Verdeckung einer Kugel durch Kugeln.

Dem besten Freund O. Varga zum 50. Geburtstag gewidmet.

Von L. FEJES TÓTH (Budapest).

Während eines Gesprächs mit dem Verfasser warf H. HORNICH das folgende interessante Proplem[1]) auf: Durch wieviele materielle (d. h. nicht übereinandergreifende) Einheitskugeln läßt sich eine ebensolche Kugel radial *verdecken,* in dem Sinne, daß jede vom Mittelpunkt der zu verdeckenden Kugel ausstrahlende Halbgerade eine Deckkugel treffen soll?

Trotz des völlig elementaren Charakters des Problems scheint die Bestimmung der gesuchten Mindestzahl M mit fast unüberwindlichen Schwierigkeiten verbunden zu sein. Im vorliegenden Aufsatz werden wir, als Korollar eines allgemeineren Resultats, die Ungleichung $M \geqq 19$ beweisen[2]) und einige weitere analoge *Tarnungsprobleme* betrachten.

Neben dem Problem der radialen Verdeckung erhebt sich sofort das Problem der totalen Verdeckung, bei dem verlangt wird, daß jede Halbgerade, die von einem Punkt der zu verdeckenden Kugel ausgeht, eine Deckkugel treffen soll. Wir wollen unsere Aufmerksamkeit ausschließlich auf radiale Verdeckungen richten und dementsprechend unter Verdeckung stets radiale Verdeckung verstehen. Die Menge der Deckkugeln werden wir gelegentlich auch *Wolke* nennen.

Wir bezeichnen die Mindestzahl der Einheitskugeln, mit denen eine Kugel K vom Radius r verdeckt werden kann, mit $M(r)$. Offensichtlich ist $M(r)$ eine nicht abnehmende Funktion von r. Ihr Wert ist aber für keine einzige Stelle des Intervalls $0 < r < \infty$ bekannt.

---

[1]) Dieses Problem ist mit dem Newton—Gregoryschen Dreizehnkugelproblem verwandt. Vgl. K. SCHÜTTE und B. L. van der Waerden: Das Problem der dreizehn Kugeln, *Math. Ann.* **125** (1953), 325—334.

[2]) Anderseits hat L. DANZER gezeigt, daß $M \leqq 50$. Eine Verdeckung durch 50 Kugeln entsteht, wenn man 12, 14 und 24 Kugeln „über" die Flächen, Ecken bzw. Kanten eines Rhombendodekaeders legt.

Die Zentralprojektion einer Deckkugel auf K (aus dem Zentrum von K) ist ein Kreis vom Winkelradius $\leqq \varrho$, wobei ϱ durch $\sin \varrho = 1/(1+r)$ gegeben ist. Folglich kann $M(r)$ nicht kleiner sein als die Mindestzahl der Kreise vom Radius ϱ, die eine Kugel völlig überdecken. Durch Heranziehung einer bekannten Abschätzungsformel[3]) erhalten wir auf diese Weise eine untere Schranke für $M(r)$:

Die Mindestzahl $M(r)$ der Einheitskugeln, mit denen eine Kugel vom Radius r verdeckt werden kann, genügt der Ungleichung

$$M(r) > \frac{12\alpha}{6\alpha - \pi},$$

wobei α durch die Relationen

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1+r}{\sqrt{6r+3r^2}}, \qquad \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

gegeben ist.

Für $r=1$ haben wir, mit Rücksicht auf $\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{2}{3} \approx 33^\circ\, 41'\, 24'' = 33{,}69^\circ$, $M(1) > 18{,}2\ldots$ und folglich $M \geqq 19$. Ferner ergibt sich aus dem obigen Satz die Ungleichung

$$M(r) > \frac{8\pi r^2}{\sqrt{27}},$$

nach der die Kugelanzahl pro Flächeneinheit der zu verdeckenden Kugel stets $> 2/\sqrt{27}$ ist. Diese untere Schranke der *Anzahldichte* läßt sich im Grenzfall $r \to \infty$ erreichen. In der sparsamsten Kugelverdeckung der Ebene (von der Anzahldichte $2/\sqrt{27}$) bilden die Kugelprojektionen die Zellenumkreise eines regelmäßigen Sechseckmosaiks. Eine derartige Kugellagerung läßt sich durch Übereinanderlegung von drei kongruenten Kugelschichten realisieren (Fig. 1).

