Über eine allgemeine Erweiterung von Gruppen. II.

Herrn Professor Dr. O. Varga zum 50. Geburtstag gewidmet.

Von J. SZÉP (Szeged).

In der Mitteilung I.* haben wir als Hauptproblem folgendes Erweiterungsproblem gelöst:

Es sei A eine beliebige Gruppe mit den Elementen $e, a, b, c, \ldots$ und Γ eine Menge der Symbole $\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma, \ldots,$ wobei ε als mit dem Einselement e von A identisch angesehen wird. (Dementsprechend werden wir statt ε immer e schreiben.) In der Menge $S = A\Gamma = (\ldots, a\alpha, \ldots)$ von formalen Produkten wollen wir die Multiplikation auf solche Weise definieren (die Multiplikation der Elemente $e, a, b, c, \ldots$ soll mit der Multiplikation in A identisch sein), daß dadurch S zu einer Gruppe G wird, für welche die Zerlegung

$$G = A + A\alpha + A\beta + A\gamma + \cdots$$

nach Nebengruppen gilt, d. h. Γ soll ein rechtsseitiges Repräsentantensystem von A sein.

Bei diesem allgemeinen Erweiterungsproblem wurde zwischen den Elementen der Symbolmenge $\Gamma(= e, \alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ keinerlei Relation von vornherein vorausgesetzt. Demzufolge war es nötig, für die zur Lösung eingeführten vier Funktionen $\alpha^a, \alpha^\beta, {}^\alpha a, {}^\alpha\beta$ gewisse nicht als natürlich anzusehende „Anfangsbedingungen" anzunehmen. Die zur Lösung des Erweiterungsproblems dienende notwendige und hinreichende Bedingungen wurden dann durch sechs Funktionalgleichungen ausgedrückt, welche zwischen den oben aufgezählten Funktionen bestehen. Mit Hilfe dieser Funktionalgleichungen können (wenigstens theoretisch) bei gegebenem A alle diejenigen Gruppen dargestellt werden, welche eine mit A isomorphe Untergruppe erhalten, wobei die Mächtigkeit der Nebenklassen von G nach A mit der Mächtigkeit von Γ übereinstimmt.

Das Erweiterungsproblem vereinfacht sich und die Erweiterung selbst

*) *Publicationes Mathematicae Debrecen* **6** (1959), 60—71.

läßt sich leichter behandeln, falls wir voraussetzen, daß Γ eine gewisse Struktur mit folgenden Eigenschaften ist:

DEFINITION. *Die Menge von Elementen $\Gamma(=\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ wird eine Fastgruppe*[1]) *genannt, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Γ ist eine multiplikative Struktur,*
2. *ε ist das einzige beiderseitige Einselement von Γ,*
3. *für jedes $\alpha(\in \Gamma)$ gibt es ein und nur ein β derart, daß $\beta\alpha = \varepsilon$ gilt (d. h. jedes Element von Γ hat genau ein Linksinverses),*
4. *aus jeder Relation $\alpha\gamma = \beta\gamma$ folgt $\alpha = \beta$,*
5. *Für beliebige $\gamma, \beta(\in \Gamma)$ ist $x\gamma = \beta$ lösbar.*

Man sieht sofort, daß der Begriff der Fastgruppe allgemeiner ist als der Gruppenbegriff. (Die Assoziativität wird nicht gefordert.) Jede Gruppe ist zugleich eine Fastgruppe. Eine fünfelementige Fastgruppe (d. h. eine solche fünften Grades) welche keine Gruppe ist, wird z. B. durch die folgende Multiplikationstabelle definiert:

	ε	α	β	γ	δ
ε	ε	α	β	γ	δ
α	α	β	δ	β	γ
β	β	γ	γ	α	ε
γ	γ	δ	α	ε	β
δ	δ	ε	ε	δ	α

Nunmehr zeigen wir, daß sich auf ein zu einer beliebigen Untergruppe A einer beliebigen Gruppe G gehöriges beliebiges Repräsentantensystem eine Fastgruppe aufbauen läßt, welche durch die Multiplikation von G bestimmt wird.

