Die Halbgruppen, deren alle echten Teilhalbgruppen Gruppen sind.

Von GEORG POLLÁK und LADISLAUS RÉDEI (Szeged).

Wir sagen, daß eine Halbgruppe die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ hat, kurz eine $\mathfrak{E}$-Halbgruppe ist, wenn ihre sämtlichen echten Teilhalbgruppen Gruppen sind. Wir wollen die $\mathfrak{E}$-Halbgruppen bestimmen. Bevor wir unseren diesbezüglichen Satz formulieren, führen wir einige Benennungen und Bezeichnungen ein.

Für endliche Halbgruppen H bezeichnen wir mit $O(H)$ die Anzahl der elemente von H. Für unendliche Halbgruppen H setzen wir $O(H)=\infty$. In beiden Fällen nennen wir $O(H)$ die *Ordnung* von H.

Mit $\{\alpha, \beta, \dots\}$ bezeichnen wir die durch die Elemente $\alpha, \beta, \dots$ erzeugte Halbgruppe.

Die *Ordnung* $o(\alpha)$ eines Halbgruppenelementes α definieren wir durch $o(\alpha)=O(\{\alpha\})$.

Im Fall $o(\alpha)=n(=1,2,\dots)$ sind $\alpha, \dots, \alpha^n$ die sämtlichen verschiedenen Elemente der Halbgruppe $\{\alpha\}$. Diese läßt sich jetzt durch eine einzige Gleichung

$$\alpha^{n+1}=\alpha^m \qquad (1 \leqq m \leqq n)$$

definieren. Dabei ist nicht nur n, sondern auch m invariant durch $\{\alpha\}$ bestimmt, weshalb wir m die *zweite Invariante* von $\{\alpha\}$ nennen. Bekanntlich ist eine durch ein Element erzeugbare Halbgruppe dann und nur dann eine Gruppe, wenn ihre zweite Invariante gleich 1 ist.

Im Fall $o(\alpha)=\infty$ sind $\alpha, \alpha^2, \dots$ die sämtlichen verschiedenen Elemente von $\{\alpha\}$.

Sind alle Elemente einer Halbgruppe oder einer Gruppe von endlicher Ordnung, so nennen wir sie eine Torsionshalbgruppe bzw. eine Torsionsgruppe.

Satz. *Alle $\mathfrak{E}$-Halbgruppen sind Torsionshalbgruppen, und zwar sind sie die folgenden Halbgruppen: erstens die Torsionsgruppen, zweitens die Halbgruppen 2-ter Ordnung, drittens die durch ein Element erzeugbaren Halbgruppen mit der zweiten Invariante 2.*

Vor allem ist nämlich trivial, daß alle Teilhalbgruppen einer Torsionsgruppe Gruppen sind. Hiernach sind die Torsionsgruppen tatsächlich $\mathfrak{G}$-Halbgruppen.

Ferner sind die echten Teilhalbgruppen einer Halbgruppe 2-ter Ordnung sicherlich Einsgruppen, weshalb die Halbgruppen 2-ter Ordnung ebenfalls $\mathfrak{G}$-Halbgruppen sind.

Wenn schließlich eine Halbgruppe $\{\alpha\}$ n-ter Ordnung die zweite Invariante 2 hat, d. h. durch eine Gleichung

$$\alpha^{n+1} = \alpha^2 \qquad (n \geqq 2)$$

definiert ist, wobei wir nur noch den Fall $n \geqq 3$ zu betrachten brauchen, so ist vor allem klar, daß ihre sämtlichen echten Teilhalbgruppen in der Differenzmenge $\{\alpha\} - \alpha$ enthalten sind. Da aber diese eine (zyklische) Gruppe ist (die nämlich aus den Elementen $\alpha^2, \ldots, \alpha^n$ besteht, das Einselement α^{n-1} hat und durch α^n erzeugt wird), so folgt hieraus, daß die betrachtete Halbgruppe $\{\alpha\}$ die Eigenschaft $\mathfrak{G}$ hat.

Mit dem Bisherigen haben wir bewiesen, daß die im Satz aufgezählten Halbgruppen, wie behauptet war, $\mathfrak{G}$-Halbgruppen sind.