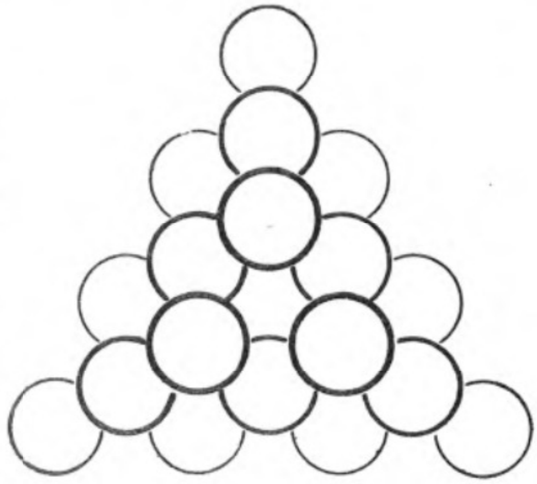

Fig. 1.

Vollständigkeitshalber lassen wir hier den Beweis unseres Satzes folgen. Wir setzen voraus, daß die Einheitskugel E von den um die Punkte $O_1, \ldots, O_n$ geschlagenen Kreisen $K_1, \ldots, K_n$ vom Radius $\leqq \varrho$ überdeckt ist. H sei die konvexe Hülle der Punkte $O_1, \ldots, O_n$. Da die eventuell auftretenden, mehr

[3]) S. z. B. L. Fejes Tóth, Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum, *Berlin—Göttingen—Heidelberg*, 1953.

als dreiseitigen Flächen von H durch einander nicht kreuzende Diagonale in Dreiecke zerlegt werden können, läßt sich H stets als ein konvexes Polyeder mit $2n-4$ Dreiecksflächen ansehen.

Wir richten jetzt unsere Aufmerksamkeit auf das sphärische Netz von H, sowie auf die Fläche $O_iO_jO_k$ vom größten Inhalt dieses Netzes. Der Inhalt Δ dieser Fläche ist offenkundig $\geqq 4\pi/(2n-4)$. Anderseits sei bemerkt, daß der Umkreis U von $O_iO_jO_k$ keinen der Punkte $O_1, \ldots, O_n$ in seinem Inneren enthält, da sonst die Ebene $O_i\,O_j\,O_k$ keine Stützebene des Punktsystems $O_1, \ldots, O_n$ sein könnte. Da aber der Mittelpunkt von U in wenigstens einem der Kreise $K_1, \ldots, K_n$ enthalten ist, ist der Radius von $U \leqq \varrho$. Deshalb kann Δ nicht den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks vom Umkreisradius ϱ übertreffen:

$$\Delta \leqq 2\pi - 6 \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3}\cos\varrho) = 2\pi - 6 \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{6r+3r^2}}{1+r} =$$
$$= 2\pi - 6\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 6\alpha - \pi.$$

Wir haben also $2\pi/(n-2) \leqq \Delta \leqq 6\alpha - \pi$, woraus sich die gewünschte Abschätzung $n \geqq 12\alpha/(6\alpha - \pi)$ ergibt. Da aber die Kugelprojektionen nicht alle vom Radius $=\varrho$ sein können, kann $M(r)$ diese untere Schranke von n nicht erreichen.

Nachdem das asymptotische Verhalten von $M(r)$ für $r \to \infty$ bekannt ist, scheint auch die Bestimmung des Grenzwertes

$$m = \lim_{r \to 0} M(r)$$

von Interesse zu sein. Die Zahl m läßt sich als die Mindestzahl derjenigen kongruenten Kugeln interpretieren, durch die ein außerhalb der Kugeln liegender Punkt verdeckt werden kann. Es sei hier gezeigt, daß $4 \leqq m \leqq 6$ ausfällt. Die Entscheidung in der einfach klingenden Frage, ob ein Punkt mit vier, bzw. fünf gleich großen Kugeln verdeckt werden kann oder nicht, scheint schwieriger zu sein, als es sich im ersten Augenblick vermuten liesse.