Betrachten wir nämlich die Zerlegung von G in Nebenklassen nach A:

$$G = A + A\alpha + A\beta + A\gamma + \cdots \tag{1}$$

Für die Elemente $\Gamma(=e, \alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ des Repräsentantensystems definieren wir eine Multiplikation auf folgende Weise:

$$\alpha \circ \beta = \gamma \quad (\text{„}\circ\text{" ist das Zeichen für die neue Operation})$$

wobei γ das durch die Gleichung $\alpha\beta = a\gamma (a \in A)$ (in G) eindeutig bestimmtes Element bedeutet. Γ wird somit hinsichtlich der Operation „$\circ$"

[1]) A. ALMEIDA COSTA verwendet in seiner Arbeit „Über die Fastgruppentheorie" (Univ. Lisboa Revista Fac. Ci. A (2), 5 (1956) 265—328) die Benennung Fastruppe statt der bereits ziemlich weitgehend eingebürgerten Bezeichnung „Quasigruppe". In unserer Arbeit wird durch Fastgruppe eine andere Struktur bezeichnet.

zu einer multiplikativen Struktur ($\varepsilon = e$), welche außerdem — wie man sofort einsieht — auch den in der Definition der Fastgruppe auftredenden Bedingungen 2), 3), 4) und 5) genügt. Die auf das zur Untergruppe A gehörige Repräsentantensystem Γ aufgebaute Fastgruppe werden wir durch $\Gamma(A)$ bezeichnen. Die durch die oben angeführte Tabelle definierte Fastgruppe ist aufgebaut auf ein Repräsentantensystem einer Untergruppe der Ordnung 12 der Ikosaedergruppe.

Die Gruppe G kann nunmehr als die aus der Gruppe A und der Fastgruppe $\Gamma(A)$ zusammengesetzte Gruppe

$$G = (A, \Gamma(A)) \tag{2}$$

aufgefaßt werden. $G = (A, \Gamma(A))$ wird eine *echte Zerlegung* von G genannt, falls weder A noch $\Gamma(A)$ das Einlement ist. Von trivialen Fällen abgesehen (Gruppen von Primzahlordnung) hat jede Gruppe G echte Zerlegungen (2).[2])

Ist speziell A ein Normalteiler von G, dann ist — wie man leicht einsieht — die Fastgruppe $\Gamma(A)$ eine Gruppe und mit der Faktorgruppe G/A isomorph. In diesem Falle bestimmt also jedes zu A gehörige Repräsentantensystem (bis auf Isomorphismus) dieselbe Fastgruppe. Ist speziell $\Gamma(A)$ eine Gruppe bezüglich der Multiplikation in G, d. h. ist $\alpha \circ \beta = \alpha\beta$, dann entsteht G durch Faktorisation aus den Gruppen A und $\Gamma(A)$, $G = A\Gamma(A)$ ($A \cap \Gamma(A) = e$, A und $\Gamma(A)$ sind Untergruppen von G). Die Fastgruppe $\Gamma(A)$ kann jedoch nicht nur in den beiden erwähnten Spezialfällen eine Gruppe sein. Hierauf bezieht sich der folgende

Satz 1. *Es sei $G = (A, \Gamma(A))$. Die Fastgruppe $\Gamma(A)$ ist dann und nur dann eine Gruppe, falls $\{\Gamma\} \cap A = N$ ein Normalteiler in $\{\Gamma\}$ ist. ($\{\Gamma\}$ bedeutet die in der Gruppe G durch Γ erzeugte Untergruppe).*

Beweis. Zuerst beweisen wir die Behauptung „dann" unseres Satzes. Dafür genügt es zu zeigen, daß unter den Bedingungen des Satzes $\Gamma(A)$ assoziativ ist.

Es seien α, β, γ drei beliebige Elemente von $\Gamma(A)$. Weiterhin sei $\alpha \circ \beta = \delta$, $\delta \circ \gamma = \eta$, $\beta \circ \gamma = \pi$, $\alpha \circ \pi = \varrho$ ($\delta, \pi, \varrho \in \Gamma(A)$) wobei

$$\alpha\beta = a\delta, \quad \delta\gamma = a'\eta \tag{3}$$

$$\beta\gamma = b\pi, \quad \alpha\pi = b'\varrho \tag{4}$$

$$(a, a', b, b' \in A)$$

[2]) Bemerkung. Interessant ist es zu bemerken, daß während es nicht zu jeder Gruppe eine echte Zerlegung (2) gibt (d. h. eine solche bei welcher sowohl A als auch $\Gamma(A)$ vom Einselement verschiedene Gruppen sind), falls wir (hinsichtlich der Komponenten der Zerlegung) im Bereiche der Gruppen bleiben, die Existenz einer echten Zerlegung von trivialen Fällen abgesehen gesichert ist, falls wir eine umfangreichere Struktur (Fastgruppe) zugrundelegen.

