Über die Charakterisierung der assoziativen Funktionen von mehreren Veränderlichen.

Herrn Professor Dr. O. Varga zum 50. Geburtstag gewidmet.

Von ENDRE VINCZE (Miskolc).

1. Eine in der Menge H definierte Operation

$$w = u * v \qquad (u, v, w \in H) \tag{1}$$

nennt man eine assoziative Operation, wenn die Relation

$$(u * v) * w = u * (v * w) \tag{2}$$

für alle in H befindlichen Elemententripel u, v, w gilt. Wenn u, v, w in (1) reelle Zahlen eines Intervalles I sind und (2) gilt, dann kann man die Operation (1) eine *reelle assoziative Funktion* $F(u, v)$ *von zwei Veränderlichen* nennen, *die* J. ACZÉL [1] *charakterisiert hat*. Er bewies (vgl. auch D. TAMARI [16]) den folgenden grundlegenden

Satz 1. *Genügt die reelle Funktion* $F(x, y)$ $(x, y, F(x, y) \in I)$ *von zwei Veränderlichen den folgenden zwei Bedingungen:*

a_1) *ist die Funktion F stetig und streng monoton in beiden Veränderlichen;*

a_2) *ist die Funktion F assoziativ, d. h. gilt* (2) *für*

$$u * v = F(u, v);$$

dann kann man die Funktion F in der Form

$$F(x, y) = x * y = \varphi^{-1}[\varphi(x) + \varphi(y)] \tag{3}$$

schreiben, wo $\varphi(x)$ $(x, \varphi \in I)$ *und ihre Umkehrfunktion* $\varphi^{-1}(x)$ *stetig und streng monoton sind.*

Wenn es auch ein (und nur ein) Element e gibt, für das

a_3) $F(e, x) = e * x = x$ *(oder* $F(x, e) = x * e = x$*) gilt, d. h.* $\varphi(e) = 0$ *ist,* dann sagt man, daß die Operation $x * y$ (oder die Funktion $F(x, y)$) eine stetige, reguläre Halbgruppe mit Einheitselement bildet.

Bisher sind mehrere Verallgemeinerungen des Satzes 1 bekannt (siehe z. B. [2], [8], [14], usw.). In dieser Arbeit wollen wir eine weitere Verallgemeinerung des Satzes 1 für Funktionen F von mehreren Veränderlichen angeben, so daß wir von F einige den a$_1$), a$_2$), a$_3$) entsprechende Bedingungen fordern.

2. In einer gegebenen, nicht-leeren Menge H sei für eine feste natürliche Zahl $n(\geqq 2)$ jedem geordneten System $u_1, u_2, \ldots, u_n (\in H)$ von Elementen ein Element u der Menge, als ihr *„in H definiertes Produkt mit n Faktoren"*, zugeordnet. Dieses Produkt schreiben wir kurz

$$u = u_1 u_2 \ldots u_n \qquad (u, u_1, \ldots, u_n \in H). \tag{4}$$

W. Dörnte [6] hat die folgende Definition eingeführt:

Definition. *Die Operation* (4) *nennt man eine assoziative Operation, wenn die Relationen*

$$\begin{cases} (u_1 \ldots u_n) u_{n+1} \ldots u_{2n-1} = u_1 \ldots u_k (u_{k+1} \ldots u_{k+n}) u_{k+n+1} \ldots u_{2n-1} = \\ = u_1 \ldots u_{n-1} (u_n \ldots u_{2n-1}) \quad (k = 1, \ldots, n-2;\, n \geqq 3;\, u_1, \ldots, u_{2n-1} \in H) \end{cases} \tag{5}$$

für alle $(2n-1)$*-Tupeln* $u_1, \ldots, u_{2n-1}$ *von Elementen in H gelten.*

Es ist offenbar, daß diese Definition eine Verallgemeinerung des Assoziativgesetzes (2) ist.

Wir können ohne Gefahr des Mißverständnisses die Produkt-Bezeichnung

$$F(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \ldots x_n, \tag{6_1}$$

ferner, wenn einige von den Faktoren gleich sind, die Bezeichnung

$$F(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{\nu_1\text{-mal}}, \underbrace{x_2, \ldots, x_2}_{\substack{\nu_2\text{-mal} \\ (\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_k=n)}}, \ldots, \underbrace{x_k, \ldots, x_k}_{\nu_k\text{-mal}}) = x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_k^{\nu_k} \tag{6_2}$$

benützen.