Die Ungleichung $m \geqq 4$ ist mit der einleuchtenden Tatsache gleichwertig, daß sich eine Kugel nicht durch drei offene Halbkugeln überdecken läßt. Deshalb haben wir nur zu zeigen, daß ein Punkt mit 6 Kugeln verdeckt werden kann.

Wir betrachten zwei einander im Punkt O berührende Einheitskugeln A und B, schlagen um O eine Kugel K vom Radius[4]) 4 und betrachten die

[4]) Bei der Wahl dieses Kugelhalbmessers haben wir nur darauf zu achten, daß K die Kugeln A, B und die noch hin zu zufügenden Kugeln enthalten soll.

Menge S_p derjenigen Punkte von K, von denen aus ein fester Punkt P von B sichtbar ist. Wir lassen P auf einer in O endenden sphärischen Strecke gegen O konvergieren und betrachten die Grenzfigur $S = \lim_{P \to O} S_p$. Offensichtlich liegt S auf demjenigen Großkreis G von K, der durch die gemeinsame Tangentialebene von A und B ausgeschnitten wird. Eine genauere Überlegung zeigt, daß S ein Bogen von G von der Öffnung $270°$ ist[5]).

Um dies einzusehen betrachten wir denjenigen Kreis k, den die in P gelegte Tangentialebene von B aus der Kugel A ausschneidet. Wir haben nur zu zeigen, daß der Sichtwinkel des Kreises k bezüglich P bei dem betrachteten Grenzübergang gegen $90°$ strebt.

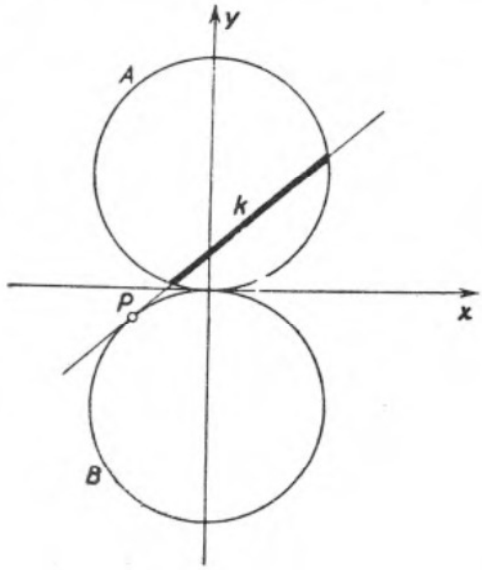

Fig. 2.

Wir legen durch P und die Mittelpunkte von A und B eine Ebene e und führen in e ein rechtwinkliges Koordinatensystem xy mit dem Ursprung O ein, dessen y-Achse die Kugelmittelpunkte enthält (Fig. 2.). Die Ebene e schneidet A und B in je einem Kreis, dessen „untere" bzw. „Obere" Hälfte sich durch folgende Gleichungen darstellen läßt:

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + \cdots,$$

$$-y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + \cdots.$$

Bezeichnen wir die Abszisse von P mit $-\xi$, so ist die Gleichung der zu P gehörigen Tangente des Kreises eB

$$y = \left(\frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^4 + \cdots\right) + \left(\xi + \frac{1}{2}\xi^3 + \cdots\right)x.$$

Folglich genügen die Abszissen x_1 und x_2 der Schnittpunkte dieser Tangenten mit dem Kreis eA der Gleichung

$$\left(\frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^4 + \cdots\right) + \left(\xi + \frac{1}{2}\xi^3 + \cdots\right)x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + \cdots.$$

Setzen wir $x = \xi z$, so geht diese Gleichung in

$$\left(1 + \frac{1}{4}\xi^2 + \cdots\right) + \left(2 + \xi^2 + \cdots\right)z - z^2 - \frac{1}{4}\xi^2 z^4 + \cdots = 0$$

[5]) Diese, für die ganze Konstruktion entscheidende Bemerkung verdanke ich A. Heppes.

