Bemerkung zur vorhergehenden Arbeit von M. Kucharzewski.

Herrn Professor O. Varga zum 50. Geburtstag gewidmet.

Von MAREK KUCZMA (Kraków).

Herr M. KUCHARZEWSKI hat in seiner Arbeit[1]) gezeigt, daß die Lösung der Funktionalgleichung

$$f(A)\cdot f(B)=f(BA)$$

wobei A und B quadratische Matrizen der Ordnung n sind und f die zu bestimmende skalare Funktion von n^2 Variablen bedeutet, von der Form

$$f(A)=\varphi(\Delta)$$

sein muß, wobei $\Delta=\operatorname{Det} A$ die Determinante der Matrix bedeutet, und $\varphi(u)$ eine beliebige, die Gleichung

$$\varphi(u)\varphi(v)=\varphi(uv)$$

befriedigende Funktion einer einzigen Variablen ist. Es ist möglich, dieses schöne Resultat auch auf einem kürzeren Wege zu erhalten. Es ist nämlich möglich, den für die Arbeit KUCHARZEWSKI's grundlegenden Hilfssatz durch eine stärkere Aussage zu ersetzen.

M. KUCHARZEWSKI betrachtet Umformungen von Matrizen, welche er, der Terminologie von M. BÔCHER[2]) folgend, elementare Umformungen nennt:

T_1. Multiplizieren beliebiger Zeile (Spalte) durch eine beliebige Zahl und Addieren zu einer anderen Zeile (Spalte).

T_2. Multiplizieren einer Zeile (Spalte) durch eine beliebige von Null verschiedene Zahl und gleichzeitiges Dividieren einer anderen Zeile (Spalte) durch dieselbe Zahl.

T_3. Transposition der Zeilen (Spalten).

---

[1]) M. KUCHARZEWSKI, Über die Funktionalgleichung $f(a^i_k)f(b^i_k)=f(b^i_\alpha a^\alpha_k)$, *Publ. Math. Debrecen*, 6 (1959), 181—198.

[2]) M. BÔCHER, Einführung in die höhere Algebra, *Leipzig—Berlin*, 1910, S. 59.

Die Umformungen T_1 und T_2 ändern den Wert der Determinante der Matrix nicht; bei der Umformung T_3 hingegen erfährt die Determinante eine Vorzeichenänderung. Letzterer Umstand ist eine Quelle besonderer Schwierigkeiten im Laufe der ganzen Arbeit.

Zweck der vorliegenden Note ist es, einen Weg zu zeigen, welcher die Vermeidung dieser Schwierigkeiten ermöglicht. Wir werden zeigen, daß die Umformung T_3 entbehrlich ist, insofern, daß sich jede Matrix, unter alleiniger Benutzung der Umformungen T_1 und T_2, sich auf die von KUCHARZEWSKI erhaltene Form bringen läßt.

Indem wir den Hilfssatz 1 aus der Arbeit von KUCHARZEWSKI durch den in dieser Note ausgesprochenen Satz ersetzen, können wir im weiteren Laufe der Arbeit auch noch die folgenden Vereinfachungen erzielen:

1. Man kann den Hilfssatz 2 weglassen.

2. Die Relation (4. 2) ist hinreichend; Formeln (4. 3) und (4. 4), sowie die auf diese folgenden Erwägungen sind unnötig.

3. Punkt a) der Folge 1, und die ganze Folge 2 können weggelassen werden.

4. Im § 6 ist im Falle (6. 1) ($\mathrm{Det}\,(x_k^i) \neq 0$) der Beweis des Satzes eine unmittelbare Folgerung aus der vorangehenden Erwägungen.