Für die Funktionen F von n Veränderlichen, die im Sinne (5) assoziativ sind, ist eine Verallgemeinerung des Satzes 1 der folgende

Satz 2. *Die für reelle Zahlen definierte Funktion* $F = x_1 x_2 \ldots x_n$ *von* n *Veränderlichen genüge den folgenden Bedingungen:*

a) *der Definitionsbereich der Funktion F ist für alle Veränderlichen das reelle Intervall* $I_1 \equiv (a_1, b_1)$, *und ihr Wertevorrat ist* $I_2 \equiv (a_2, b_2)$ *mit* $I_1 \supseteqq I_2$;
b) *die Funktion F ist stetig und streng monoton in allen Veränderlichen;*
c) *es gibt (mindestens) ein Element* $e (\in I_1)$ *für das* $e^n = e$ *gilt;*
d) *die Funktion F ist assoziativ, d. h. es gilt* (5).

Dann kann man die Funktion F für gerade n in der Form

$$(7_1)\qquad F(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \ldots x_n = \varphi^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\right]$$

darstellen, für ungerade n gilt eine der folgenden Darstellungen

$$(7_1)\qquad F(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \ldots x_n = \varphi^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\right],$$

$$(7_2)\qquad F(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \ldots x_n = \psi^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\psi(x_i)\right],$$

wo die Funktionen $\varphi(x), \psi(x)$ $(x \in I_1)$ *und folglich auch ihre Umkehrfunktionen* $\varphi^{-1}(x), \psi^{-1}(x)$ *stetig und streng monoton sind, und* $\varphi(e) = 0$ *ist.*

Den Beweis des Satzes 2, der mit **3**, **4** und **5** vorbereitet wird, geben wir in **6** an.

3. Vor allem gilt das folgende

Lemma 1. *Wenn die Funktion F die Eigenschaften* a), b), c), d) *hat, dann gelten die Relationen*

$$(8)\qquad e^{n-1}x = x, \ \textit{und}\ xe^{n-1} = x \qquad (x \in I_1)$$

für alle x, d. h. die Funktion F hat ein „links-, bzw. rechtsseitiges Einheitselementsystem".

Zum Beweis des Lemmas 1 können wir wegen der Eigenschaften c), d)

$$e^{n-1}x = e^{n-2}(e^n)x = e^{n-1}(e^{n-1}x),$$

bzw.

$$xe^{n-1} = x(e^n)e^{n-2} = (xe^{n-1})e^{n-1}$$

schreiben, woraus man die Richtigkeit des Lemmas auf Grund der „Kürzbarkeit", die aus der Eigenschaft b) folgt, schon sehen kann. Nämlich folgt aus b), daß

$$a_1 \ldots a_{k-1} x a_{k+1} \ldots a_n = a_1 \ldots a_{k-1} y a_{k+1} \ldots a_n,$$

wo $a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n$ ein beliebiges, aber festes Elementsystem ist, $x = y$ nach sich zieht.

Wir wollen darauf hinweisen, daß die Funktion F, die die Eigenschaften a)—d) hat, — im Gegensatz zu den Funktionen von zwei Veränderlichen — außer dem Einheitselementsystem $e, \ldots, e$ (n—1-mal) auch andere Einheitselementsysteme $e', \ldots, e'$ (n—1-mal) haben kann; z. B. hat die Operation $F = x \cdot y \cdot z$ (die gewöhnliche Multiplikation) zwei Einheitselementsysteme: $e = 1; 1$ und $e' = -1; -1$.

Definieren wir die folgenden Funktionen

$$(9)\qquad \begin{cases} f_1(x) \overset{\text{def}}{=} xe^{n-1} = x, \quad f_n(x) \overset{\text{def}}{=} e^{n-1}x = x \\ f_\lambda(x) \overset{\text{def}}{=} e^{\lambda-1}xe^{n-\lambda} \quad (\lambda = 2, \ldots, n-1;\, x \in I_1;\, f_\lambda\colon I_1 \to I_1). \end{cases}$$

Aus b) folgt, daß auch die Funktionen $f_\lambda(x)$ stetig und streng monoton sind, und es gilt das folgende

Lemma 2. *Die in* (9) *definierten Funktionen genügen den Funktionalgleichungen*

$$(10_1)\qquad f_\lambda(x) = f_{\lambda-\mu}f_{\mu+1}(x) \qquad (n \geqq \lambda > \mu \geqq 0),$$

$$(10_2)\qquad f_\lambda(x) = f_{\lambda+\nu}f_{n-\nu}(x) \qquad (n \geqq \lambda + \nu > \nu \geqq 0),$$

wo

$$f_\lambda f_\nu(x) \overset{\text{def}}{=} f_\lambda[f_\nu(x)]$$

ist.