über, dessen Wurzeln für $\xi \to 0$ gegen die Wurzeln der Gleichung

$$1+2z-z^2=0,$$

d. h. gegen $1+\sqrt{2}$ und $1-\sqrt{2}$ streben. Deshalb strebt der Quotient $(x_1+\xi)/(x_2+\xi)$, der das Verhältnis des maximalen und minimalen Abstandes zwischen P und einem Punkt des Kreises k darstellt, gegen

$$\frac{(1+\sqrt{2})\xi+\xi}{(1-\sqrt{2})\xi+\xi}=\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}.$$

Das ist aber, im Einklang mit unserer Behauptung, eben das betrachtete Verhältnis für einen Punkt und einen Kreis vom Sichtwinkel 90° bezüglich dieses Punktes.

Nun verdeckt eine dritte, A und B berührende Einheitskugel vor der „Lichtquelle" O einen Bogen von G von der öffnung $\arccos\frac{1}{3} > 70^\circ > \frac{1}{4}270^\circ$. Deshalb läßt sich durch vier Einheitskugeln C, D, E und F nicht nur der Bogen S, sondern auch eine Umgebung von S verdecken. Liegt also P genügend nahe bei O, so verdecken die Kugeln $A, \ldots, F$ eine ganze Umgebung von P und demzufolge auch eine ausserhalb aller Deckkugeln liegenden Punkt.

Wir wenden uns jetzt einem anderen Tarnungsproblem zu, indem wir die Kugel K vom Radius r so mit Einheitskugeln verdecken wollen, daß der Radius R der mit K konzentrischen kleinsten Kugel, die die Einheitskugeln enthält, möglichst klein sei. Wird die Differenz $R-r$ *Dicke* der Kugelwolke genannt, so heißt das Problem: zu einer vorgegebenen Kugel vom Radius r eine Einheitskugelwolke von minimaler Dicke $D(r)$ zu finden.

Offenkundig gilt $D(r)>2$; anderseits ist es leicht einzusehen, daß $D(r)$ auch von oben gleichmäßig beschränkt is. Aber genauere Schranken, ganz zu schweigen von $\inf_{r>0} D(r)$ und $\sup_{r>0} D(r)$, sind nicht bekannt.

Das oben betrachtete Sechskugelbeispiel zeigt, daß

$$\overline{\lim_{r\to 0}}\, D(r) \leqq 1+\sqrt{3}.$$

Anderseits werden wir zeigen, daß

$$\underline{\lim_{r\to\infty}}\, D(r) \geqq 2+\sqrt{2}$$

ausfällt. Dies folgt aus dem Beweis des folgenden Satzes, der die Lösung des entsprechenden Problems für die Verdeckung der Ebene enthält.

Die Dicke einer ebenen Einheitskugelwolke ist stets $\geqq 2+\sqrt{2}$. *Gleichheit gilt nur dann, wenn die Wolke aus zwei quadratischen, einander berührenden Kugelschichten besteht.*

Dabei bedeutet eine ebene Kugelwolke von der Dicke D eine Menge von Kugeln, die so zwischen zwei parallelen Ebenen vom Abstand D eingelagert sind, daß die Menge gegenüber senkrechten Strahlen impermeabel sei. Es ist bemerkenswert, daß die extremale Wolke einen Teil einer dichtesten gitterförmigen Kugellagerung[6]) bildet (Fig. 3.).

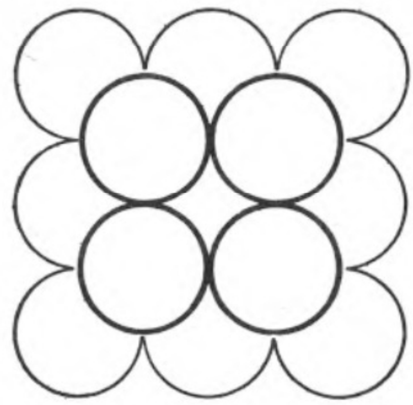

Fig. 3.