gilt. Offenbar ist $a, a', b, b' \in N$. Aus den Gleichungen (3) ergibt sich $\alpha\beta\gamma = \bar{a}\eta$ und aus den Gleichungen (4) $\alpha\beta\gamma = \bar{\bar{a}}\varrho$ (mit $\bar{a}, \bar{\bar{a}} \in N$), woraus $\eta = \varrho$ folgt. Dies bedeutet aber, dass die Gleichheit $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$ gilt.

Die Behauptung „nur dann" unseres Satzes können wir auf folgende Weise einsehen. Nehmen wir an, daß

$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma) = \eta$$

gilt. Aus den Gleichungen (3) ergibt sich dann

$$\alpha\beta\gamma = \bar{a}\eta \; (\bar{a} \in N) \tag{5}$$

und aus den Gleichungen (4)

$$\beta\gamma = b\alpha^{-1}b'\varrho \quad (b, b' \in N) \tag{6}$$

Aus (5) und aus (6) folgt $\bar{a}\eta = \alpha b \alpha^{-1} b' \varrho$, und daraus wiederum wegen $\eta = \varrho, \alpha b \alpha^{-1} \in N$. Nunmehr zeigen wir, daß (während β und γ die Elemente von Γ durchlaufen) die aus den Gleichungen $\beta\gamma = b\pi$ gewonnenen Elemente b ganz N erzeugen.

Um dies nachzuweisen, bezeichnen wir die von den Elementen b erzeugte Gruppe mit N'. Zuerst zeigen wir, daß wenn die Produkte $\alpha\beta^{-1}, \alpha^{-1}\beta, \alpha^{-1}\beta^{-1}$ in der Form $b\mu \; (b \in A; \mu \in \Gamma)$ geschrieben werden, die Relation $b \in N'$ besteht. Es sei $\alpha\beta^{-1} = b\mu$, dann ist $\mu\beta = b^{-1}\alpha$ und folglich $b^{-1} \in N'$ d. h. $b \in N'$. Nunmehr sei $\alpha^{-1}\beta = b\mu$. Da es für beliebiges $\alpha (\in \Gamma)$ ein γ gibt, derart daß $\gamma \circ \alpha = e$ d. h. $\gamma\alpha \in N (\subset A)$ ist, so folgt daraus $\gamma\alpha \in N'$ und so $\alpha^{-1}\gamma^{-1} \in N'$. Da aus der Gleichung $(\alpha^{-1}\gamma^{-1})\gamma\beta = b\mu$ die Relation $\gamma\beta = \bar{b}b\mu \, (\bar{b} = \gamma\alpha)$ folgt, zeigt dies, daß tatsächlich $b \in N'$ ist. Endlich sei $\alpha^{-1}\beta^{-1} = b\mu$. Aus der Gleichung $(\alpha^{-1}\gamma^{-1})\gamma\beta^{-1} = b\varepsilon$ folgt $\gamma\beta^{-1} = \bar{b}b\varepsilon$ was dem ersten Fall entspricht, somit gilt $\bar{b}b \in N'$, und daraus folgt mit Rücksicht auf $\bar{b} \in N'$ die Relation $b \in N'$. Nunmehr sei $a = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \ldots$ ein beliebiges Element von N, wobei entweder α_i oder $\alpha_i^{-1} \in \Gamma \; (i = 1, 2, \ldots)$ gilt. Weiterhin sei $\alpha_1\alpha_2 = b_1\mu_1, \mu_1\alpha_3 = b_2\mu_2, \mu_2\alpha_4 = b_3\mu_3, \ldots (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots \in \Gamma)$ wobei nach dem soeben bewiesenen $b_1, b_2, b_3, \ldots \in N'$ gilt. Daraus folgt offenbar $a = b_1 b_2 b_3 \ldots$, womit unsere Behauptung und folglich auch unser Satz bewiesen ist.