Um die Richtigkeit von (10_1) und (10_2) einzusehen, kann man nach (8) und (5) folgendermaßen rechnen:

$$f_\lambda(x) = e^{\lambda-1}xe^{n-\lambda} = e^{\lambda-1}(xe^{n-1})e^{n-\lambda} =$$
$$= e^{\lambda-\mu-1}(e^\mu xe^{n-\mu-1})e^{n+\mu-\lambda} = f_{\lambda-\mu}f_{\mu+1}(x),$$

bzw.

$$f_\lambda(x) = e^{\lambda-1}xe^{n-\lambda} = e^{\lambda-1}(e^{n-1}x)e^{n-\lambda} =$$
$$= e^{\lambda+\nu-1}(e^{n-\nu-1}xe^\nu)e^{n-\lambda-\nu} = f_{\lambda+\nu}f_{n-\nu}(x).$$

Dieses Verfahren kann man auch in den Fällen $\lambda = 1, n$ und $\lambda+\nu = 1, n$ anwenden. Damit ist das Lemma 2 bewiesen.

Wir werden die Bezeichnungen

$$f_\lambda^0(x) \overset{\text{def}}{=} x, \quad f_\lambda^k(x) \overset{\text{def}}{=} f_\lambda f_\lambda^{k-1}(x) \qquad (k > 0)$$

verwenden.

Korollar 1.

$$\left.\begin{aligned} (11_1)\qquad f_\lambda(x) &= f_2^{\lambda-1}(x) \\ (11_2)\qquad f_\lambda(x) &= f_{n-1}^{n-\lambda}(x) \end{aligned}\right\} \qquad (\lambda = 1, \ldots, n).$$

Die Richtigkeit von (11_1) sieht man durch die Substitution $\mu = 1$ und durch die $\lambda - 2$-malige Verwendung von (10_1) ein:

$$f_\lambda(x) = f_{\lambda-1}f_2(x) = \cdots = f_3f_2^{\lambda-3}(x) = f_2f_2^{\lambda-2}(x) = f_2^{\lambda-1}(x);$$

gleichfalls sieht man die Richtigkeit von (11_2) durch die Substitution $\nu = 1$ und durch die $n - \lambda - 1$-malige Verwendung von (10_2) ein:

$$f_\lambda(x) = f_{\lambda+1}f_{n-1}(x) = \cdots = f_{n-2}f_{n-1}^{n-\lambda-2}(x) = f_{n-1}^{n-\lambda}(x).$$

4. Nach der Relation (11_1) (oder (11_2)) kann man die Funktion $f_\lambda(x)$ $(\lambda = 2, \ldots, n-1)$ explizit angeben. Es sei $\lambda = n$, dann erhalten wir nach (11_1) und (9) die Gleichung

$$f_n(x) = x = f_2^{n-1}(x). \tag{12}$$

Für die Gleichung (12) gilt der folgende

Satz 3. *Die Gleichung*

$$f^m(x) = x \qquad (x \in I_1; f\colon I_1 \to I_1) \tag{13}$$

hat keine anderen streng monotonen Lösungen, als

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{wenn } m = 2k-1 \\ f_0(x), & \text{wenn } m = 2k \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots; x \in I_1; f_0\colon I_1 \to I_1), \tag{14}$$

wo $f_0(x)$ eine beliebige streng monotone Funktion mit der Bedingung $f_0(x) = f_0^{-1}(x)$ ist. Die streng monoton wachsende Lösung von (13) ist $f(x) = x$ $(x \in I_1)$ und nur diese. (Die Funktion $f_0(x)$ nennt man „involutorische Funktion"; bezüglich diesen Funktionen siehe z. B. [3].)

Bemerkung. Die Gleichung (13) wurde zuerst von Ch. Babbage [5] behandelt (es ist üblich, diese Gleichung „Babbagesche Gleichung" zu nennen). Später behandeln O. Rausenberger [13], L. Leau [10] und O. Spiess [15] die Gleichung (13), aber sie suchen nur die analytischen komplexen Lösungen und gewiße Normalformen. R. Isaacs [9] behandelt auch die reellen Gleichungen $f^2(x) = g(x)$ und $f^m(x) = f^n(y)$. S. Łojasiewicz [11] hat die allgemeinste Lösung der Gleichung (13) (sogar die der Gleichung $f^n(x) = g(x)$) für eine beliebige Menge E angegeben, es gelang aber dem Verf. nicht, den Satz 3, in dem nur strenge Monotonie von $f(x)$ vorausgesetzt wird, aus dem Ergebnis von Łojasiewicz zu erhalten. G. M. Ewing und W. R. Utz [7] haben die *stetigen* Lösungen der Gleichung $f^m(x) = f(x)$ angegeben.