Zum Beweis denken wir uns die Wolke in einer horizontalen Lage und greifen drei Kugeln A, B und C heraus, die von einer vertikalen Geraden getroffen werden. Wir bezeichnen die senkrechte Projektionen der Kugelmittelpunkte auf eine horizontale Ebene ebenfalls mit A, B und C und die Seiten des Dreiecks ABC mit a, b und c. Wir setzen voraus, daß die Kugel A nicht höher als B und nicht tiefer als C liegt, daß also von den drei Kugeln B die höchste, A die mittlere und C die tiefste ist. Dann ist die Niveaudifferenz zwischen den Kugeln B und C einerseits $\geqq \sqrt{4-a^2}$, anderseits aber auch $\geqq \sqrt{4-b^2}+\sqrt{4-c^2}$. Wir zeigen, daß

$$\max\left(\sqrt{4-a^2}, \sqrt{4-b^2}+\sqrt{4-c^2}\right) \geqq \sqrt{2}.$$

Mit Rücksicht auf die Tatsache, daß die Kugelprojektionen einen gemeinsamen Punkt haben, liegt ABC in einem Einheitskreis E. Wir können aber annehmen, daß ABC dem Kreis E einbeschrieben ist, weil sonst es durch ein E einbeschriebenes Dreieck ersetzt werden kann, dessen Seiten $\geqq a$, $\geqq b$ und $\geqq c$ ausfallen.

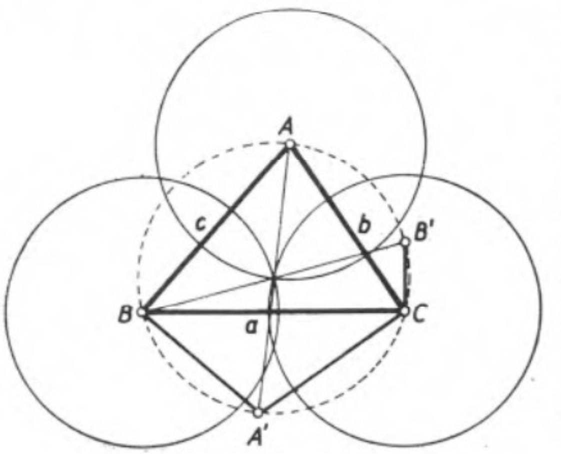

Fig. 4.

Wir betrachten im Umkreis des Dreiecks ABC die den Punkten A und B diametral gegenüberliegenden Punkte A' und B' (Fig. 4). Dann ist $\sqrt{4-a^2} = B'C$, $\sqrt{4-b^2} = CA'$, $\sqrt{4-c^2} = A'B$. Folglich gilt, im Hinblick auf

$$\sqrt{4-b^2}+\sqrt{4-c^2} = CA' + A'B \geqq CB,$$

die Umgleichung

$$\max\left(\sqrt{4-a^2}, \sqrt{4-b^2}+\sqrt{4-c^2}\right) \geqq \max(B'C, CB).$$

---

6) S. z. B. D. Hilbert und S. Cohn-Vossen: Anschauliche Geometrie, *Berlin*, 1932, oder das unter[3]) angeführte Buch.

Nun erreicht aber $\max(B'C, CB)$ sein Minimum offensichtlich im Fall $B'C = CB = \sqrt{2}$, womit gezeigt ist, daß die Dicke der Wolke tatsächlich $\geqq 2+\sqrt{2}$ ausfällt. Der Fall der Gleichheit leuchtet nach den obigen Überlegungen ein.

Zum Vergleich rechnen wir die Anzahldichte A der betrachteten Wolke von der Dicke $2+\sqrt{2}$ aus: $A = 1/2 > 2/\sqrt{27} = 0{,}385\ldots$. Dagegen ist die kleinstmögliche Dicke D einer sparsamsten ebenen Einheitskugelwolke (von der Anzahldichte $2/\sqrt{27}$): $D = 4 > 2+\sqrt{2} = 3{,}414\ldots$.

Eine weitere charakteristische Maßzahl einer ebenen Einheitskugelwolke von der Anzahldichte A und Dicke D ist die Volumendichte $V = \frac{4\pi}{3} A:D$. Deise kann natürlich nicht die Dichte der dichtesten Kugellagerung übertreffen, die nach einer wohlbegründeten Vermutung $\pi/\sqrt{18} = 0{,}740\ldots$ beträgt. Für die oben betrachteten beiden Wolken ist $V = 2\pi/3(2+\sqrt{2}) = 0{,}614\ldots$ bzw. $V = 2\pi/3\sqrt{27} = 0{,}402\ldots$.

Wie groß ist die minimale Dicke einer Einheitskugelwolke, die eine Ebene total verdeckt? Derartigen Problemen stehen wir ziemlich ratlos gegenüber.

(Eingegangen am 3. September 1958.)