Über die Funktionalgleichung $f(a^i_k)\cdot f(b^i_k)=f(b^i_\alpha a^\alpha_k)$.

Herrn Professor O. Varga anlässlich seines 50. Geburtstages gewidmet.

Von M. KUCHARZEWSKI (Katowice).

Einleitung.

Die Gleichung

$$f(a^i_k)\cdot f(b^i_k)=f(b^i_\alpha a^\alpha_k) \qquad i,k,\alpha=1,2,\ldots,n, \tag{0.1}$$

wo $X=\|x^i_k\|$ eine quadratische Matrix und f eine skalare Funktion ist, wurde von K. STÉPHANOS [1] unter der Voraussetzung gelöst, daß $f(x^i_k)$ nach allen Veränderlichen x^i_k differenzierbar ist. S. GOŁĄB hat dann diese Gleichung bei der Annahme gelöst, daß f für diejenige Systeme x^i_k stetig ist, für welche $\mathrm{Det}\,(x^i_k)\neq 0$ ist. Dieses Ergebnis wurde von dem Verfasser nicht veröffentlicht. Nachher gelang es S. GOŁAB die Gleichung (0.1) für $n=2$ zu lösen ohne über die gesuchte Funktion irgendeine Regularitätsannahme zu machen [2]. Gleichzeitig hat er die Vermutung ausgesprochen, daß die von ihm für $n=2$ bewiesene Formel auch für jede beliebige natürliche Zahl n gültig ist. Die vorliegende Arbeit bringt gerade den Beweis dieser Vermutung.

§ 1. Der Hauptsatz und das Leitmotiv des Beweises.

In der erwähnten Arbeit [2] hat S. GOŁAB folgenden Satz formuliert und für $n=2$ bewiesen.

Satz. *Jede der Gleichung* (0.1) *genügende Funktion $f(x^i_k)$ kann man in der Form*

$$f(x^i_k)=\varphi(\Delta) \tag{1.1}$$

darstellen, wo Δ die Determinante $\|x^i_k\|$ bedeutet, und $\varphi(u)$ eine Funktion ist, welche die Gleichung

$$\varphi(u)\cdot\varphi(v)=\varphi(u\cdot v) \tag{1.2}$$

erfüllt.

In der vorliegenden Arbeit will ich diesen Satz für eine beliebige natürliche Zahl n beweisen.

BEMERKUNG 1. Wenn die Funktion $f(x_k^i)$ entweder identisch gleich Null oder identisch gleich Eins ist, so kann man leicht nachprüfen, daß der Satz richtig ist und darum können wir diese zwei Spezialfälle aus den weiteren Überlegungen ausschließen. Im weiteren setzen wir also voraus, daß die Relationen

$$f(x_k^i) \not\equiv 1 \tag{1.3}$$

$$f(x_k^i) \not\equiv 0 \tag{1.4}$$

gelten.

BEMERKUNG 2. Bezeichnet man mit A die Matrix $\|a_k^i\|$ und mit B die Matrix $\|b_k^i\|$, so kann man die Gleichung (0.1) in der Form

$$f(A) \cdot f(B) = f(B \cdot A) \tag{1.5}$$

schreiben, wo $B \cdot A$ das Produkt der Matrizen A und B bedeutet. Im folgenden bediene ich mich stets der Gleichung (0.1) in der Form (1.5).

Zwecks Vereinfachung der späteren Darlegung führe ich zuerst einige Bezeichnungen und Definitionen ein.

Definition 1. Eine diagonale Matrix nenne ich eine Matrix, welche von Null verschiedene Elemente nur in der Hauptdiagonale besitzt, d. h. eine Matrix von der Form

$$\begin{Vmatrix} u_1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & \cdots & & 0 \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ 0 & \cdots & & 0 & u_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & u_n \end{Vmatrix} = \|u_k \delta_k^i\| \quad \text{(nicht summieren über } k!) \tag{1.6}$$

wo die u_i beliebige reelle Zahlen darstellen. Die diagonale Matrix (1.6) werde ich im folgenden mit $E(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ bezeichnen.

BEMERKUNG 3. Die diagonale Matrix, in welcher alle Elemente auf der Hauptdiagonale gleich 1 sind, ist die Einheitsmatrix. Die Einheitsmatrix werde ich kurz mit E bezeichnen.

$$E = E(1, 1, \ldots, 1) = \|\delta_k^i\|.$$

Definition 2. Wird das in der i-ten Zeile und in der i-ten Spalte stehende Element der Einheitsmatrix durch u ersetzt, so entsteht eine neue Matrix, welche ich *i-te spezielle Matrix* nenne. Diese Matrix bezeichne ich mit

$$E_i(u) = E(1, 1, \ldots, 1, u, 1, \ldots, 1).$$

Definition 3. Die diagonale Matrix, in welcher die auf der Hauptdiagonale stehenden Elemente gleich 0 oder 1 sind, heiße ich die *normale* diagonale Matrix.

Gemäß den in der Definition 1 eingeführten Bezeichnungen kann man die normale diagonale Matrix in der Form

$$E(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$$

schreiben, wo die δ_i entweder gleich Null oder Eins sind.