Es werde umgekehrt eine $\mathfrak{G}$-Halbgruppe H vorgelegt, von der wir annehmen, daß sie keine der schon betrachteten Halbgruppen ist. Wir haben daraus einen Widerspruch abzuleiten.

Es muß H eine Torsionshalbgruppe sein, da H sonst ein Element α mit $o(\alpha) = \infty$ enthält, woraus folgt, daß die Elemente $\alpha^2, \alpha^3, \ldots$ verschieden sind und eine echte Teilhalbgruppe von H bilden, die offenbar keine Gruppe ist. Damit ist bewiesen, daß H eine Torsionshalbgruppe ist.

Hieraus und aus der getroffenen Annahme folgt, daß H keine Gruppe ist.

Wir zeigen, daß H nicht durch ein Element erzeugbar ist. Wenn wir nämlich $H = \{\alpha\}$ annehmen, so muß wegen der Endlichkeit von $o(\alpha)$ eine Gleichung

$$\alpha^{n+1} = \alpha^m \qquad (1 \leqq m \leqq n)$$

bestehen. Da H keine Gruppe ist, ist $m = 1$ unmöglich. Auch den Fall $m = 2$ haben wir ausgeschlossen. Da also $m \geqq 3$ ist, bilden die Elemente $\alpha^{m-1}, \ldots, \alpha^n$ eine echte Teilhalbgruppe von H. Diese ist aber keine Gruppe, da in ihr (sogar auch in $\{\alpha\}$) die Gleichung $\xi\alpha^m = \alpha^{m-1}$ unlösbar ist. Mit diesem Widerspruch ist die Behauptung bewiesen.

Hieraus folgt, was wir gleich bemerken wollen, daß $\{\tau\}$ für $\tau \in H$ stets eine Gruppe ist.

Irgend zwei verschiedene idempotente Elemente von H erzeugen eine Teilhalbgruppe von H, die sicherlich keine Gruppe ist, also gleich H sein muß.

Wir zeigen, daß H zwei verschiedene idempotente Elemente ϱ, σ enthält, woraus nach Vorigem

$$(1) \qquad H = \{\varrho, \sigma\}, \quad \varrho^2 = \varrho, \quad \sigma^2 = \sigma$$

folgt.

Zum Beweis nehmen wir zunächst zwei Elemente $\varkappa, \lambda$ aus H, für die mindestens eine der Gleichungen

$$\xi\varkappa = \lambda, \quad \varkappa\eta = \lambda$$

(in H) unlösbar ist. Solche Elemente $\varkappa$, λ existieren, da H keine Gruppe ist. Es seien ϱ, σ die Einselemente der Gruppen $\{\varkappa\}$ bzw. $\{\lambda\}$, die also idempotent sind. Wir zeigen $\varrho \neq \sigma$, womit obige Behauptung bewiesen wird. Wenn $\varrho = \sigma$ wäre, so hätte man

$$\lambda\varrho = \lambda\sigma = \lambda, \quad \varrho\lambda = \sigma\lambda = \lambda.$$

Da aber ϱ eine Potenz von $\varkappa$ ist, sind wir gegen die definition von $\varkappa$ und λ verstoßen.

Wegen (1) lassen sich alle Elemente von H als endliche Produkte $\varrho\sigma\varrho\sigma\ldots$ oder $\sigma\varrho\sigma\varrho\ldots$ schreiben. Folglich kommen alle Elemente von H unter den

$$\varrho, \ \sigma, \ (\varrho\sigma)^i, \ (\varrho\sigma\varrho)^i, \ (\sigma\varrho)^i, \ (\sigma\varrho\sigma)^i$$

vor. Wir beweisen, daß die vier Gruppen $\{\varrho\sigma\}$, $\{\varrho\sigma\varrho\}$, $\{\sigma\varrho\}$, $\{\sigma\varrho\sigma\}$ von gleicher Ordnung sind und das Einselement der ersten zwei dieser Gruppen gleich ϱ, das Einselement der letzten zwei Gruppen gleich σ ist, ferner werden wir hieraus auf $\varrho = \sigma$ schließen. Mit diesem Widerspruch wird unser Satz bewiesen.

Im Beweis werden wir öfters aus „Dualisieren" und „Symmetrisieren" Gebrauch machen. Darunter verstehen wir die Vertauschung von links- und rechtsseitiger Multiplikation bzw. die Vertauschung von ϱ und σ miteinander.

