Si la solution $f(x)$ de l'équation* (1) *est continue et périodique, alors elle est constante et égale à* 0 *ou à* 1.

---

*) Dans un certain problème de la théorie des objets géométriques M. J. Aczél a obtenu l'équation

$$C(x)\cdot C\left[\frac{y}{C(x)}\right]=C(x+y) \tag{1*}$$

qui peut être réduite par un simple changement de la variable à notre équation (1). L'équation (1*) possède parmi les solutions dérivables seulement les solutions

$$C(x)=1+mx$$

(on pourrait aussi dans ce but faire une hypothèse plus simple, p. e. que la solution possède au plus un point où elle s'annule) (Cf. [1] pp. 45—47 et [3] pp. 316—317). L'équivalence de l'équation (1*) avec notre équation n'a pas cependant lieu parce que dans nos considérations les solutions qui s'annulent dans un ensemble relativement vaste, jouent un rôle essentiel pendant que les fonctions de telle sorte ne remplient pas en principe l'équation (1*). Ainsi du théorème 1 du présent travail il suit que $C(x)=1+mx$ est la plus générale solution continue de (1*).

Démonstration. Soit p la période de $f(x)$. Si nous faisons abstraction de la solution $f(x)=0$, il existent des nombres x_1 et x_2, $x_1<x_2$, $x_2-x_1=p$ tels, que $f(x_1)=f(x_2)\neq 0$. Nous pouvons admettre, que dans l'intérieur de l'intervalle (x_1, x_2) il y a déjà $f(x)\neq f(x_1)$ puisque autrement $f(x)$ serait constante en vertu du lemme 1 et nous n'aurions rien à démontrer.

De là $f(x)-f(x_1)$ a le même signe par exemple positif à l'intérieur (x_1, x_2), et la droite $y=f(x_1)+\varepsilon$ pour $\varepsilon>0$ suffisamment petit, coupe le diagramme $y=f(x)$ dans les points $x_1+\eta_1$, $x_2-\eta_2$, où η_1, $\eta_2>0$ et η_1, $\eta_2\to 0$ quand $\varepsilon\to 0$ et

$$f(x_1+\eta_1)=f(x_2-\eta_2)\neq 0.$$

Les nombres $x_2-x_1-(\eta_1+\eta_2)=p-(\eta_1+\eta_2)$ en vertu du lemme 1 seront des périodes de la fonction $f(x)$, donc aussi $\eta_1+\eta_2$ et la fonction f, comme micropériodique et continue, doit être constante $f(x)\equiv C$. Mais en vertu de (1) $c=c^2$, c. q. f. d.

Lemme 3. *Si la solution $f(x)$ n'est pas périodique, alors elle doit être invertible dans l'ensemble*

$$A=\hat{x}\ \{f(x)\neq 0\}.$$

C'est la conséquence immédiate du lemme 1.

Lemme 4. *Si la solution $f(x)$ est continue et n'est pas périodique, alors elle doit avoir une des formes suivantes:*

a) *$f(x)$ est négative et strictement croissante dans l'intervalle $(-\infty, x_1)$, $f(x)=0$ dans l'intervalle $[x_1, x_2]$, $f(x)$ est positive et strictement croissante dans l'intervalle $(x_2, +\infty)$, où*

$$-\infty\leqq x_1\leqq x_2<0.$$

b) *$f(x)$ est positive et strictement décroissante dans l'intervalle $(-\infty, x_1)$, $f(x)=0$ dans l'intervalle $[x_1, x_2]$, $f(x)$ est négative et strictement décroissante dans l'intervalle $(x_2, +\infty)$ où*

$$0<x_1\leqq x_2\leqq +\infty.$$

Cela résulte de ce que, $f(x)$ n'est pas constante, $f(0)=1$, $f(x)$ est continue et invertible dans l'ensemble A.