Jetzt will ich das Leitmotiv des Beweises des Satzes anführen. Ich zeige zuerst (Hilfssatz 1), daß man jede Matrix

$$A = \|a_k^i\|$$

mit Hilfe der in § 2 definierten, *elementaren* Umformungen entweder auf die normale diagonale Matrix

$$E(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}, 0) \tag{1.7}$$

(falls die Determinante von A gleich Null ist

$$\varDelta = \operatorname{Det} A = 0) \tag{1.8}$$

oder auf die n-te spezielle diagonale Matrix,

$$E_n(a) \tag{1.9}$$

(falls die Determinante von A von Null verschieden ist

$$\varDelta = \operatorname{Det} A \neq 0) \tag{1.10}$$

überführen kann. In dem letzten Falle ist die in (1.9) auftretende Zahl a gleich $\pm\varDelta$, da die elementaren Umformungen so definiert werden, daß sie den absoluten Wert der Determinanten $\varDelta$ nicht ändern. Nachher folgt es aus den Hilfssätzen 2,4 und der Bemerkung 4, daß man jede elementare Umformung einer Matrix durch die Multiplikation dieser Matrix mit einer der sog. *typischen* Matrizen $\left(E_{ik}, E_k^i(u), E_i(u)\cdot E_k\left(\frac{1}{u}\right)\right)$ ersetzen kann. Weiter zeige ich (§ 3), daß die den typischen Matrizen entsprechenden Werte der Funktion f, gleich $+1$ oder -1 sein müssen, wenn f der Gleichung (1.5) genügt. Aus diesen Betrachtungen ist es leicht zu sehen, daß sich nur das Vorzeichen der Funktion f bei den elementaren Umformungen der Matrix ändern kann. Daraus folgt sofort, daß man die Werte der Funktion im Falle

(1. 10) in folgender, einfacher Weise

$$f(A) = \pm f(E_n(\pm \varDelta)) \tag{1.11}$$

ausdrücken kann, also durch diejenigen Werte von f, die der n-ten speziellen Matrix entsprechen. Endlich ergibt sich (§ 6), daß die in (1. 11) auftretenden vier Möglichkeiten sich zu einer einzigen

$$f(A) = f(E_n(\varDelta)) \tag{1.12}$$

reduzieren. Wird jetzt die rechte Seite von (1. 12) mit $\varphi(\varDelta)$ bezeichnet, so wird der Satz im Falle (1. 10) bewiesen, wenn wir zeigen, daß die Funktion φ der Gleichung (1. 2) genügt. Aber dies folgt sofort aus der Matrizengleichung

$$E_n(u) \cdot E_n(v) = E_n(u \cdot v).$$

Um den Satz im Falle (1. 8) zu beweisen, zeige ich einerseits, daß

$$f(A) = 0 \tag{1.13}$$

ist und anderseits, daß

$$\varphi(0) = 0 \tag{1.14}$$

gilt.

Aus (1. 13) und (1. 14) folgt, daß die Formel (1. 1) auch für Matrizen mit verschwindenden Determinanten besteht. Auf diese Weise wird der Satz vollständig bewiesen.

§ 2. Ein Hilfssatz über die Umformung der Matrizen.

Um die Formulierung des Hilfssatzes zu erleichtern, gebe ich zuerst folgende Definition an:

Definition 4. Ich nenne die unten angeführten Umformungen einer Matrix *elementare* Umformung (vgl. M. Bôcher [3] s. 59, Erklärung 1)

a) Transposition der Zeilen (Spalten);

b) Multiplizieren beliebiger Zeile (Spalte) durch eine beliebige Zahl und Addieren zu einer anderen Zeile (Spalte);

c) Multiplizieren einer Zeile (Spalte) durch eine beliebige von Null verschiedene Zahl und gleichzeitiges Dividieren einer anderen Zeile (Spalte) durch dieselbe Zahl.

Hilfssatz 1. *Jede Matrix*

$$A = \| a_k^i \|$$

kann man mit Hilfe der elementaren Umformungen entweder auf die normale *diagonale*

$$E(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}, 0) \tag{2.1}$$

oder auf die n-te spezielle

$$E_n(\pm \Delta) \tag{2.2}$$

Matrix überführen. Genauer gesagt:

Ist $\Delta = \mathrm{Det}\, A = 0$, *so kann man die Matrix A auf eine Matrix von der Form* (2.1), *ist dagegen* $\Delta = \mathrm{Det}\, A \neq 0$, *so kann man sie auf die Form* (2.2) *überführen.*

Beweis. Es sei eine beliebige Matrix $A = \|a_k^i\|$ gegeben. Wir setzen voraus, daß

$$\Delta = \mathrm{Det}\, A \neq 0 \tag{2.3}$$

ist. Ich werde zeigen, daß man diese Matrix mit Hilfe der elementaren Umformungen auf die n-te spezielle diagonale Matrix $E_n(\pm \Delta)$ überführen kann. Infolge der Voraussetzung (2.3) können nicht alle Elemente der ersten Reihe von A gleich Null sein. Durch geeignete Transposition der Spalten der Matrix A können wir erreichen, daß

$$a_1^1 \neq 0$$

ist. Multiplizieren wir jetzt die erste Spalte mit

$$-\frac{a_k^1}{a_1^1} \quad \text{für} \quad k = 2, 3, \ldots, n$$

und addieren wir sie zu der k-ten Spalte, so erhalten wir die Matrix, in welcher alle Elemente der ersten Zeile außer der ersten gleich Null sind, d. h. die Matrix

$$\left\| \begin{matrix} a_1^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & \cdots & b_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_1^n & b_2^n & b_3^n & \cdots & b_n^n \end{matrix} \right\|. \tag{2.4}$$