Bemerkung 1. Die Bedingung, daß $N (= A \cap \{\Gamma\})$ Normalteiler in $\{\Gamma\}$ sein soll, ist damit äquivalent, daß es eine Untergruppe $N \subseteq A' \subsetneqq A$ von A gibt, für welche $\alpha A' \alpha^{-1} \subsetneqq A (\alpha \in \Gamma)$ ist. Ist nämlich N ein Normalteiler in $\{\Gamma\}$, dann spielt N die Rolle des A', und gibt es eine der Bedingung genügende Gruppe A', dann folgt daraus wegen $\alpha A' \alpha^{-1} \subsetneqq A$ sofort $\alpha N \alpha^{-1} = N$.

Ist in der Gruppe $G = (A, \Gamma(A))$ auch $\Gamma(A)$ eine Gruppe, dann kann A als ein „verallgemeinerter" Normalteiler der Gruppe G angesehen werden, und dementsprechend $\Gamma(A)$ als eine auf A bezügliche „verallgemeinerte"

Faktorgruppe. Für diese Betrachtungsweise spricht z. B. die folgende Analogie: Ist M Normalteiler in G, dann ist, wie wir wissen, $M \cap H$ Normalteiler in H, wobei H eine beliebige Untergruppe von G sein kann. In unserem Falle gilt hingegen: Ist A ein verallgemeinerter Normalteiler von G und ist H eine beliebige Untergruppe von G für welche $H \cap A = D \subseteq N$ gilt, so ist D ein verallgemeinerter Normalteiler in H. Gilt speziell $N = A$, so ist $D \subseteq N$ trivialerweise erfüllt und wir haben den oben erwähnten Fall vor uns.

Bemerkung 2. Ist die Fastgruppe $\Gamma(A)$ eine Gruppe, dann gilt offenbar $\{\Gamma\}/N \approx \Gamma(A)$. Demzufolge kann jede Gruppe $G = (A, \Gamma(A))(A \cap \{\Gamma\} = N$ Normalteiler in $\{\Gamma\})$ durch ein Gruppenpaar $A, \Gamma(A)$ derart repräsentiert werden, daß sich jedem Element von G ein Elementenpaar $(a, \alpha)(a \in A; \alpha \in \Gamma(A))$ eindeutig zuordnen läßt. Zu dieser Gruppenklasse gehören die Gruppen des Schreierschen Falles, sowie auch diejenigen des Zappaschen und des Casadioschen Falles.

Bemerkung 3. Enthält in der faktorisierbaren Gruppe $G = AB$ die Untergruppe $D = A \cap B$ einen echten Normalteiler von A oder von B, so ist G bekanntlich nicht einfach. Daraus folgt; Ist in der Gruppe $G = (A, \Gamma(A))$ $\Gamma(A)$ eine Gruppe, aber $\Gamma \neq \Gamma(A)$ so ist G nicht einfach.

Untersuchen wir nun die umgekehrte Frage, nämlich das Problem der Erweiterung.

Erweiterungsproblem. *Gegeben sei eine Gruppe A und eine Fastgruppe F. Zu bestimmen sind sämtliche Gruppen G, für welche*

$$G = (A', \Gamma(A'))$$

mit $A' \approx A, \Gamma(A') \approx F$ *gilt*[3]) *(d. h. zu* A' *gehört in* G *ein Repräsentantensystem* Γ*, für welches* $\Gamma(A') \approx F$ *gilt).*

Die Lösung unseres Erweiterungsproblems ergibt sich einfach aus derjenigen des in der Mitteilung I. gelösten Problems, falls wir noch folgendes vorausschicken.

Jede Fastgruppe $F(= e, \alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ bestimmt eindeutig eine Gruppe auf folgende Weise: Die durch die Zuordnung

$$\alpha \longleftrightarrow \begin{pmatrix} e & \alpha & \beta & \gamma & \ldots \\ e \circ \alpha & \alpha \circ \alpha & \beta \circ \alpha & \gamma \circ \alpha & \ldots \end{pmatrix} = \pi_\alpha \tag{7}$$

gebildeten Permutationen π_α erzeugen (nach der Multiplikationsregel der Permutationen) eine eindeutig bestimmte Gruppe $\{F\}$, welche offensichtlich die