Wir setzen

$$(2) \qquad k = o(\varrho\sigma\varrho).$$

Es folgt, daß

$$\varepsilon = (\varrho\sigma\varrho)^k$$

das Einselement der Gruppe $\{\varrho\sigma\varrho\}$ ist. Ferner gilt die Multiplikationstafel

$$\begin{array}{c|cc} & \varepsilon & \varrho \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varrho & \varepsilon & \varrho \end{array}$$

Hiernach bilden ε, ϱ im Fall $\varepsilon \neq \varrho$ eine echte Teilhalbgruppe von H, die keine Gruppe ist. Da dies unmöglich ist, so folgt $\varepsilon = \varrho$, also ist

(3) $$(\varrho\sigma\varrho)^k = \varrho$$

das Einselement von $\{\varrho\sigma\varrho\}$.

Ferner setzen wir

(4) $$l = o(\varrho\sigma).$$

Es folgt, daß

$$\varepsilon_1 = (\varrho\sigma)^l$$

das Einselement der Gruppe $\{\varrho\sigma\}$ ist. Also gilt

$$(\varrho\sigma)^{l+1} = \varrho\sigma.$$

Von rechts multiplizieren wir diese Gleichung mit ϱ:

$$(\varrho\sigma\varrho)^{l+1} = \varrho\sigma\varrho.$$

Da ϱ das Einselement von $\{\varrho\sigma\varrho\}$ ist, so folgt daraus

$$(\varrho\sigma\varrho)^l = \varrho.$$

Dies und (2), (3) ergeben

$$k \mid l.$$

Anderseits multiplizieren wir (3) von rechts mit σ;

$$(\varrho\sigma)^{k+1} = \varrho\sigma.$$

Da ε_1 das Einselement von $\{\varrho\sigma\}$ ist, folgt

$$(\varrho\sigma)^k = \varepsilon_1.$$

Hieraus und aus (4) ergibt sich $l \mid k$. Aus beiden folgt $k = l$. Nach (2) und (4) ist also

$$o(\varrho\sigma\varrho) = o(\varrho\sigma).$$

Nach Dualisieren und Symmetrisieren ergibt sich

$$o(\varrho\sigma\varrho) = o(\sigma\varrho) \quad \text{bzw.} \quad o(\sigma\varrho\sigma) = o(\sigma\varrho).$$

In Anbetracht von (2) haben wir also

(5) $$k = o(\varrho\sigma) = o(\varrho\sigma\varrho) = o(\sigma\varrho) = o(\sigma\varrho\sigma).$$

Wenn ferner (3) das duale Resultat hinzugenommen und das Einselement von $\{\sigma\varrho\}$ mit ε_2 bezeichnet wird, so gelten noch die Tatsachen, daß

(6) $$\varepsilon_1 = (\varrho\sigma)^k, \quad \varrho = (\varrho\sigma\varrho)^k, \quad \varepsilon_2 = (\sigma\varrho)^k, \quad \sigma = (\sigma\varrho\sigma)^k$$

in dieser Reichenfolge die Einselemente der Gruppen $\{\varrho\sigma\}, \{\varrho\sigma\varrho\}, \{\sigma\varrho\}, \{\sigma\varrho\sigma\}$ sind.

Nach (6) gelten

$$\varepsilon_1\varrho = (\varrho\sigma\varrho)^{2k} = \varrho, \quad \varrho\varepsilon_1 = (\varrho\sigma)^{2k} = \varepsilon_1.$$

Also gilt die Multiplikationstafel

$$\begin{array}{c|cc} & \varepsilon_1 & \varrho \\ \hline \varepsilon_1 & \varepsilon_1 & \varrho \\ \varrho & \varepsilon_1 & \varrho \end{array}$$

Hiernach bilden ε_1, ϱ im Fall $\varepsilon_1 \neq \varrho$ eine echte Teilhalbgruppe von H, die keine Gruppe ist. Da dies unmöglich ist, so folgt

$$\varepsilon_1 = \varrho.$$

Nach Dualisieren und Symmetrisieren ergibt sich noch

$$\varepsilon_2 = \varrho, \quad \varepsilon_2 = \sigma.$$

Es folgt $\varrho = \sigma$. Mit diesem Widerspruch ist der Satz bewiesen.

(Eingegangen am 10. Dezember 1958.)