Nach der Voraussetzung sind nicht alle Elemente b_k^2 für $k = 2, 3, \ldots, n$ in dieser Matrix gleich Null. Mit Hilfe der Transposition der Spalten (ohne die erste Spalte zu rühren) können wir eine solche Matrix erhalten, in welcher

$$b_2^2 \neq 0$$

ist. Multiplizieren wir dann die zweite Spalte der Matrix (2. 4) mit

$$-\frac{b_k^2}{b_2^2} \quad \text{für} \quad k=3,4,\ldots,n$$

und addieren wir sie zu der k-ten Spalte, so kann man diese Matrix in der Form

$$(2.5) \qquad \begin{Vmatrix} a_1^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1^2 & b_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1^3 & b_2^3 & c_3^3 & \cdots & c_n^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_1^n & b_2^n & c_3^n & \cdots & c_n^n \end{Vmatrix}$$

darstellen. Auf diese Weise können wir weiter die Matrix (2. 5) behandeln. Nach $(n-1)$ Schritten erhalten wir endlich die Matrix, die alle Elemente über die Hauptdiagonale gleich Null hat:

$$(2.6) \qquad \begin{Vmatrix} a_1^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1^2 & b_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1^3 & b_2^3 & c_3^3 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_1^n & b_2^n & c_3^n & \cdots & d_n^n \end{Vmatrix}$$

Auf der Hauptdiagonale besitzt sie dagegen, infolge (2. 3), nur von Null verschiedene Elemente. Multiplizieren wir nun die Zeilen der Matrix (2. 6) mit den geeigneten Zahlen und addieren wir sie zu den anderen Zeilen, so können wir (2. 6) in eine Diagonalmatrix überführen. Hier genügt es, die multiplizierten Zeilen nur zu jenen mit größeren Indizes zu addieren, damit die Elemente über die Hauptdiagonale sich nicht ändern. Die Matrix bekommt also die Form

$$(2.7) \qquad \begin{Vmatrix} a_1^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & c_3^3 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n^n \end{Vmatrix} = E(a_1^1, b_2^2, c_3^3, \ldots, d_n^n).$$

Jetzt dividieren wir die erste Zeile der Matrix (2. 7) durch a_1^1 und multiplizieren gleichzeitig die letzte Zeile mit a_1^1. Behandeln wir ähnlich die übrigen Zeilen dieser Matrix, dann erhält sie die gesuchte Gestalt $E_n(\pm\Delta)$.

Jetzt betrachte ich den Fall

$$\Delta = \operatorname{Det} A = 0. \tag{2.8}$$

Um in diesem Falle die Matrix $\|a_k^i\|$ in der Gestalt (2.6) darzustellen, behandeln wir sie ähnlich wie vorher. Jetzt lassen wir aber jene Zeilen ungeändert, die auf der Hauptdiagonale und über diese lauter Nullen besitzen. Weiter wollen wir die Matrix (2.6) in der Form (2.7) darstellen. Zu diesem Zwecke können wir so fortfahren:

Sind alle Elemente der ersten Spalte von (2.6) gleich Null, so ändern wir diese Spalte nicht. Ist aber

$$a_1^{i_0} \neq 0$$

das erste von Null verschiedene Element der ersten Spalte, so multiplizieren wir die i_0-te Zeile mit

$$-\frac{a_1^i}{a_1^{i_0}} \quad \text{für} \quad i = i_0+1,\, i_0+2, \ldots, n$$

und addieren sie zu der i-ten Zeile. Nach dieser Operation erhalten wir folgende Matrix

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 0 & & & & \\ a_1^{i_0} & b_2^{i_0} & c_3^{i_0} & \cdots & 0 \\ 0 & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 0 & b_2^n & c_3^n & \cdots & d_n^n \end{matrix} \right\|, \tag{2.9}$$

die in der ersten Spalte nur das einzige Element $a_1^{i_0}$ von Null verschieden hat. Multiplizieren wir jetzt die erste Spalte dieser Matrix mit den geeigneten Zahlen und addieren wir sie zu den Spalten mit den Indizes, die nicht größer als i_0 sind, so werden außer $a_1^{i_0}$ alle Elemente in der i_0-ten Zeile der Matrix (2.9) gleich Null. Ähnlich können wir andere Spalten behandeln. Nach diesen Umformungen entsteht eine Matrix, die in jeder Zeile und jeder Spalte höchstens ein von Null verschiedenes Element besitzt. In einer solchen Matrix kann man die Zeilen und Spalten so transponieren, daß von Null verschiedene Elemente nur in der Hauptdiagonalen auftreten. Auf diese Weise stellen wir die Matrix A in der Diagonalform (2. 7) dar.

Da die Determinante der Matrix A in dem betrachteten Falle (2. 8) verschwindet, muß eine der Zeilen wenigstens aus lauter Nullen bestehen. Durch Transposition der Zeilen und Spalten kann man aus dieser eine solche diagonale Matrix erhalten, in welcher eben alle Elemente der letzten Zeile gleich Null sind. Um jetzt die so erhaltene Matrix in der Form (2. 1) darzustellen, genügt es die Zeilen, in welchen ein von Null verschiedenes Element steht, durch dieses zu dividieren und gleichzeitig die letzte Reihe mit demselben zu multiplizieren. Also ist unser Hilfssatz auch im Falle (2. 8) richtig.

