Über eine Eingenschaft der Parabel und des Paraboloids.

Meinem Freund O. Varga zum 50. Geburtstag gewidmet.

Von † J. EGERVÁRY (Budapest).

Die Richtung der einzigen Symmetrieachse der Parabel und des Paraboloids wird bekanntlich durch denjenigen Eigenvektor der karakteristischen Matrix bestimmt, welcher zum Eigenwert 0 gehört. Für die Richtungskosinusse dieses Eigenvektors sind in der bezüglichen Literatur einfache explizite Formeln angegeben.

Die Lage der Symmetrieachse wird aber meistens durch sehr komplizierte Formeln (z. B. durch die Koordinaten des Scheitelpunktes) bestimmt.

In dieser Note wollen wir einfache Formeln herleiten, aus welchen man die Koordinaten eines Punktes der Achse berechnen kann. Durch die Kenntnis eines Punktes und der Richtung wird aber die Achse eindeutig bestimmt.

Unsere Formeln lassen eine einfache massengeometrische Deutung zu, welche wir hier vorausschicken wollen.

Werden in den (immer reellen) Mittelpunkten der Punktepaare, welche die Parabel

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0,\ a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0,\quad |a_{ik}|\neq 0$$

auf der X-Achse, bzw. auf der Y-Achse ausschneidet, die Massen a_{11}, *bzw.* a_{22} *angebracht, so liegt der Massenmittelpunkt dieser Massen auf der Symmetrieachse der Parabel.*

Werden in den (immer reellen) Mittelpunkten der Kegelschnitte, welche das Paraboloid

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

$$A=|a_{ik}|\neq 0;\ A_{44}=0;\ a_{11}a_{22}+a_{22}a_{33}+a_{33}a_{11}-a_{12}^2-a_{23}^2-a_{31}^2\neq 0$$

auf den Koordinatenebenen YZ, ZX, bzw. XY ausschneidet, die Massen $a_{22}a_{33}-a_{23}^2$, $a_{33}a_{11}-a_{13}^2$ *bzw.* $a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ *angebracht, so liegt der Massenmittelpunkt dieser Massen auf der Symmetrieachse des Paraboloids.*

Diskussion und Formeln für die Parabel. Die Gleichung

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \tag{1}$$

stellt bekanntlich eine Parabel dar, wenn

$$A=|a_{ik}|\neq 0 \quad \text{und} \quad A_{33}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0 \tag{2}$$

ist, und die Achsenrichtung dieser Parabel wird durch die Gleichungen

$$\cos(t,x):\cos(t,y)=A_{13}:A_{23}=-a_{12}:a_{11}=-a_{22}:a_{21} \tag{3}$$

bestimmt.

Die Polare eines Punktes (ξ,η) in Bezug auf den Kegelschnitt (1) ist gegeben durch

$$(a_{11}\xi+a_{12}\eta+a_{13})x+(a_{21}\xi+a_{22}\eta+a_{23})y+a_{31}\xi+a_{32}\eta+a_{33}=0. \tag{4}$$

Bei der Bestimmung der Lage der Parabelachse können wir davon ausgehen, daß die Polare eines beliebigen Punktes (ξ,η) der Achse auf die Achsenrichtung (3) senkrecht steht.

Die Bedingung der Orthogonalität ist nach (3) (4)

$$\frac{a_{11}\xi+a_{12}\eta+a_{13}}{A_{13}}=\frac{a_{21}\xi+a_{22}\eta+a_{23}}{A_{23}}.$$

Erweiterung des ersten Bruches durch A_{13}, des zweiten Bruches durch A_{23} und Addition ergibt für den gemeinsamen Wert dieser Brüche (mit Rücksicht auf (2))

$$\frac{a_{11}\xi+a_{12}\eta+a_{13}}{A_{13}}=\frac{a_{21}\xi+a_{22}\eta+a_{23}}{A_{23}}=\frac{A}{A_{13}^2+A_{23}^2}. \tag{5}$$

Es besteht weiterhin (wegen $A_{33}=0$) die folgende Identität

$$A_{13}(a_{11}\xi+a_{12}\eta+a_{13})+A_{23}(a_{21}\xi+a_{22}\eta+a_{23})\equiv A. \tag{6}$$

Betrachten wir nunmehr die folgenden drei Geraden, welche zueinander parallel sind.

Die Symmetrieachse:

$$L_0(\xi,\eta)\equiv A_{23}(a_{11}\xi+a_{12}\eta+a_{13})-A_{13}(a_{21}\xi+a_{22}\eta+a_{23})=0.$$

Der zur X-Achse konjugierte Durchmesser

$$L_1(\xi,\eta)\equiv a_{11}\xi+a_{12}\eta+a_{13}=0.$$

Der zur Y-Achse konjugierte Durchmesser

$$L_2(\xi,\eta)\equiv a_{21}\xi+a_{22}\eta+a_{23}=0.$$

Wir wollen die relative Lage der Parabelachse in Bezug auf die beiden Durchmesser L_1 und L_2 bestimmen.