§ 3. Lemme 5. *Si la fonction $f(x)$ est continue sur toute la droite et n'est pas constante, alors pour tout $x\in A$, $x\neq 0$, la valeur de $\dfrac{f(x)-1}{x}$ est constante.*

Démonstration. Supposons que $x\in A$, $y\in A$, $xy\neq 0$ et $\dfrac{f(x)-1}{x}\neq \dfrac{f(y)-1}{y}$. Donc $x+y\cdot f(x)\neq y+x\cdot f(y)$, et d'autre part on a

$$f[x+y\cdot f(x)]=f(x)\cdot f(y)=f[y+x\cdot f(y)]\neq 0.$$

Donc, en vertu du lemme 1, la fonction f est périodique, ce qui, vu les hypothèses admises, n'est pas compatible avec le lemme 2.

Lemme 6. *Les hypothèses du lemme* 5 *étant admises, le cas* $-\infty < x_1 < < x_2 < \infty$ *dans le lemme* 4 *ne peut pas avoir lieu.*

DÉMONSTRATION. Si $-\infty < x_1$ et $x_2 < \infty$ alors en vertu de la continuité de la fonction f aux points x_1 et x_2, nous obtenons du lemme 5

$$\frac{f(x_1)-1}{x_1}=\frac{f(x_2)-1}{x_2}$$

d'où, vu que $f(x_1)=f(x_2)=0$, $x_1=x_2$.

En outre, dans les intervalles $(-\infty, x_1)$ et (x_2, ∞) la fonction f doit être linéaire. Si $x_1=x_2$, nous obtenons les solutions obtenues déjà dans le § 1. Il nous reste donc seulement le cas, où $x_1=-\infty<x_2<0$ ou bien

$$0<x_1<x_2=+\infty.$$

Nous obtenons donc le

Théorème 1. *Les seules solutions continues de l'équation* (1) *sauf les solutions* (2) *et* (3) *sont les solutions:*

$$(10)\quad\left\{\begin{array}{ll} \text{a)} & f(x)=\begin{cases} 0 & \textit{pour} \quad x\leqq x_2 \qquad (x_2<0) \\ 1-\dfrac{x}{x_2} & \textit{pour} \quad x\geqq x_2 \end{cases} \\ \text{b)} & f(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{x}{x_1} & \textit{pour} \quad x\leqq x_1 \qquad (x_1>0) \\ 0 & \textit{pour} \quad x\geqq x_1 \end{cases} \end{array}\right.$$

où x_1 *est un nombre positif quelconque,* x_2 *— un nombre négatif quelconque.*

§ 4. Occupons nous maintenant des solutions triviales. Nous appelons ainsi les solutions pour lesquelles les valeurs de $f(x)$ sont comprises dans T (voir Introduction).

Ici appartiennent surtout les deux solutions constantes et des autres, qui sont déjà discontinues.

Nous démontrerons d'abord le

Lemme 7. *Si l'ensemble* F *des valeurs de* $f(x)$, *qui est la solution de l'équation* (1) *n'est pas compris dans* T, *alors l'ensemble* F *est infini.*

DÉMONSTRATION. Soit $f(x_0)\neq 0,\ 1,\ -1$.

En posant

$$f(x_0)=a$$
$$x_1=x_0 f(x_0)+x_0$$
$$x_{n+1}=x_0 f(x_n)+x_n$$

on prouve aisèment par induction que

$$f(x_n) = a^n, \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

En effet, en substituant dans (1) $x = x_n, y = x_0$, nous avons $f(x_{n+1}) = f[x_n + x_0 \cdot f(x_n)] = f(x_n) \cdot f(x_0) = a^n \cdot a = a^{n+1}$. Comme $a \neq 0, 1, -1$, l'ensemble des valeurs de a^n est infini.

La lemme 7 justifie l'introduction du terme "solutions triviales".

Supposons, que $f(x)$ est une solution triviale, ne prenant que les valeurs 0 et $+1$.