§ 3. Das Ersetzen der elementaren Umformungen durch gewisse typische Matrizen.

Jetzt werde ich zeigen, daß man jede elementare Umformung der Matrix durch das Multiplizieren dieser mit den unten definierten typischen Matrizen ersetzen kann.

Definition 5. Mit E_{ik} bezeichne ich die Matrix, die durch Vertauschung der i-ten und der k-ten Zeile in der Einheitsmatrix entsteht.

Definition 6. Wenn man das in der i-ten Zeile und k-ten Spalte stehendes Element der Einheitsmatrix durch u ersetzt, so entsteht eine neue Matrix, welche ich mit $E_k^i(u)$ bezeichne.

Gemäß der Definition 2 ist: $E_i^i(u) = E_i(u)$.

Mit Hilfe der in den Definitionen 2,5 und 6 eingeführten Bezeichnungen kann man folgende Hilfssätze formulieren, die ich ohne Beweise anführe (vgl. z. B. A. C. Aitken [5], S. 44—45).

Hilfssatz 2. *Die Vertauschung der i-ten mit der k-ten Zeile (Spalte) einer Matrix kann man durch das linksseitige (rechtsseitige) Multiplizieren dieser mit der Matrix* E_{ik} *ersetzen.*

Hilfssatz 3. *Das Multiplizieren der i-ten Zeile (Spalte) einer Matrix mit u kann man durch das linksseitige (rechtsseitige) Multiplizieren dieser mit der Matrix* $E_i(u)$ *ersetzen.*

Bemerkung 4. Um die i-te Zeile (Spalte) einer Matrix mit $u \neq 0$ und gleichzeitig ihre k-te Zeile (Spalte) mit $\frac{1}{u}$ zu multiplizieren, müßen wir, gemäß dem Hilfssatz 3, diese zuerst linksseitig (rechtsseitig) mit $E_i(u)$ und dann linksseitig (rechtsseitig) mit $E_k\left(\frac{1}{u}\right)$ multiplizieren. Da das Assoziativitätsgesetz für die Multiplikation der Matrizen gilt, kann man diese Operation durch linksseitiges Multiplizieren mit der Matrix $E_k\left(\frac{1}{u}\right)\cdot E_i(u)$ $\Big($rechtsseitiges Multiplizieren mit der Matrix $E_i(u)\cdot E_k\left(\frac{1}{u}\right)\Big)$ ersetzen.

Hilfssatz 4. *Das Addieren der mit u multiplizierten k-ten Zeile (Spalte) zu der i-ten Zeile (Spalte) einer Matrix kann man durch das linksseitige (rechtsseitige) Multiplizieren dieser mit der Matrix* $E_k^i(u)$ *ersetzen.*

§ 4. Die Werte von f, welche den typischen Matrizen zugeordnet sind.

Jetzt bestimme ich die Werte der Funktion f, welche den typischen Matrizen E_{ik}, $E_k^i(u)$, $E_k\left(\frac{1}{u}\right)\cdot E_i(u)$ entsprechen müssen, wenn diese der Gleichung (1.5) genügt. Zuerst bestimme ich $f(E)$ und dann $f(E_{ik})$. Zu diesem Zwecke setze ich in der Gleichung (1.5)

$$A=E \quad \text{und} \quad B=E$$

ein. Dann erhält man die Relation

$$f(E)^2=f(E),$$

aus welcher entweder $f(E)=0$ oder $f(E)=1$ folgt. Da die erste Möglichkeit, infolge der Beziehung

$$f(A)\cdot f(E)=f(A),$$

zu der von uns durch (1.4) ausgeschlossenen Lösung

$$f(A)\equiv 0$$

führen würde, kann nur die zweite Möglichkeit gelten. Es ist also

$$f(E)=1. \tag{4.1}$$

Aus (4.1) und aus der leicht nachzuprüfenden Matrizengleichung

$$E_{ik}\cdot E_{ik}=E$$

folgt die Beziehung

$$f(E_{ik})^2=1. \tag{4.2}$$

Ich werde zeigen, daß die Funktion f eine und nur eine der beiden Bedingungen

(4. 3) $$f(E_{ik}) = 1 \quad \text{für alle} \quad i, k = 1, 2, \ldots.\, n$$

(4. 4) $$f(E_{ik}) = -1 \quad \text{für alle} \quad i, k = 1, 2, \ldots, n \quad i \neq k$$

erfüllen muß. Um dies zu beweisen, bemerken wir zuerst, daß wir eine jede Transposition der beliebigen Zeilen (Spalten) einer Matrix stets durch eine ungerade Zahl von Transpositionen der *benachbarten* Zeilen (Spalten) erhalten können (vgl. z. B. W. Sierpiński [4] S. 4, Satz 1.). Daraus folgt, daß wir eine jede Matrix $E_{ik}(i \neq k)$ durch das linksseitige (rechtsseitige) Multiplizieren der Einheitsmatrix E mit einer ungeraden Zahl der in der Folge

(4. 5) $$E_{12}, E_{23}, \ldots, E_{n-1,n}$$

auftretenden Matrizen erhalten können. Z. B.