Beweis (des Satzes 3). In den Fällen $m = 1$ und $m = 2$ ist der Satz offenbar.

A) *$f(x) = x$ ist die einzige streng monoton wachsende Lösung der Gleichung $f^2(x) = x$ (oder von $f(x) = f^{-1}(x)$).*

Jedenfalls ist $f(x) = x$ eine streng monoton wachsende Lösung von $f^2(x) = x$. Nehmen wir an, daß die Gleichung $f^2(x) = x$ auch eine andere Lösung besitzt und es sei z. B. $a < f(a)$, oder $b > f(b)$. Da die Funktion streng monoton wachsend ist, darum wäre

$$f(a) < f^2(a) = a,$$

bzw.

$$f(b) > f^2(b) = b,$$

aber dies ist in Widerspruch mit unserer Voraussetzung, also hat $f^2(x) = x$ nur die Lösung $f(x) = x$.

B) *Es sei* $m = 2k+1$ $(k = 1, 2, \ldots)$, *so ist* $f(x) = x$ *die einzige streng monotone Lösung von* $f^m(x) = x$.

Jedenfalls ist $f(x) = x$ eine Lösung von (13). Nehmen wir an, daß die Gleichung (13) für ungerade m auch eine andere Lösung besitzt, und es sei z. B.

$$a < f(a), \quad \text{oder} \quad b > f(b), \tag{15}$$

ferner sei

α) $f(x)$ *streng monoton wachsend,*

β) $f(x)$ *streng monoton abnehmend.*

Wenden wir die Funktion f im Falle α) auf (15) $2k$-mal an:

$$\begin{array}{ll} f(a) < f^2(a), \quad \text{bzw.} & f(b) > f^2(b), \\ f^2(a) < f^3(a), & f^2(b) > f^3(b), \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ f^{2k}(a) < f^{2k+1}(a), & f^{2k}(b) > f^{2k+1}(b), \end{array}$$

so ergibt sich der Widerspruch

$$a < f(a) < f^2(a) < \cdots < f^{2k+1}(a) = a,$$

bzw.

$$b > f(b) > f^2(b) > \cdots > f^{2k+1}(b) = b$$

also ist $f(x) = x$ im Falle α).

Wenden wir jetzt die Funktion f auch im Falle β) auf (15) $2k+1$-mal an:

$$\begin{array}{ll} f(a) > f^2(a), \quad \text{bzw.} & f(b) < f^2(b), \\ f^2(a) < f^3(a), & f^2(b) > f^3(b), \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ f^{2k+1}(a) > f^{2k+2}(a), & f^{2k+1}(b) < f^{2k+2}(b), \end{array}$$

so ergibt sich der Widerspruch

$$f(a) = f^{2k+2}(a) < f^{2k+1}(a) = a,$$

bzw.

$$f(b) = f^{2k+2}(b) > f^{2k+1}(b) = b,$$

also ist $f(x) = x$ auch im Falle β).

C) *Es sei nun* $m=4k$ $(k=1,2,\ldots)$. *Wir beweisen, daß aus der strengen Monotonie von* f *und aus dem Bestehen der Gleichung*

$$f^{4k}(x)=x \tag{16}$$

auch die Gültigkeit der Gleichung

$$f^{2k}(x)=x \tag{17}$$

folgt.

Wir führen die Bezeichnung

$$g(x)\overset{\text{def}}{=\!=}f^{2k}(x) \tag{18}$$

ein. Da bei streng monotonen $f(x)$ die Funktion $g(x)=f^{2k}(x)$ streng monoton wächst [folgt aus $x_1<x_2$ bei abnehmendem $f: f(x_1)>f(x_2)$, $f^2(x_1)<<f^2(x_2),\ldots,f^{2k}(x_1)<f^{2k}(x_2)$; und bei wachsendem f: $f(x_1)<f(x_2)$, $f^2(x_1)<<f^2(x_2),\ldots,f^{2k}(x_1)<f^{2k}(x_2)$], ist C) eine unmittelbare Folge von A).

D) *Es sei* $m=2^{k+1}(2l+1)$ $(k, l=0,1,\ldots)$, *so ist* $f^2(x)=x, f(x)=f_0(x)$ *die einzige streng monotone Lösung von* $f^m(x)=x$.

In diesem Falle kann man nach C) immer erreichen, daß (13) in die einfachere Gleichung

$$f^{2(2l+1)}(x)=x \qquad (l=0,1,\ldots) \tag{19}$$

übergeht. Ist hier

$$h(x)\overset{\text{def}}{=}f^2(x), \tag{20}$$

dann kann man statt (19) die Gleichung

$$h^{2l+1}(x)=x \qquad (l=0,1,\ldots) \tag{21}$$

schreiben. Aus B) folgt $h(x)=x=f^2(x)$ und diese Gleichung, und damit auch die Gleichung (19), hat die Lösung $f(x)=f_0(x)$. Wenn hier $f(x)$ streng monoton wachsend ist, dann ist $f(x)=x$ nach A).