[3]) Zwei Fastgruppen F und F' werden isomorph genannt, falls zwischen den Elementen von F und denjenigen von F' eine umkehrbar eindeutige Zuordnung existiert, so dass aus $\alpha \longleftrightarrow \alpha'$ und $\beta \longleftrightarrow \beta'$ immer $\alpha \circ \beta \longleftrightarrow \alpha' \circ \beta'$ folgt $(\alpha, \beta \in F; \alpha', \beta' \in F')$.

folgenden Eigenschaften hat: a) $\{F\}$ hat eine einzige Untergruppe B, für welche $\{F\} = (B, F'(B)), F'(B) \approx F(\alpha \leftrightarrow \pi_\alpha)$ und $F'(B) = \pi_e, \pi_\alpha, \ldots$ gilt. Die Gruppe B wird durch diejenigen Produkte $\pi_\alpha \pi_\beta \ldots \pi_\varrho$ erzeugt, für welche $(\ldots(\alpha \circ \beta) \circ \ldots) \circ \varrho = e$ gilt. b) $\{F\}$ ist die kleinste Gruppe mit der Eigenschaft a).

Diese durch F bestimmte Gruppe $\{F\}$ nennen wir die zu F gehörige *Minimalgruppe*. Man sieht leicht ein, daß zu isomorphen Fastgruppen auch isomorphe Minimalgruppen gehören.

Da jede Lösung G unseres Erweiterungsproblems eine zu der Minimalgruppe $\{F\}$ isomorphe Untergruppe enthalten muß, so ergibt sich für die Lösbarkeit unseres Erweiterungsproblems die notwendige Bedingung, daß A eine zu B isomorphe Untergruppe enthalten muß. Ist speziell $A \approx B$, so bedeutet die Gruppe $\{F\}$ eine triviale Lösung des Erweiterungsproblems. Ist dabei F auch noch eine Gruppe, dann gilt offenbar $\{F\} \approx F$.

Lösung des Erweiterungsproblems. Es sei A' eine Untergruppe von A, für welche $A' \approx B$ gilt. Wir wählen eine beliebige isomorphe Abbildung von A' auf $B: \mathfrak{A}(a') = b \; (a' \in A'; b \in B)$. Diejenigen Elemente, welche bei der Abbildung $\mathfrak{A}$ einander entsprechen, werden wir als identisch betrachten. Infolge von (7) wird es zu keinem Mißverständnis führen, falls wir die Elemente von F als die erzeugenden Elemente von $\{F\}$ ansehen. Wir bezeichnen die Elemente der darzustellenden Gruppe G durch die formalen Produkten $\ldots, a\alpha, \ldots$. Da $\{F\}$ eine Gruppe ist, wird die in der Mitteilung I. eingeführte Funktion ${}^\alpha\beta(\in A)$ durch $\{F\}$ und durch $\mathfrak{A}$ eindeutig bestimmt. Weiterhin gilt für die Funktion α^β die Relation $\alpha^\beta = \alpha \circ \beta$. Nunmehr sieht man ohne weiteres ein, daß in F die Bedingungen (3), (4), (5) und (8) der Mitteilung I. trivialerweise erfüllt sind. Außerdem kann, da $\{F\}$ bekannt ist, auch (6_2) (Mitteilung I.) weggelassen werden. Da die Funktionalgleichungen (14) und (15) (Mitteilung I.) die Gültigkeit der Relation $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ sichern, welche hier trivialerweise erfüllt, ist da ja $\{F\}$ eine Gruppe ist, so können auch sie weggelassen werden.

Die Lösung des in der vorliegenden Mitteilung formulierten Erweiterungsproblems wird unter Berücksichtigung des gesagten durch folgende Anfangsbedingungen bzw. durch folgende Funktionalgleichungen zum Ausdruck gebracht.

Anfangsbedingungen:

$$e = \varepsilon$$

$$\alpha a = {}^\alpha a \alpha^a$$

$$(a\alpha)(b\beta) = (a(\alpha b))\beta = a((\alpha b)\beta)$$

$$a\alpha = b\beta \Longleftrightarrow a = b, \alpha = \beta$$

Die lösenden Funktionatgleichungen:

$$^{\alpha}(ab) = {}^{\alpha}a\ {}^{\alpha^a}b$$

$$(\alpha^a)^b = \alpha^{ab}$$

$$(\alpha \circ \beta)^a = \alpha^{\beta_a} \circ \beta^a$$

$$^{\alpha}\beta\ {}^{\alpha\circ\beta}a = {}^{\alpha}({}^{\beta}a)\ {}^{(\alpha^{\beta_a})}(\beta^a)$$