$$E_{24} = E_{23} E_{34} E_{23} E = E_{34} E_{23} \cdot E_{34} \cdot E \qquad \text{u. s. w.}$$

Um die Relationen (4. 3) bzw. (4. 4) zu beweisen, genügt es also, diese nur für die Matrizen (4. 5) zu zeigen, d. h. es ist zu zeigen, daß entweder

(4. 6) $$f(E_{i,i+1}) = 1 \quad \text{für alle} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

oder

(4. 7) $$f(E_{i,i+1}) = -1 \quad \text{für alle} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

ist. Für den indirekten Beweis nehme ich an, daß weder (4. 6) noch (4. 7) richtig ist. Es muß dann weningstens ein solcher Index l existieren, daß beide Relationen

$$f(E_{l,l+1}) = \varepsilon$$
$$f(E_{l+1,l+2}) = -\varepsilon, \quad \text{wo} \quad \varepsilon^2 = 1,$$

gleichzeitig bestehen. Mit Hilfe dieser Beziehungen können wir die der Matrix $E_{l,l+2}$ entsprechenden Werte von f auf zwei verschiedene Weisen berechnen Einerseits haben wir nämlich

$$f(E_{l,l+2}) = f(E_{l,l+1}) \cdot f(E_{l+1,l+2}) \cdot f(E_{l,l+1}) f(E) = -\varepsilon$$

und anderseits erhalten wir

$$f(E_{l,l+2}) = f(E_{l+1,l+2}) f(E_{l,l+1}) f(E_{l+1,l+2}) f(E) = \varepsilon$$

Da die Funktion f eindeutig definiert ist, können die obigen Relationen gleichzeitig nicht vorkommen. Unsere Voraussetzung, daß weder (4. 6) noch

(4. 7) gültig ist, erweist sich also als unrichtig. Daraus folgt, daß entweder (4. 3) oder (4. 4) gelten muß.

Für die Berechnung der Funktionenwerte $f(E_i(u))$ bezeichne ich sie kurz mit

(4. 8) $$\varphi_i(u) \overset{\text{def}}{=} f(E_i(u)) \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

und ich zeige, daß die Funktion φ von dem Index i nicht abhängt. Dies folgt ohne weiteres aus der Matrizengleichung

$$E_k(u) = E_{ik} \cdot E_i(u) \cdot E_{ik} \quad \text{für} \quad i \neq k$$

und aus der Beziehung (4. 2). Wir können also auf der rechten Seite der Gleichung (4. 8) den Index i weglassen und diese in der Form

(4. 9) $$\varphi(u) \overset{\text{def}}{=} f(E_i(u)) \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

schreiben. Aus der Matrizengleichung $E_i(u) \cdot E_i(v) = E_i(u \cdot v)$ folgt dann, daß die Funktion φ der Gleichung

(4. 10) $$\varphi(u) \cdot \varphi(v) = \varphi(u \cdot v)$$

genügt. Da die Matrix $E_i(1) = E$ ist, muß die Funktion φ die Bedingung

(4. 11) $$\varphi(1) = 1$$

erfüllen. Wird in die Gleichung (4. 10) $u = v = 0$ eingesetzt, so ergibt sich daraus die Relation

$$\varphi(0)^2 = \varphi(0)$$

aus welcher folgt, daß

(4. 12) $$\text{entweder} \quad \varphi(0) = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi(0) = 1$$

gilt. In dem § 6 wird gezeigt, daß (infolge der Bemerkung 1) nur die zweite Möglichkeit vorkommen kann.

Endlich will ich die Funktionenwerte $f(E_k^i(u))$ bestimmen. Zu diesem Zwecke setze ich

(4. 13) $$\psi_k^i(u) \overset{\text{def}}{=} f(E_k^i(u)) \quad \text{für} \quad i \neq k$$

und zeige, daß die Funktion ψ auch in diesem Falle von den Indizes i, k nicht abhängt. Wir ziehen die Matrizengleichungen

(4. 14) $$E_k^i(u) = E_{il} E_k^l(u) \cdot E_{il}$$

(4. 15) $$E_k^l(u) = E_{mk} E_m^l(u) \cdot E_{mk}$$

in Betracht,[1] die für $i \neq k$, $l \neq k$ und $l \neq m$ gültig sind. Aus den Beziehungen (4. 14), (4. 2) und der Gleichung (1. 5) folgt die Relation

$$\psi_k^i(u) = f(E_k^i(u)) = f(E_{il})^2 f(E_k^l(u)) = \psi_k^l(u). \tag{4.16}$$

Ähnlich ergibt sich aus den Beziehungen (4. 15), (4. 2) und aus der Gleichung (1. 5)

$$\psi_k^l(u) = \psi_m^l(u). \tag{4.17}$$

Die Gleichungen (4. 16) und (4. 17) geben uns die Relationen

$$\psi_k^i(u) = \psi_m^l(u) \tag{4.18}$$

die für $i \neq k$, $l \neq k$ und $l \neq m$ gültig sind. Die Ungleichungen $i \neq k$ und $l \neq m$ kann man nicht weglassen, da die Funktionen ψ_k^i nur dann definiert sind (vergl. (4. 13)), wenn der obere Index von dem unteren verschieden ist. Um die Relationen (4. 18) auch im Falle $k = l$ zu beweisen, benötigen wir die Matrizengleichungen

$$E_k^i(u) = E_{ik} E_i^k(u) \cdot E_{ik} \tag{4.19}$$

$$E_i^k(u) = E_{im} E_m^k(u) \cdot E_{im} \tag{4.20}$$

aus welchen ähnlich wie vorher

$$\psi_k^i(u) = \psi_m^k(u) \tag{4.21}$$

folgt.