Une des telles solutions est la suivante:

$$f(0) = 1, \quad f(x) = 0, \quad \text{pour} \quad x \neq 0.$$

S'il existe un $x_0 \neq 0$ tel que $f(x_0) = 1$, alors x_0 est une période de la fonction $f(x)$, car

$$f(y + x_0) = f[x_0 + y \cdot f(x_0)] = f(x_0) \cdot f(y) = f(y).$$

Désignons par Ω l'ensemble de toutes les périodes. Ω forme évidemment un groupe additif. Si $x \sim\in \Omega$, alors $f(x) = 0$. D'autre part si nous prenons un groupe additif quelconque Ω et posons

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{quand} \quad x \in \Omega \\ 0 & \text{quand} \quad x \sim\in \Omega \end{cases} \tag{11}$$

nous obtenons une solution. Le groupe Ω peut se composer des points isolés, ou former un ensemble dense. En particulier, quand Ω se compose de tous les nombres rationnels, nous obtenons une solution discontinue à chaque point. Cette fonction est nommée fonction de Dirichlet.

Voici maintenant un exemple de solution non mesurable L de la forme (11), dû à M. W. Sierpinski.

Soit H une base de Hamel et soit b un élément donné de H. Définissons l'ensemble Ω de façon suivante:

$x \in \Omega$ si dans le développement de x de la forme $x = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_m b_m$, où $b_1, b_2, \ldots, b_m$ sont des éléments de la base H, et $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sont des nombres rationnels, non nuls, $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ ne contient pas l'élément b. De l'unicité des développements considérés, il résulte sans peine, que Ω est un groupe additif, et comme Ω est non mesurable L (voir [5] p. 108), la fonction f est non mesurable.

Examinons maintenant la structure des solutions triviales prenants aussi la valeur -1. Désignons

$$\Omega = \hat{x}\{f(x) = 1\}, \qquad \Omega^* = \hat{x}\{f(x) = -1\}, \qquad B = \hat{x}\{f(x) = 0\}.$$

L'ensemble Ω forme un groupe (composé éventuellement de 0 ou des éléments isolés) dont l'ensemble Ω^* doit être une translation. D'autre part on démontre facilement que si nous prenons un groupe additif quelconque

Ω — différent de l'ensemble de tous les nombres réels, — si nous désignons par Ω^* une translation autre que Ω lui-même et par B l'ensemble $(-\infty, \infty)-(\Omega+\Omega^*)$ et si nous définissons la fonction $f(x)$ par la formule

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{quand } x\in\Omega \\ -1 & \text{quand } x\in\Omega^* \\ 0 & \text{quand } x\in B \end{cases}$$

nous recevrons une solution de l'équation (1).

Le problème se pose, si l'ensemble B peut être vide. Or, la réponse est négative, Nous demontrerons que si $a\in\Omega^*$ alors $\frac{a}{2}\in B$. En effet, s'il était $\frac{a}{2}\in\Omega$ alors on aurait $\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=a\in\Omega$, contre l'hypothèse. S'il était $\frac{a}{2}\in\Omega^*$ alors, vu que $a\in\Omega^*$, on aurait $a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}\in\Omega$, ce qui est impossible. Donc il doit être $\frac{a}{2}\in B$.

A. Łomnicki a démontré dans le travail cité [4] que l'ensemble des périodes d'une fonction mesurable, non constante, est de mesure nulle. Il a démontré aussi que chaque fonction mesurable, micropériodique et non constante, possède une soi-disant valeur privilégiée, c'est-à-dire il existe un nombre p tel que l'ensemble

$$E=\hat{x}\{f(x)\neq p\}$$

est de mesure nulle. Or, dans le cas de notre équation, pour chaque solution mesurable, micropériodique et non-constante, ce nombre privilégié p est égal à 0.

Pour le démontrer observons, que l'ensemble des périodes coïncide avec l'ensemble $\Omega=\hat{x}\{f(x)=1\}$, car comme nous avons vu, $f(x_0)=1$ entraîne $f(y+x_0)\equiv f(y)$ et si p est une période alors $f(p)=f(0)=1$.

Si le nombre $q\neq 0$ est la valeur de la fonction $f(x)$ alors l'ensemble $Q=\hat{x}\{f(x)=q\}$ est une translation de l'ensemble Ω. Car si $f(x)=f(y)=q\neq 0$, alors en vertu du lemme 1, $x-y\in\Omega$. Puisque l'ensemble Ω en vertu du premier des théorèmes de Łomnicki est de mesure nulle, l'ensemble Q est aussi de mesure nulle, par là l'ensemble $E=A$.