Nach diesen vorangeschickten Bemerkungen beweisen wir nun unseren

Satz. *Jede Matrix*

$$A = \|a_{ij}\| \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

kann unter ausschließlicher Benutzung der Umformungen T_1 *und* T_2 *auf die Form*

$$\begin{aligned} &\|d_{ij}\|, \\ &d_{ij} = 0 && \textit{für} \quad i \neq j \\ &d_{ii} = 0 \quad \textit{oder} \quad 1 && \textit{für} \quad i = 1, \ldots, n-1, \\ &d_{nn} = \Delta = \mathrm{Det}\,(a_{ij}) \end{aligned}$$

zurückgeführt werden. Im Falle $\Delta \neq 0$ *muß für* $i = 1, \ldots, n-1$, $d_{ii} = 1$ *gelten.*

BEWEIS. Wir werden diesen Satz durch Induktion bezüglich der Zeilen beweisen. Betrachten wir die erste Zeile. Ist $a_{1j} = 0$ für $j = 1, \ldots, n$ dann hat diese Zeile bereits die gewünschte Form. Andernfalls können wir annehmen, daß $a_{11} \neq 0$ ist, im Falle $a_{11} = 0$ und $a_{1j_0} \neq 0$, $j_0 > 1$, nämlich können wir die j_0-te Spalte zur ersten addieren (Umformung T_1). Nunmehr addieren wir die durch $-\dfrac{a_{1j}}{a_{11}}$ ($j = 2, \ldots, n$) multiplizierte erste Spalte zur j-ten Spalte.

Endlich multiplizieren wir die letzte Zeile durch a_{11}, wobei wir gleichzeitig die erste Zeile durch a_{11} dividieren (Umformung T_2). Damit haben wir die erste Zeile bereits auf die gewünschte Form gebracht.

Setzen wir nunmehr voraus, daß die ersten $k-1$ Zeilen $(1 < k \leqq n)$ bereits die gewünschte Form haben. Wir müssen mehrere Fälle betrachten.

a) $a_{kj} = 0$ für $j = 1, \ldots, n$. In diesem Falle hat also die k-te Zeile bereits die gewünschte Form.

b) $a_{kk} \neq 0$. In diesem Falle addieren wir die durch $-\frac{a_{kj}}{a_{kk}}$ multiplizierte k-te Spalte zur j-ten $(j = 1, \ldots, n, j \neq k)$. Durch diese Umformung wird der obere, bereits auf ihre entgültige Form gebrachte Teil der Matrix nicht beeinträchtigt, da kraft unserer Induktionshypothese für $i < k$, $a_{ik} = 0$ gilt. Endlich multiplizieren wir die letzte, und dividieren die k-te Zeile durch a_{kk}, wodurch die k-te Zeile in die gewünschte Form übergeführt wird.

c) $a_{kk} = 0$, aber es gibt einen Index $l > k$ derart, dass $a_{kl} \neq 0$. Wir addieren die l-te Spalte zur k-ten ($a_{il} = 0$ für $i < k$) und führen dadurch diesen Fall auf *b)* zurück.

d) $a_{kk} = 0$, $a_{kj} = 0$ für $j > k$, aber es gibt einen Index $l < k$, für welchen $a_{kl} \neq 0$ und $a_{ll} = 0$ ist. Hier verfahren wir ähnlich wie im Falle *c)*, da wegen des Verschwindens von a_{ll} auch sämtliche a_{il} für $i < k$ verschwinden, und somit der obere, bereits auf die gewünschte Form gebrachter Teil der Matrix unbeeinträchtigt bleibt.

e) $a_{kk} = 0$, $a_{kj} = 0$ für $j > k$, und für jeden Index $l < k$ für welchen $a_{kl} \neq$ ist, ist $a_{ll} = 1$. Wir addieren die durch $-a_{kl}$ multiplizierten l-ten Zeilen zu der k-ten. Dieses Verfahren führt uns zu einer Zeile, welche nur aus Nullen besteht. (Fall *a)*).

Damit haben wir alle möglichen Fälle aufgezählt, und wir sehen, daß es möglich ist, die Elemente jeder Zeile in Null überzuführen, mit etwaiger Ausnahme der Elemente der Hauptdiagonale, welche in Null oder Eins übergeführt werden können.