Die Gleichungen (4. 18) und (4. 21) zeigen, daß die Funktion ψ_k^i von den Indizes i, k unabhängig ist. Darum kann man in den weiteren Überlegungen diese Indizes weglassen und kurz

$$\psi(u) \overset{\text{def}}{=} \psi_k^i(u) \quad \text{für} \quad i, k = 1, 2, \ldots, n \quad i \neq k \tag{4.22}$$

schreiben. Infolge der Matrizengleichung

$$E_k^i(u) \cdot E_k^i(v) = E_k^i(u + v)$$

erfüllt die Funktion ψ die Gleichung

$$\psi(u) \cdot \psi(v) = \psi(u + v). \tag{4.23}$$

Weiter werde ich zeigen, daß die Funktion ψ identisch gleich 1 ist:

$$\psi(u) \equiv 1. \tag{4.24}$$

Da die Matrix $E_k^i(0) = E$ ist, muß die Relation

$$\psi(0) = 1 \tag{4.25}$$

[1]) In diesen Formeln soll mann über gleiche Indizes *nicht* summieren.

gelten. Setzen wir in der Gleichung (4. 23) $v=-u$ ein, dann erhält man, wegen (4. 25), die Identität

$$\psi(u)\cdot\psi(-u)=1,$$

die besagt, daß die Funktion in keinem Punkte verschwindet, d. h.

$$\psi(u)\neq 0 \quad \text{für jedes } u \tag{4.26}$$

ist. Aus der Matrizengleichung

$$E_{n-1}^{n}(u)=E_n\left(\frac{1}{2}\right)E_{n-1}^{n}(2u)\,E_n(2)$$

ergibt sich noch folgende Beziehung

$$\psi(u)=\varphi\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\psi(2u)\cdot\varphi(2). \tag{4.27}$$

Wegen (4. 10) und (4. 11) haben wir $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\varphi(2)=1$. Infolgedessen erhält man aus (4. 27)

$$\psi(u)=\psi(2u). \tag{4.28}$$

Anderseits ist aber

$$\psi(u)^2=\psi(2u), \tag{4.29}$$

wenn wir in der Gleichung (4. 23) $u=v$ einsetzen. Durch Vergleichen der linken Seiten von (4. 28) und (4. 29) erhalten wir die Identität

$$\psi(u)=\psi(u)^2$$

aus welcher, wegen (4. 26), die Gleichheit (4. 24) folgt.

§ 5. Das Verhalten der Funktion f bei den elementaren Umformungen der Matrix.

Die vorigen Überlegungen lassen uns jetzt die nächststehenden Folgen gewinnen:

Folge 1. *Genügt die Funktion f der Funktionalgleichung* (1. 5), *so ändert sich bei jeder elementaren Umformung höchstens das Vorzeichen dieser Funktion.* — Genauer gesagt,

a) *bei der Transposition der Zeilen (Spalten) bleibt der Wert von f ungeändert (falls diese die Eigenschaft* (4. 3) *hat) oder es ändert sich das Vorzeichen von f (falls sie die Eigenschaft* (4. 4) *hat);*

b) *multipliziert man eine beliebige Zeile (Spalte) mit einer Zahl und addiert man sie zu einer anderen Zeile (Spalte), so ändert sich der Wert von f nicht,*

c) *multipliziert man eine Zeile (Spalte) mit einer von Null verschiedenen Zahl und dividiert man gleichzeitig eine andere Zeile (Spalte) mit derselben Zahl, so ändert sich der Wert von f nicht.*[2])

Folge 2. *Genügt die Funktion f der Gleichung* (1.5) *und hat sie die Eigenschaft* (4.3), *so ist aie durch* (4.9) *definierte Funktion φ eine gerade Funktion, hat dagegen f die Eigenschaft* (4.4), *so ist φ eine ungerade Funktion.*

BEWEIS. Ich werde zeigen, daß die Funktion φ für jedes u entweder die Beziehung

$$\varphi(-u)=\varphi(u) \tag{5.1}$$

oder

$$\varphi(-u)=-\varphi(u) \tag{5.2}$$

erfüllt, wenn die Funktion die Eigenschaft (4.3) bzw. die Eigenschaft (4.4) hat.

Es sei eine beliebige von Null verschiedene Zahl u gegeben. Dann kann man vier Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ finden, die den Relationen

$$u=\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}\neq 0$$

$$\alpha\neq 0 \quad \text{und} \quad \beta\neq 0$$

genügen. Hat die Funktion f die Eigenschaft (4.3), so genügt sie der Gleichung[3])

$$f\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \alpha & \beta \\ & & & \gamma & \delta\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \beta & \alpha \\ & & & \delta & \gamma\end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

Hat dagegen die Funktion f die Eigenschaft (4.4), so muß sie die Identität

$$f\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \alpha & \beta \\ & & & \gamma & \delta\end{pmatrix}=-f\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \beta & \alpha \\ & & & \delta & \gamma\end{pmatrix} \tag{5.4}$$

erfüllen.