§ 5. Occupons nous maintenant avec les solutions non micropériodiques discontinues.

Lemme 8. *Si $f(x)$ est une solution de l'équation* (1) *et s'ils existent des nombres x_1 et x_2 tels que:*

$$f(x_1)\neq 0,\ 1,\ -1; \qquad f(x_2)\neq 0$$

$$[1-f(x_2)]\,x_1\neq x_2[1-f(x_1)], \tag{12}$$

alors la fonction $f(x)$ est micropériodique.

DÉMONSTRATION. Soit $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$,

$$z_0 = 0, \ z_n = \frac{y_1^n - 1}{y_1 - 1} x_1;$$

nous affirmons, que

$$f(z_n) = y_1^n, \quad \text{pour} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{13}$$

En effet, pour $n = 0$ et $n = 1$ la formule est vraie ($f(0) = 1$, $f(z_1) = y_1$). Supposons, qu'elle est vraie pour $n \geqq 0$ et substitutions à (1) $x = z_n$, $y = x_1$. Nous aurons:

$$f[z_n + x_1 \cdot f(z_n)] = f[z_n + x_1 y_1^n] = f(x_1) \cdot f(z_n) = y_1 \cdot y_1^n = y_1^{n+1}.$$

D'autre part $z_n + x_1 \cdot f(z_n) = x_1 \left[\dfrac{y_1^n - 1}{y_1 - 1} + y_1^n\right] = x_1 \cdot \dfrac{y_1^{n+1} - 1}{y_1 - 1} = z_{n+1}$.

Soit à son tour dans (1) $x = z_n$, $y = z_{-n}$; nous obtenons:

$$f[z_n + z_{-n} \cdot f(z_n)] = f(z_n) \cdot f(z_{-n}),$$

mais

$$z_n + z_{-n} \cdot f(z_n) = \frac{y_1^n - 1}{y_1 - 1} x_1 + \frac{y_1^{-n} - 1}{y_1 - 1} x_1 \cdot y_1^n = \frac{x_1}{y_1 - 1}[y_1^n - 1 + 1 - y_1^n] = 0.$$

De là nous avons: $f(z_{-n}) = \dfrac{1}{f(z_n)} = y_1^{-n}$ et la formule (13) se trouve démontrée. Posons maintenant dans l'équation (1) $x = z_n$, $y = x_2$, ensuite $x = x_2$, $y = z_n$. Nous aurons alors

$$f(z_n + y_1^n \cdot x_2) = f(z_n) \cdot f(x_2) = y_2 \cdot y_1^n \neq 0$$
$$f(x_2 + z_n y_2) = f(x_2) \cdot f(z_n) = y_2 y_1^n \neq 0.$$

D'où, en vertu du lemme 1, chacun des nombres

$$\omega_n = x_2 + z_n y_2 - z_n - x_2 y_1^n$$

est la période de la fonction f. Les nombres

$$\omega_{n+1} - \omega_n = y_2(z_{n+1} - z_n) - (z_{n+1} - z_n) - x_2(y_1^{n+1} - y_1^n) =$$
$$= \frac{y_1^{n+1} - y_1^n}{y_1 - 1}(y_2 - 1) x_1 - x_2 y_1^n (y_1 - 1) = y_1^n \{(y_2 - 1) x_1 - x_2 (y_1 - 1)\}$$

sont aussi des périodes. Mais d'après l'hypothèse (12) la dernière parenthèse n'est pas nulle, donc $\omega_{n+1} - \omega_n \neq 0$. Quand $|y_1| < 1$, alors $y_1^n \to 0$ pour $n \to \infty$, quand $|y_1| > 1$, alors $y_1^n \to 0$ pour $n \to -\infty$. Il en résulte, que $f(x)$ a des périodes aussi petits qu'on veut, c'est-à-dire $f(x)$ est micropériodique, ce que nous voulions démontrer.

Observons comme résultat secondaire, que selon que $|y_1|<1$ ou $|y_1|>1$ la suite z_n respectivement z_{-n} tend vers

$$\xi=\frac{x_1}{1-f(x_1)}$$

et alors f tend vers zéro, ainsi, que, l'hypothèse de notre lemme étant admise, zéro est le point d'accumulation des valeurs de la fonction $f(x)$ quel que soit le voisinage du point ξ.