Mit A), B), C), D) ist der Satz 3 vollständig bewiesen.

Korollar 2. *Aus dem Satz 3 folgt, daß für die in* (9) *definierten Funktionen die Relationen*

$$\left.\begin{array}{l} f_\lambda(x)=x, \quad \textit{wenn} \quad n=2k \\ \left.\begin{array}{l} f_{2\mu}(x)=f_0(x) \\ f_{2\mu+1}(x)=x \end{array}\right\}, \quad \textit{wenn} \quad n=2l+1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (k,l=1,2,\ldots) \\ (\lambda=1,\ldots,2k) \\ (\mu=1,\ldots,l) \end{array}$$

gelten.

Im Falle $n=2k$ ist die Lösung von (12) nach (14) $f_2(x)=x$, also ist der erste Teil von Korollar 2 nach (11_1) offenbar. Wenn $n=2l+1$ ist, dann ist $f_2(x)=f_0(x)$ nach (14) die Lösung von (12), und da $f_0^2(x)=x$ ist, kann man nach (11_1)

$$f_{2\mu}(x)=f_0^{2\mu-1}(x)=f_0^{2\mu-3}(x)=\cdots=f_0(x),$$

bzw.

$$f_{2\mu+1}(x)=f_0^{2\mu}(x)=f_0^{2\mu-2}(x)=\cdots=f_0^2(x)=x$$

schreiben.

5. Die in (4) definierte und im Sinne von (5) assoziative Operation kann mit einer Operation von *zwei* Veränderlichen explizit angegeben werden. Es gilt nämlich der folgende

Satz 4. *Die in H definierte Operation* (4) *genüge den folgenden Bedingungen:*

e) *es gibt ein festes Elementensystem $c_2,\ldots,c_{n-1}$ ($\in H$), für das die Abbildungen*

$$\omega_k(u)=c_k\ldots c_2uc_{n-1}\ldots c_k \qquad (\omega_k(u)\colon H\to H;\ k=2,\ldots,n-1) \tag{22}$$

[unter beliebigem Element $u(\in H)$] in H umkehrbar sind: $\omega_k^{-1}\omega_k(u)=u$; und die Funktionen $\omega_k^{-1}(u)$ ($k=2,\ldots,n-1$) nehmen alle Werte u von H einmal (und nur einmal) an;

f) *die Operation* (4) *ist assoziativ, d. h. es gilt* (5).

Dann kann man (4) *in der Form*

$$\begin{cases} u_1u_2\ldots u_n=u_1*[\omega_{n-1}^{-1}(u_2)*[\omega_{n-2}^{-1}(u_3)*\cdots*[\omega_2^{-1}(u_{n-1})*u_n]\cdots]] \\ \qquad (u_1,\ldots,u_n\in H;\ \omega_{n-1}^{-1}(u_2),\ldots,\omega_2^{-1}(u_{n-1})\colon H\to H) \end{cases} \tag{23}$$

angeben, wo die Operation

$$u*v=uc_{n-1}\ldots c_2v \tag{24}$$

von zwei Faktoren in H assoziativ ist, also bildet die Menge H für die Operation (24) *eine Halbgruppe.*

Bemerkung. Die Frage, wie die Operation (4) aus einfacheren Operationen *„ableitbar"* ist, hat schon mehrere Verfasser beschäftigt, vor allem W. Dörnte [6], dann E. L. Post [12], H. Tvermoes [19], [20] und H. A. Thurston [17], [18].

W. Dörnte führt den folgenden verallgemeinerten Gruppenbegriff ein: „Entsprechend dem gewöhnlichen Gruppenbegriff werde für $n=2,3,\ldots$ unter einer *n-Gruppe H* ganz allgemein ein System verstanden, für dessen Elemente eine Operation von n Faktoren $u=u_1\ldots u_n$ so definiert ist, daß die folgenden drei Postulate erfüllt sind: (I) das Produkt (4) gehört wieder zu H;