---

[2]) Der Beweis folgt ohne weiteres aus den Überlegungen der § 3 und 4.

[3]) In diesen Formeln sind die nichtausgeschriebenen Elemente der Matrizen gleich Null.

Auf Grund des Hilfssatzes 1 erhalten wir noch

$$(5.5)\qquad f\begin{pmatrix}1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \alpha\ \beta \\ & & & \gamma\ \delta\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & u\end{pmatrix} = \varphi(u)$$

und

$$(5.6)\qquad f\begin{pmatrix}1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \beta\ \alpha \\ & & & \delta\ \gamma\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & -u\end{pmatrix} = \varphi(-u).$$

Aus (5. 3), (5. 5) und (5. 6) folgt (5. 1). Die Beziehungen (5. 4), (5. 5) und (5. 6) geben uns (5. 2). Auf diese Weise ist die Folge 2 bewiesen worden.

§ 6. Der Beweis des Satzes.

Zuerst beweise ich den Satz im Falle

$$(6.1)\qquad \Delta = \mathrm{Det}(x_k^i) \neq 0$$

Gemäß dem Hilfssatze 1 kann man die Matrix $X = \|x_k^i\|$ durch elementare Umformungen in die Gestalt $E_n(\Delta)$ bzw. $E_n(-\Delta)$ überführen. Es sind nur zwei Fälle möglich. Die Funktion f hat die Eigenschaft (4. 3) oder sie hat die Eigenschaft (4. 4). Im ersten Falle ändert sich f bei den elementaren Umformungen nicht (Folge 1). Es muß also entweder

$$(6.2)\qquad f(X) = f(E_n(\Delta)) = \varphi(\Delta)$$

oder

$$(6.3)\qquad f(X) = f(E_n(-\Delta)) = \varphi(-\Delta)$$

sein. In dem betrachteten Falle ist aber die Funktion φ gerade (Folge 2). Darum kann man (6. 2) und (6. 3) in einer einzigen Gestalt

$$(6.4)\qquad f(X) = \varphi(\Delta)$$

ausdrücken.

Falls die Funktion f (4. 4) erfüllt, so ändert sie ihren Wert nur bei der Transposition der Zeilen (Spalten) (Folge 1). Infolgedessen können nur zwei Möglichkeiten,

$$f(X) = f(E_n(\Delta)) = \varphi(\Delta)$$

oder

$$f(X) = -f(E_n(-\Delta)) = -\varphi(-\Delta),$$

vorkommen. Jetzt ist φ eine ungerade Funktion (Folge 2) und beide Möglichkeiten geben uns wieder (6. 4). Der Satz ist also für die Matrizen, welche (6. 1) erfüllen, bewiesen.

Es soll noch gezeigt werden, daß dieser Satz auch dann richtig ist, wenn

$$\Delta = \mathrm{Det}(x_k^i) = 0 \tag{6.5}$$

ist. Zu diesem Zwecke beweise ich, daß im Falle (6. 5) die Relationen

$$f(\Delta) = 0 \tag{6.6}$$

$$\varphi(0) = 0 \tag{6.7}$$

gültig sind.[4])

Zuerst beweise ich noch den folgenden

Hilfssatz 5. *Ist die durch* (4. 9) *definierte Funktion identisch gleich* 1,

$$\varphi(u) \equiv 1, \tag{6.8}$$

so muß die Funktion f auch identisch gleich 1 *sein:*

$$f(X) \equiv 1. \tag{6.9}$$

Beweis. Ist $\Delta = \mathrm{Det}(X) \neq 0$, *so folgt* (6. 9) *aus der* bewiesenen Beziehung (6. 4) und aus der Voraussetzung (6. 8). Es genügt also diesen Hilfssatz nur für Matrizen mit verschwindender Determinante

$$\Delta = \mathrm{Det}\, X = 0 \tag{6.10}$$

zu beweisen. Es sei eine solche Matrix X gegeben. Infolge des Hilfssatzes 1 kann man diese Matrix durch die elementaren Umformungen in eine diagonale normale Matrix

$$E(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}, 0) \tag{6.11}$$

überführen. Bei den elementaren Umformungen ändert sich aber der Wert der Funktion f nicht, weil wir aus dem ersten Teil dieses Beweises die Beziehung

$$f(E_{ik}) = 1 \tag{6.12}$$

erhalten haben ($\mathrm{Det}\, E_{ik} \neq 0$), die besagt, daß f die Eigenschaft (4. 3) hat. Also genügt es, die Identität (6. 9) nur für die Matrizen von der Form (6. 11) zu zeigen, d. h. es soll die Relation

$$f\big(E(\delta_1, \ldots, \delta_{n-1}, 0)\big) = 1 \tag{6.13}$$

bewiesen werden. Diesen Beweis führe ich mit Hilfe der vollständigen Induk-

---

[4]) Dieses Resultat hat Prof. S. Gołąb schon vorher erhalten.

tion hinsichtlich der Zahl der Nullen, die in der Folge

$$(6.14)\qquad \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}$$

auftreten. Gibt es in (6. 14) keine Nullen, so folgt (6. 13) aus (6. 8). Ich nehme also an, daß (6. 13) auch dann richtig ist, wenn genau p Nullen $0 < p < n-1$ in der Folge (6. 14) vorkommen, und ich zeige, daß (6. 13) richtig bleibt, wenn $(p+1)$ Nullen in (6. 14) auftreten. Infolge von (6. 12) kann man voraussetzen, daß die p ersten Elementen von (6. 14) gleich Null sind, d. h.