Nous avons dit plus haut, que si la solution $f(x)$ est micropériodique, alors zéro est sa valeur privilégiée. On voit, qu'aussi pour les solutions non micropériodiques zéro est une valeur "privilégiée" dans un certain sens. Le théorème suivant le démontre:

Théorème 2. *Pour que la fonction non micropériodique f soit une solution non triviale de l'équation* (1) *il faut et il suffit qu'il existe un nombre $m\neq 0$ ainsi qu'un groupe G multiplicatif, contenant outre ± 1 encore d'autres nombres et tel que*

$$f(x)=\begin{cases}1+mx & \textit{quand} \quad (1+mx)\in G\\ 0 & \textit{quand} \quad (1+mx)\sim\in G.\end{cases} \tag{14}$$

Démonstration. *Nécessité.* Il existe un x_0 tel, que

$$y_0=f(x_0)\neq 0, \ +1, \ -1.$$

Évidemment $x_0\neq 0$, puisque $f(0)=1$. Comme $f(x)$ n'est pas micropériodique, on a en vertu du lemme 8 pour chaque x l'alternative

$$f(x)=0 \quad \text{ou} \quad x_0[1-f(x)]=x(1-y_0).$$

En posant
$$m\overset{\text{def}}{=}\frac{x_0-1}{x_0}$$

nous avons $m\neq 0$ et on peut écrire l'alternative nommée ci-dessus dans la forme

$$f(x)=0 \quad \text{ou} \quad f(x)=1+mx.$$

Il faut démontrer, que l'ensemble des y, pour lesquels $f\left(\frac{y-1}{m}\right)=y\neq 0$ forme un groupe multiplicatif.

Prenons deux valeurs y_1 et y_2 de l'ensemble

$$G=\hat{y}\left\{f\left(\frac{y-1}{m}\right)=y\neq 0\right\}.$$

Nous avons

$$f\left(\frac{y_1-1}{m}\right)=y_1, \qquad f\left(\frac{y_2-1}{m}\right)=y_2.$$

S'il y avait

$$f\left(\frac{\frac{y_1}{y_2}-1}{m}\right) \neq \frac{y_1}{y_2},$$

alors il devrait être

$$f\left(\frac{\frac{y_1}{y_2}-1}{m}\right) = 0,$$

d'où nous aurions:

$$f\left(\frac{y_1-1}{m}\right) = f\left(\frac{y_2-1}{m} + y_2 \cdot \frac{\frac{y_1}{y_2}-1}{m}\right) = f\left[\frac{y_2-1}{m} + \frac{\frac{y_1}{y_2}-1}{m} f\left(\frac{y_2-1}{m}\right)\right] =$$

$$= f\left(\frac{y_2-1}{m}\right) f\left(\frac{\frac{y_1}{y_2}-1}{m}\right) = 0$$

et on aboutit à une contradiction. Donc $f\left(\frac{\frac{y_1}{y_2}-1}{m}\right) = \frac{y_1}{y_2}$ c'est-à-dire si $y_1 \in G$ et $y_2 \in G$ alors aussi $\frac{y_1}{y_2} \in G$ d'où il résulte que G est un groupe multiplicatif.

Suffisance. Nous vérifions que la fonction $f(x)$ remplit l'équation (1). Quand $(1+mx) \sim\in G$, alors $f(x) = 0$ et

$$f[x + y \cdot f(x)] = f(x) = 0 = f(x) \cdot f(y).$$

Quand $(1+mx) \in G$ et $(1+my) \in G$, alors

$$f(x) \cdot f(y) = (1+mx) \cdot (1+my)$$

$$1 + m[x + y \cdot f(x)] = 1 + m \cdot x + m \cdot y \cdot (1+mx) = (1+mx) \cdot (1+my) \in G,$$

donc

$$f[x + y \cdot f(x)] = (1+mx) \cdot (1+my) = f(x) \cdot f(y).$$

Quand $(1+mx) \in G$ et $(1+my) \sim\in G$, alors $f(y) = 0$, et en même temps

$$1 + m \cdot [x + y \cdot f(x)] = 1 + mx + my \cdot (1+mx) = (1+mx) \cdot (1+my) \sim\in G$$

d'où

$$f[x + y \cdot f(x)] = 0.$$

Par là nous avons démontré, que $f(x)$ est une solution de (1) et le théorème se trouve démontré.