(II) das Assoziativgesetz (5) gilt; (III) durch den Wert eines Produktes $u_1 \dots u_n$ und $n-1$ gegebene Faktoren ist der fehlende Faktor (an beliebiger Stelle) stets eindeutig bestimmt." In diesem Sinne sind *die 2-Gruppen* mit den gewöhnlichen Gruppen identisch. Die n-Gruppe nennt man auch *poliadysche Gruppe*. W. DÖRNTE bewies den Satz: *Eine n-Gruppe ist aus einer 2-Gruppe dann und nur dann ableitbar, wenn es mindestens ein festes Element e gibt, so daß das aus n Faktoren bestehende Produkt $e \dots e$ stets den Wert u_0 annimmt, wenn irgendein e durch das beliebige Element u_0 ersetzt wird.* Eine n-Gruppe heißt *echt*, falls es auf keine Weise möglich ist, sie auf die angegebene Art aus einer niederen m-Gruppe zu erzeugen; andernfalls heißt sie *unecht* oder *ableitbar.*

E. L. POST, und bald danach auch H. TVERMOES haben den folgenden Satz bewiesen: *Eine n-Gruppe N ist dann und nur dann aus einer m-Gruppe ableitbar, wenn N^m ein Zentrumselement der Ordnung n/m von $U(N)$ enthält, wo $U(N)$ die der n-Gruppe N umgeschriebene Gruppe bezeichnet.*

H. A. THURSTON hat die teilweise assoziativen Operationen untersucht, d. h. er fordert statt (5) nur die Relation

$$\begin{aligned} &x_1 \dots x_j(x_{j+1} \dots x_{j+n})x_{j+n+1} \dots x_{2n-1} = \\ &= x_1 \dots x_k(x_{k+1} \dots x_{k+n})x_{k+n+1} \dots x_{2n-1} \qquad (j \neq k), \end{aligned}$$

wo j, k feste natürliche Zahlen sind, und verallgemeinert den Satz von E. L. POST, daß jede polyadische Operation als fortgesetzte gewöhnliche (binäre) Gruppenoperation aufgefaßt werden kann.

BEWEIS (des Satzes 4). Statt (4) kann man mit der kürzeren Bezeichnung (24) nach (22) und (5) schreiben:

$$\begin{aligned} &u_1 u_2 \dots u_n = u_1[c_{n-1} \dots c_2 \overset{-1}{\omega}_{n-1}(u_2)c_{n-1}]u_3 \dots u_n = \\ &= u_1 * [\overset{-1}{\omega}_{n-1}(u_2)c_{n-1}[c_{n-2} \dots c_2 \overset{-1}{\omega}_{n-2}(u_3)c_{n-1}c_{n-2}]u_4 \dots u_n] = \\ &= u_1 * [\overset{-1}{\omega}_{n-1}(u_2) * [\overset{-1}{\omega}_{n-2}(u_3)c_{n-1}c_{n-2}[c_{n-3} \dots c_2 \overset{-1}{\omega}_{n-3}(u_4)c_{n-1} \dots c_{n-3}]u_5 \dots u_n]] = \\ &= \dots = u_1 * [\overset{-1}{\omega}_{n-1}(u_2) * [\overset{-1}{\omega}_{n-2}(u_3) * \dots * [\overset{-1}{\omega_2}(u_{n-1}) * u_n] \dots]]. \end{aligned}$$

Es ist offenbar, daß dieses Verfahren auch umkehrbar ist.

Das Assoziativgesetz der Operation $u * v$ kann man nach (5) folgendermaßen einsehen:

$$\begin{aligned} &(u * v) * w = (uc_{n-1} \dots c_2 v)c_{n-1} \dots c_2 w = \\ &= uc_{n-1} \dots c_2(vc_{n-1} \dots c_2 w) = u * (v * w). \end{aligned}$$

Damit is der Satz 4 bewiesen.

6. Nunmehr können wir mit Hilfe des Satzes 4 den Satz 2 beweisen.

Beweis (des Satzes 2). Mit den Funktionen (9) kann man die Funktion

$$F = x_1 \dots x_n$$

nach dem Satz 4 folgendermaßen angeben:

$$x_1 \dots x_n = x_1 * [f_{n-1}^{-1}(x_2) * [f_{n-2}^{-1}(x_3) * \cdots * [f_2^{-1}(x_{n-1}) * x_n] \cdots]]. \tag{25}$$

Die Funktionen $f_\lambda(x)$ sind nämlich umkehrbar:

$$f_\lambda^{-1}(x) \overset{\text{def}}{=} e^{n-\lambda} x e^{\lambda-1}, \quad f_\lambda^{-1} f_\lambda(x) = e^{n-\lambda}(e^{\lambda-1} x e^{n-\lambda}) e^{\lambda-1} = (e^{n-1}x)e^{\lambda-1} = x.$$

Beachten wir das Korollar 2, dann können wir statt (25) die Gleichung

$$x_1 \dots x_n = x_1 * (x_2 * (x_3 * \cdots * (x_{n-1} * x_n) \cdots)) \qquad (n = 2k;\ k = 1, 2, \dots), \tag{26$_1$}$$

bzw.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \dots x_n = x_1 * [f_0(x_2) * [x_3 * [f_0(x_4) * \cdots * [f_0(x_{n-1}) * x_n] \cdots]]] \\ \qquad (n = 2k+1;\ k = 1, 2, \dots) \end{array} \right. \tag{26$_2$}$$

schreiben.