Die letzte Zeile kann ähnlich wie die übrigen behandelt werden. Der einzige Unterschied besteht darin, daß wir hier die Umformung T_2 nicht anwenden können. Darum machen wir zuletzt alle Elemente gleich Null mit Ausnahme von a_{nn}, dieses bleibt im allgemeinen von 0 und von 1 verschieden.

Da der Wert der Determinante bei den Umformungen T_1 und T_2 erhalten bleibt, können im Falle $\Delta \neq 0$ keine aus lauter Nullen bestehenden Zeilen auftreten, und es gilt offenbar $d_{nn} = \Delta$. Ist $\Delta = 0$ dann muß eine aus lauter Nullen bestehende Zeile auftreten ($d_{ii} = 0$), aber es ist möglich, daß $d_{nn} \neq$ $\neq 0 = \Delta$ ist. So müssen wir, um unseren Beweis vollständig zu gestalten, noch zeigen, daß es möglich ist, unter ausschließlicher Verwendung der

Umformungen T_1 und T_2 die Stellen zweier Elemente in der Hauptdiagonale der auf die Normalform gebrachten Matrix zu vertauschen. (Später können wir immer die entsprechende Zeile mit d_{nn} dividieren, wobei wir die letzte, bereits aus lauter Nullen bestehende Reihe mit derselben Zahl multiplizieren.) Dazu sind mehrere Schritte erforderlich, wie dies aus dem folgenden Schema erhellt:

Die Matrix ist in der Diagonalform gegeben:

$$\begin{array}{rl} & \begin{array}{cc} \;\;\;i\text{-te} & j\text{-te Spalte} \\ \;\;\;\vdots & \vdots \end{array} \\ \begin{array}{r} \\ i\text{-te Zeile} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \\ j\text{-te Zeile} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \\ \end{array} & \begin{Vmatrix} \ddots & & & & \\ & a_{ii} & \cdots & 0 & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & 0 & \cdots & a_{jj} & \\ & & & & \ddots \end{Vmatrix} \end{array}$$

Wir addieren die i-te Spalte zu der j-ten:

$$\begin{Vmatrix} \ddots & & & & \\ & a_{ii} & \cdots & a_{ii} & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & 0 & \cdots & a_{jj} & \\ & & & & \ddots \end{Vmatrix}$$

Wir subtrahieren die j-te Spalte von der i-ten[3]):

$$\begin{Vmatrix} \ddots & & & & \\ & 0 & \cdots & a_{ii} & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & -a_{jj} & \cdots & a_{jj} & \\ & & & & \ddots \end{Vmatrix}$$

Wir subtrahieren die j-te Zeile von der i-ten:

$$\begin{Vmatrix} \ddots & & & & \\ & a_{jj} & \cdots & a_{ii}-a_{jj} & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & -a_{jj} & \cdots & a_{jj} & \\ & & & & \ddots \end{Vmatrix}$$

Wir addieren die i-te Zeile zu der j-ten:

$$\begin{Vmatrix} \ddots & & & & \\ & a_{jj} & \cdots & a_{ii}-a_{jj} & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & 0 & \cdots & a_{ii} & \\ & & & & \ddots \end{Vmatrix}$$

---

[3]) Die Subtraktion einer Zeile (Spalte) bedeutet die Addition der durch -1 multiplizierten Zeile (Spalte).

Wir addieren die i-te Spalte zu der j-ten:

$$\begin{Vmatrix} \ddots & & & & \\ & a_{jj} & \cdots & a_{ii} & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & 0 & \cdots & a_{ii} & \\ & & & & \ddots \end{Vmatrix}$$

Und endlich subtrahieren wir die j-te Zeile von der i-ten:

$$\begin{Vmatrix} \ddots & & & & \\ & a_{jj} & \cdots & 0 & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & 0 & \cdots & a_{ii} & \\ & & & & \ddots \end{Vmatrix}.$$

Damit ist der Beweis vollendet.

(Eingegangen am 25. April 1958.)