Il est à remarquer, que les solutions $f(x)$ en question sont bornées dans chaque intervalle fini. En outre chaque solution est continue au point

$$\bar{x}=-\frac{1}{m}.$$

Pour caractériser les points de discontinuité de la fonction $f(x)$ observons que, quel que soit le groupe G, un des cas suivante subsiste:

(15) G se compose des nombres a^n ou $\pm a^n$, où a est un nombre réel $\neq 0$, et $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

(16) G est en même temps dense et frontière sur la demidroite $(0, \infty)$.

(17) G contient toute la demidroite $(0, \infty)$.

Dans le cas (16) la fonction f est discontinue soit sur la demidroite $(\bar{x}, \infty)$ (si $m>0$), soit sur la demidroite $(-\infty, \bar{x})$ (si $m<0$).

Dans le cas (17) une fonction f est de la forme $1+mx$ (si G se compose de tous les nombres réels $\neq 0$) ou bien de la forme (10) (si G se compose de tous les nombres positifs).

Puisque toutes les solutions micropériodiques sont discontinues sur toute la droite, nous pouvons renforcer le théorème 1 de façon suivante:

Théorème 3. *Si la solution non-triviale n'est ni de la forme* (3) *ni de la forme* (10) *elle est soit discontinue sur une demidroite, soit elle est de la forme* (14) *où G remplit* (15).

Quant aux solutions de la forme (14) partout discontinues, S. Marcus a remarqué que nous pouvons obtenir une solution non mesurable de cette forme, prenant comme G le corps non-mesurable des nombres réels, dont l'existence est démontrée dans la note posthume de M. Souslin, rédigée par C. Kuratowski ([6], p. 315).

§ 6. Le problème se pose si l'équation (1) possède des solutions non triviales micropériodiques. Or nous démontrerons le

Théorème 4. *L'équation* (1) *possède des solutions non triviales micropériodiques.*

Nous allons construire deux groupes: un groupe additif Ω et un groupe multiplicatif G, tels que

1) Ω contient non seulement le nombre zéro, G contient non seulement les nombres 1 et -1,

2) $y\in G,\ \omega\in\Omega \rightarrow y\,\omega\in\Omega$,

3) $y_1, y_2\in G,\ (y_1-y_2)\in\Omega \rightarrow y_1=y_2$.

Des paires de tels groupes existent.

Il suffit de classer dans Ω tous les nombres de la forme $r\sqrt{2}$, dans G tous les nombres $r \neq 0$, où r est un nombre rationnel quelconque.

Posons $f(x) = \begin{cases} y \text{ s'il existe } \omega \in \Omega \text{ tel que } y = 1 + x + \omega \in G \\ 0 \text{ si un tel } \omega \text{ n'existe pas.} \end{cases}$

La fonction f est bien définie. En effet, supposons qu'il existe ω', $\omega'' \in \Omega$ et $y', y'' \in G$ tels que $1 + x + \omega' = y'$, $1 + x + \omega'' = y''$; alors $y'' - y' = (\omega'' - \omega') \in \Omega$, d'où $y' = y''$. Ensuite la fonction $f(x)$ est périodique. Prenons en effet un $\omega \in \Omega$ quelconque. Si $f(x) = 0$, alors $f(x + \omega) = 0$ car s'il existait un ω' tel que $1 + (x + \omega) + \omega' \in G$, alors il existerait aussi un $\omega'' = (\omega + \omega')$ tel que $1 + x + \omega'' \in G$ en contradiction avec $f(x) = 0$; or si $f(x) \neq 0$, alors $1 + x + \omega \in G$ d'où $1 + x + \omega + 0 \in G$ et alors $f(x + \omega) = 1 + x + \omega = f(x)$.