Man kann (26$_1$) nach dem Satz 1 so schreiben:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \dots x_n = \varphi^{-1}[\varphi(x_1) + \varphi\varphi^{-1}[\varphi(x_2) + \varphi\varphi^{-1}[\varphi(x_3) + \cdots \\ \quad \cdots + \varphi\varphi^{-1}[\varphi(x_{n-1}) + \varphi(x_n)] \cdots]]] = \varphi^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\right] \\ \qquad (n = 2k;\ k = 1, 2, \dots), \end{array} \right. \tag{27}$$

welche Funktion die Eigenschaften a), b), d) schon hat. Wegen der Bedingung c) soll

$$e^n = e = \varphi^{-1}[n\varphi(e)]$$

sein, woraus sich $\varphi(e) = 0$ ergibt.

Die Gleichung (26$_2$) kann man mit der Bezeichnung

$$\varphi_0(x) \overset{\text{def}}{=} \varphi f_0(x)$$

nach dem Satz 1 so schreiben:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \dots x_n = \varphi^{-1}[\varphi(x_1) + \varphi\varphi^{-1}[\varphi_0(x_2) + \varphi\varphi^{-1}[\varphi(x_3) + \cdots \\ \quad \cdots + \varphi\varphi^{-1}[\varphi_0(x_{n-1}) + \varphi(x_n)] \cdots]]] = \\ = \varphi^{-1}[\varphi(x_1) + \varphi_0(x_2) + \varphi(x_3) + \cdots + \varphi_0(x_{n-1}) + \varphi(x_n)] \\ \qquad (n = 2k+1;\ k = 1, 2, \dots). \end{array} \right. \tag{28}$$

Diese Funktion hat die Eigenschaft b). Wegen der Bedingung d) soll

$$\varphi^{-1}\{\varphi\varphi^{-1}[\varphi(x_1)+\varphi_0(x_2)+\cdots+\varphi(x_n)]+\varphi_0(x_{n+1})+\varphi(x_{n+2})+\cdots+\varphi(x_{2n-1})\}=$$
$$=\varphi^{-1}\{\varphi(x_1)+\varphi_0\varphi^{-1}[\varphi(x_2)+\varphi_0(x_3)+\cdots+\varphi(x_{n+1})]+$$
$$+\varphi(x_{n+2})+\varphi_0(x_{n+3})+\cdots+\varphi(x_{2n-1})\}$$

sein, woraus man die Gleichung

$$\text{(29)}\quad \left\{\begin{array}{l}\varphi_0\varphi^{-1}\left[\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(n+1)}\varphi(x_{2\nu})+\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(n-1)}\varphi_0(x_{2\nu+1})\right]=\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(n+1)}\varphi_0(x_{2\nu})+\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(n-1)}\varphi(x_{2\nu+1})\\ \qquad\qquad (n=2k+1;\,k=1,2,\ldots)\end{array}\right.$$

erhält. Setzen wir hier

$$\varphi(x_{2\nu})=y_{2\nu}\qquad\left[\nu=1,\ldots,\frac{1}{2}(n+1)\right]$$

und

$$\varphi_0(x_{2\nu+1})=y_{2\nu+1}\qquad\left[\nu=1,\ldots,\frac{1}{2}(n-1)\right],$$

dann ist

$$\varphi_0(x_{2\nu})=\varphi_0\varphi^{-1}(y_{2\nu})$$

und

$$\varphi(x_{2\nu+1})=\varphi\varphi_0^{-1}(y_{2\nu+1})=\varphi f_0^{-1}\varphi^{-1}(y_{2\nu+1})=\varphi_0\varphi^{-1}(y_{2\nu+1}),$$

also kann man statt (29) die Gleichung

$$\text{(30)}\qquad \varphi_0\varphi^{-1}\left[\sum_{\nu=2}^{n+1}y_\nu\right]=\sum_{\nu=2}^{n+1}\varphi_0\varphi^{-1}(y_\nu)$$

schreiben.