$$(6.15)\qquad f(E(\underset{1}{0}, \ldots \underset{p}{0}, \underset{p+1}{1}, \ldots, \underset{n-1}{1}, 0)) = 1$$

ist. Aus der Matrizengleichung

$$E_{p+1}(0) \cdot E(\underset{1}{0}, \ldots, \underset{p}{0}, \underset{p+1}{1}, \ldots, \underset{n-1}{1}, 0) = E(\underset{1}{0}, \ldots, \underset{p}{0}, \underset{p+1}{0}, \underset{p+2}{1}, \ldots, \underset{n-1}{1}, 0)$$

folgt die Beziehung

$$\varphi(0) f(E(\underset{1}{0}, \ldots, \underset{p}{0}, \underset{p+1}{1}, \ldots, \underset{n-1}{1}, 0)) = f(E(\underset{1}{0}, \ldots, \underset{p}{0}, \underset{p+1}{0}, \underset{p+2}{1}, \ldots, \underset{n-1}{1}, 0)).$$

Auf Grund der Voraussetzungen (6. 8) und (6. 15) erhält man daraus

$$(6.16)\qquad f(E(\underset{1}{0}, \ldots, \underset{p}{0}, \underset{p+1}{0}, \underset{p+2}{1}, \ldots, \underset{n-1}{1}, 0)) = 1.$$

Also gilt (6. 13) auch dann, wenn die Folge (6. 14) $(p+1)$ Nullen besitzt. Durch vollständige Induktion ergibt sich, daß (6. 13) für eine beliebige Zahl von Nullen in (6. 14) richtig ist. Der Hilfssatz 5 ist auf diese Weise bewiesen.

Im folgenden will ich (6. 6) und (6. 7) zeigen. Zunächst beweise ich (6. 7) auf indirekte Weise. Für den indirekten Beweis nehme ich an, daß (6. 7) nicht richtig ist, d. h.

$$(6.17)\qquad \varphi(0) \neq 0$$

ist. Auf Grund von (4. 12) muß dann

$$(6.18)\qquad \varphi(0) = 1$$

sein. Setzt man $v = 0$ in die Gleichung (4. 10) ein, so erhält man die Relation

$$\varphi(u) \cdot \varphi(0) = \varphi(0),$$

aus welcher, wegen (6. 18),

$$(6.19)\qquad \varphi(u) \equiv 1$$

folgt. Aus (6. 19) und aus dem Hilfssatz 5 ergibt sich dann die Beziehung

$$f(X) \equiv 1$$

die der Voraussetzung (1. 3) widerspricht. Also kann (6. 17) nicht richtig sein und es muß (6. 7) bestehen.

Um die Beziehung (6. 6) zu beweisen, nehmen wir eine Matrix X mit verschwindender Determinante in Betracht, und bezeichnen mit α den der Matrix X entsprechenden Wert von f:

$$f(X) = \alpha. \tag{6.20}$$

Mit Hilfe der elementaren Umformungen kann man diese Matrix in der Form (2. 1) darstellen (Hilfssatz 1). Nach der Folge 1 ändert sich bei den elementaren Umformungen höchstens das Vorzeichen von f. Es ist also

$$f(E(\delta_1, \ldots, \delta_{n-1}, 0)) = \pm\alpha. \tag{6.21}$$

Aus der Matrizengleichung

$$E_n(u) \cdot E(\delta_1, \ldots, \delta_{n-1}, 0) = E(\delta_1, \ldots, \delta_{n-1}, 0)$$

bekommen wir die Relation

$$\varphi(u) \cdot \alpha = \alpha,$$

welche in der Form

$$(\varphi(u) - 1) \cdot \alpha = 0 \tag{6.22}$$

geschrieben werden kann. Wäre $\varphi(u) \equiv 1$, so müßte auch die Funktion f identisch gleich 1 sein (Hilfssatz 5). Aber dies ist unmöglich, weil die Lösung $f(X) \equiv 1$ aus unseren Überlegungen ausgeschlossen wurde (Bemerkung 1). Also kann $\varphi(u)$ nicht identisch gleich 1 sein. Nach der Gleichung (6. 22) muß dann

$$\alpha = 0$$

sein. Die Beziehung (6. 6) wurde also bewiesen. Die Relationen (6. 6) und (6. 7) zeigen, daß unser Satz auch im Falle (6. 5) richtig ist. Also ist der Beweis des Satzes vollendet.

Literatur.

[1] K. Stéphanos, Sur une propriété caractéristique des déterminants, *Ann. Mat. Pura Appl.* (3) **21** (1913), 233—236.

[2] S. Gołąb, Sur l'équation fonctionnelle $f(X) \cdot f(Y) = f(X \cdot Y)$, Ann. Pol. Math. (unter der Presse).

[3] M. Bôcher, Einführung in die höhere Algebra, *Leipzig—Berlin*, 1910.

[4] W. Sierpiński, Zasady Algebry Wyzszej, *Warszawa*, 1951.

[5] A. C. Aitken, Determinants and matrices, *Edinburgh—London*, 1948.

(Eingegangen am 9. Februar, 1958.)