Die in der Mitteilung I. erwähnten Erweiterungen: die Schreiersche, die Zappasche und andere mehr [4], [27][4]) können aus der obigen durch geeignete spezielle Wahl der Funktionen einfach gewonnen werden. Diese speziellen Funktionen wurden teilweise bereits in der Mitteilung I. erwähnt. Hier wiederholen wir ihre Beschreibung für den Schreierschen und für den Zappaschen Fall:

Im Falle der Schreierschen Erweiterung: $G = (A, F)$, $G/A \approx F$, $\alpha^a = \alpha$ für jedes $a \in A$ und $\alpha \in F$.

Im Falle der Zappaschen Erweiterung: $G = (A, F)$ wabei A und F Untergruppen von G sind, und $A \cap F = e$, ${}^{\alpha}\beta = e$, $\alpha \circ \beta = \alpha\beta = \alpha^{\beta}$ gilt.

Bekanntlich ist jede faktorisierbare endliche Gruppe $G = AB$ auflösbar, falls A eine nilpotente und B eine Abelsche Gruppe bedeutet [14], [44].

Der Begriff der von uns eingeführten neuen Gruppenzerlegung ermöglicht es, eine leichte Verallgemeinerung dieses schönen Satzes zu formulieren.

Satz 2.[5]) *Die endliche Gruppe $G = (A, \Gamma(A))$ ist auflösbar, falls A nilpotent und $\Gamma(A)$ eine Abelsche Gruppe ist, oder umgekehrt.*

Beweis. Da $\Gamma(A)$ eine Gruppe ist, ist wegen Satz 1 $\{\Gamma\} \cap A = N$ Normalteiler in $\{\Gamma\}$. Somit ist G eine faktorisierbare Gruppe, für welche $G = A\{\Gamma\}(A \cap \Gamma(A) = N)$ gilt. Ist $\{\Gamma\}$ eine Abelsche Gruppe, so stehen wir dem bereits erwähnten Fall gegenüber. Andernfalls ist $N \neq e$ und daher nach einem früher bewiesenen Satz [24], [42] ist dann G nicht einfach, und sie enthält einen Normalteiler $\bar{N} \supseteqq N(\bar{N} \subset \{\Gamma\})$. Offenbar gilt

$$G/\bar{N} \approx \bar{A}H\ (\bar{A} \cap H = e; \bar{A} \approx A; H \approx \{\Gamma\}/\bar{N}$$

und weiterhin ist $\{\Gamma\}/\bar{N}$ Abelsch oder nilpotent, je nachdem $\Gamma(A)$ Abelsch oder nilpotent ist. Somit ist (nach dem oben erwähnten Satz) $G/\bar{N}$, und fol-

---

[4]) Mit den Nummern in eckigen Klammern verweisen wir auf die „Literatur" der Mitteilung I.

[5]) Ohne die Einführung von neuen Begriffsbildungen kann dieser Satz so formuliert werden: Die faktorisierbare Gruppe $G = AB$ ist auflösbar, falls A nilpotent, $A \cap B = D$ Normalteiler in B und B/D Abelsch ist, oder un gekehrt.

glich auch G auflösbar. Im umgekehrten Fall, wo A Abelsch und $\Gamma(A)$ nilpotent ist, kann der Nachweis auf ähnlichem Wege erbracht werden.

Es ist natürlich, daß auch noch zahlenreiche andere Probleme in Verbindung mit diesem Problemenkreis auftauchen werden. Von diesen werden wir jetzt einige erwähnen.

a) Ist die bei der Lösung des Erweiterungsproblems erwähnte notwendige Bedingung auch hinreichend? D. h. haben im Falle der Erfüllung der notwendigen Bedingung unsere Funktionalgleichungen immer eine Lösung?

b) Was für Folgerungen kann man aus der Struktur einer Fastgruppe auf die zugehörige Minimalgruppe schließen?

c) Ist die Gruppe $G=(A, \Gamma(A))$ auflösbar, falls A eine Abelsche oder nilpotente Gruppe ist, und die Fastgruppe $\Gamma(A)$ kommutativ ist, d. h. $\alpha\circ\beta = \beta\circ\alpha$ gilt?

(Eingegangen am 24. Oktober, 1958.)