J. Aczél und H. Kiesewetter [4] haben gezeigt, daß (30) und die Cauchysche Gleichung

$$\text{(31)}\qquad \varphi_0\varphi^{-1}(y_2+y_3)=\varphi_0\varphi^{-1}(y_2)+\varphi_0\varphi^{-1}(y_3)$$

einander äquivalent sind, darum hat (30) als einzige *stetige (und streng monotone) Lösung*

$$\varphi_0\varphi^{-1}(y)=cy\qquad (c\neq 0,\text{ konst.}),$$

d. h. es gilt

$$\varphi_0(y)=\varphi f_0(y)=c\varphi(y).$$

Setzen wir dies in (29) ein, dann ist

$$c\left[\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(n+1)}\varphi(x_{2\nu})+c\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(n-1)}\varphi(x_{2\nu+1})\right]=c\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(n+1)}\varphi(x_{2\nu})+\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(n-1)}\varphi(x_{2\nu+1}),$$

woraus $c^2=1$, $c=\pm 1$ folgt.

Im Falle $c=1$ hat die Formel (28) die Gestalt (27) wegen der Bedingung c) mit $\varphi(e)=0$.

Im Falle $c=-1$ kann man statt (28) die Gleichung

$$x_1 \dots x_n = \varphi^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\varphi(x_i)\right] \qquad (n=2k+1;\, k=1,2,\dots) \tag{32}$$

schreiben, falls $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\varphi(x_i)$ im Wertevorrat von φ liegt; aber es gilt immer, weil sonst die Funktion (32) und damit auch (6_1) nicht definiert ist [vgl. auch die Bedingung a)]. Hier gilt die Bedingung c) für F auch dann, wenn $\varphi(e)\neq 0$, sondern beliebig ist. Dies bedeutet: wenn man die Funktion (6_1) in der Form (32) schreiben kann, dann gilt

$$x x_0^{n-1} = x = x_0^{n-1} x$$

für ein beliebiges festes Element $x_0(\in I_1)$, d. h. *alle Elemente des Definitionsbereiches der Funktion F sind Einheitselemente.* Es ist aus dem Beweis des Satzes 2 offenbar, daß für (32) auch a) gilt.

Damit ist der Satz 2 bewiesen.

Literatur.

[1] J. Aczél, Sur les opérations définies pour nombres réels, *Bull. Soc. Math. France* **76** (1948), 59—64.

[2] J. Aczél, On quasi linear functional operations, *Publ. Math. Debrecen* **1** (1949—50), 248—250.

[3] J. Aczél, A remark on involutory functions, *Amer. Math. Monthly* **55** (1948), 638.

[4] J. Aczél und H. Kiesewetter, Über die Reduktion der Stufe bei einer Klasse von Funktionalgleichungen, *Publ. Math. Debrecen* **5** (1958), 348—363.

[5] Ch. Babbage, *Gerg. Ann.* **16** (1821), 73.

[6] W. Dörnte, Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff, *Math. Z.* **29** (1928), 1—19.

[7] G. M. Ewing and W. R. Utz, Continuous solutions of the functional equation $f^n(x)=f(x)$, *Canad. J. Math.* **5** (1953), 101—103.

[8] M. Hosszú, Some functional equations related with the associative law, *Publ. Math. Debrecen* **3** (1954), 205—214.

[9] R. Isaacs, Iterates of fractional order, *Canad. J. Math.* **2** (1950), 409—416.

[10] L. Leau, Sur un problème d'iteration, *Bull. Soc. Math. France* **26** (1898), 5—9.

[11] S. Łojasiewicz, Solution générale de l'equation fonctionelle $f^n(x)=g(x)$, *Ann. Soc. Polon. Math.* **24** (1951), 88—91.

[12] E. L. Post, Polyadic groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **48** (1940), 208—350.

[13] O. Rausenberger, Theorie der allgemeinen Periodizität, *Math. Ann.* **18** (1881), 379—410.

[14] C. Ryll—Nardzewski, On superposition of functions, *Colloq. Math.* **3** (1955), 185.

[15] O. Spiess, Die Grundbegriffe der Iterationsrechnung, *Diss. Basel* 1902.

[16] D. Tamari, Caractérisation des semi-groupes à un paramètre, *C. R. Acad. Sci. Paris,* **228** (1949), 1092—1094.

[17] H. A. Thurston, Partly associative operations, *J. London Math. Soc.* **24** (1949), 260—271.

[18] H. A. Thurston, Some properties of partly-associative operations, *Proc. Amer. Math. Soc.* **5** (1954), 487—497.

[19] H. Tvermoes, Om en generalisation of gruppebegrebet (Thesis), *University of Copenhagen,* 1952.

[20] H. Tvermoes, Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffs, *Math. Scand.* **1** (1953), 18—30.

(Eingegangen am 15. September 1958.)