Le nombre zéro est un point d'accumulation de l'ensemble Ω pour la raison suivante. Puisque le groupe G est non-trivial, 0 est son point d'accumulation. Comme $y\omega \in \Omega$, quand $\omega \in \Omega$ alors $y \in G$, donc il existe des périodes aussi petites que l'on veut, c'est-à-dire f est micropériodique.

Nous démontrerons maintenant, que f satisfait à l'équation (1). En effet, si $f(x) = 0$, alors l'équation (1) est satisfaite d'une façon triviale. Si $f(x) = 1 + x + \omega$, alors nous distinguons deux cas: 1) ou bien $f(y) = 0$, 2) ou $f(y) = 1 + y + \omega_1$.

Dans le premier cas le second membre de l'équation est zéro. Supposons pour le moment, que le premier membre n'est pas zéro: $f[x + y \cdot f(x)] \neq 0$, donc $1 + x + yf(x) + \omega_2 \in G$, c'est-à-dire $1 + x + \omega_0 + y \cdot f(x) + \omega_2 - \omega_0 \in G$, ou $f(x) + y \cdot f(x) + \omega_2 - \omega_0 \in G$ ou (comme $f(x) \neq 0$) $1 + y + \dfrac{\omega_2 - \omega_0}{f(x)} \in G$. Mais $f(x) \in G$, $\dfrac{1}{f(x)} \in G$, $\omega_2 - \omega_0 \in \Omega$, donc

$$\omega_1 = \frac{\omega_2 - \omega_0}{f(x)} \in \Omega$$

et comme $1 + y + \omega_1 \in G$, donc $f(y) \neq 0$ et on aboutit à une contradiction. Donc le premier membre de l'équation est aussi égal à zéro.

Dans le second cas on a

$$f(x) = 1 + x + \omega_0 \in G,$$
$$f(y) = 1 + y + \omega_1 \in G,$$

d'où

$$x + y \cdot f(x) = f(x) - 1 - \omega_0 + [f(y) - 1 - \omega_1] \cdot f(x) = $$
$$= f(x) \cdot f(y) - [\omega_0 + \omega_1 f(x)] - 1,$$

c'est-à-dire

$$1 + x + y \cdot f(x) = f(x) \cdot f(y) - [\omega_0 + \omega_1 \cdot f(x)].$$

Mais $f(x)\in G$, donc $\omega_1 f(x)\in\Omega$ et $\omega_2=\omega_0+\omega_1\cdot f(x)\in\Omega$. Ensuite $f(x)\cdot f(y)\in G$. Alors on a $1+x+y\cdot f(x)+\omega_2\in G$, donc

$$f[x+y\cdot f(x)]=1+x+y\cdot f(x)+\omega_2=f(x)\cdot f(y).$$

Nous avons ainsi démontré que la fonction $f(x)$ est une solution de l'équation (1).

Observons enfin que le théorème 2 nous donne la structure générale de toutes les solutions non triviales et non micropériodiques, mais le théorème 4 nous donne seulement un certain ensemble des solutions non triviales et micropériodiques, n'épuisant pas nécessairement l'ensemble de toutes les solutions de ce type.

Le problème de la forme de toutes les solutions mesurables reste aussi ouvert.

Bibliographie.

[1] J. Aczél, Beiträge zur Theorie der geometrischen Objekte, III—IV. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **8** (1957), 19—52.

[2] C. Burstin, Über eine spezielle Klasse reeller periodischer Funktionen, *Mh. Math. Phys.* **26** (1915), 229—262.

[3] M. Hosszú, Functional equations and algebraic methods in the theory of geometric objects, *Publ. Math. Debrecen* **5** (1958), 294—329.

[4] A. Łomnicki, O wielookresowych funkcjach jednoznacznych zmiennej rzeczywistej, *Sprawozd. Tow. Nauk. Warszawa.* XI, **6** (1918), 808—846.

[5] W. Sierpiński, Sur la question de la mesurabilité de la base de M. Hamel, *Fund. Math.* **1** (1920), 105—111.

[6] M. Souslin, Sur un corps non dénombrable de nombres réels, *Fund. Math.* **4** (1923), 311—315.

(Reçu le 6 décembre 1958.)