Seien $P_0(\xi_0, \eta_0), P_1(\xi_1, \eta_1)$ bzw. $P_2(\xi_2, \eta_2)$ beliebige Punkte der Geraden L_0, L_1 bzw. L_2. Dann ist $L_2(P_2)=0$, also nach (6)

$$L_1(P_2)=\frac{A}{A_{13}}$$

und nach (5)

$$L_1(P_0)=\frac{A A_{13}}{A_{13}^2+A_{23}^2}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{L_1(P_0)}{L_1(P_2)}=\frac{A_{13}^2}{A_{13}^2+A_{23}^2}.$$

Nun ist aber nach (3) $A_{13}^2 : A_{23}^2 = a_{22} : a_{11}$, d. h.

$$\frac{L_1(P_0)}{L_1(P_2)}=\frac{a_{11}}{a_{11}+a_{22}},$$

Analog ergibt sich

$$\frac{L_2(P_0)}{L_2(P_1)}=\frac{a_{22}}{a_{11}+a_{22}}.$$

Wenn also P_0, P_1, P_2 kollinear sind, dann ist P_0 der Massenmittelpunkt der Massen a_{11} und a_{22}, welche in den Punkten P_1 und P_2 angebracht sind. Symbolisch:

(7) $$P_0=\frac{a_{11}P_1+a_{22}P_2}{a_{11}+a_{22}}.$$

Man wählt am einfachsten für P_1 und P_2 die Schnittpunkte der Koordinatenachsen mit den zu ihnen konjugierten Durchmessern (d. h. die immer reellen Mittelpunkte der Punktpaare, welche auf den Koordinatenachsen durch die Parabel ausgeschnitten werden).

Man erhält dann

als Schnittpunkt von $L_1=0$ mit der X-Achse:

P_1: $$\eta_1=0;\ a_{11}\xi_1+a_{13}=0, \xi_1=-\frac{a_{13}}{a_{11}}$$

als Schnittpunkt von $L_2=0$ mit der Y-Achse:

P_2: $$\xi_2=0,\ a_{22}\eta+a_{23}=0, \eta_2=-\frac{a_{23}}{a_{22}}.$$

Bei Benützung der symbolischen Gleichung (7) ergeben sich hieraus für die Koordinaten eines Punktes der Parabelachse folgende einfache Formeln:

$$\boxed{\xi_0 = \frac{-a_{13}}{a_{11}+a_{22}},\ \eta_0 = \frac{-a_{23}}{a_{11}+a_{22}}}. \tag{8}$$

Diskussion und Formeln für das Paraboloid. Die Gleichung

$$\begin{gathered} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \end{gathered} \tag{1}$$

stellt bekanntlich ein Paraboloid dar, wenn

$$A = |a_{ik}| \neq 0; \quad A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

$$a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} - a_{12}^2 - a_{23}^2 - a_{31}^2 \neq 0$$

ist.

Wir wollen folgende Abkürzungen einführen:

$A_{ik} = \dfrac{\partial A}{\partial a_{ik}}$; die Unterdeterminanten zweiten Grades werden mit α_{pq} bezeichnet, wo p, bzw. q den Indizen

$$\text{I, II, III, 1, 2, 3} \tag{3'}$$

gleichgesetzt werden können und dann die Zeilenpaare, bzw. Spaltenpaare

$$(2,3)\ \ (3,1)\ \ (1,2)\ \ (14)\ \ (24)\ \ (34) \tag{3''}$$

(in der hier angegebenen Reihenfolge) bedeuten.

So ist z. B.

$$L_k \equiv a_{k1}x + a_{k2}y + a.$$

Bei der Substitution der Koordinaten ξ_i, η_i, ζ_i eines Punktes P_i in die Linearformen

$$L_k \equiv a_{k1}x + a_{k2}y + a_{k3}z + a_{k4} \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

werden wir abkürzend

$$L_k(P_i) = L_k(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) = a_{k1}\xi_i + a_{k2}\eta_i + a_{k3}\zeta_i + a_{k4}$$

schreiben.

Wir setzen als bekannt voraus, daß die Achsenrichtung des Paraboloids durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}(4)\qquad &\cos(t,x):\cos(t,y):\cos(t,z)=A_{14}:A_{24}:A_{34}=\\ &\alpha_{K\mathrm{I}}:\alpha_{K\mathrm{II}}:\alpha_{K\mathrm{III}}\qquad (K=\mathrm{I,\,II,\,III})\end{aligned}$$

bestimmt ist.

Die Polarebene eines Punktes $P(\xi,\eta,\zeta)$ in Bezug auf die Fläche (1) ist gegeben durch

$$(5)\qquad L_1(P)x+L_2(P)y+L_3(P)z+L_4(P)=0.$$

Bei der Bestimmung der Lage der Paraboloidachse werden wir auch jetzt die Tatsache benutzen, daß die Polarebene eines beliebigen Punktes (ξ,η,ζ) der Achse auf die Achsenrichtung (4) senkrecht steht.

Die Bedingung der Orthogonalität ist nach (4) (5)

$$(6)\qquad \frac{L_1(P)}{A_{14}}=\frac{L_2(P)}{A_{24}}=\frac{L_3(P)}{A_{34}}=\frac{\sum\limits_{\varkappa} a_{\varkappa 4}A_{\varkappa 4}}{\sum\limits_{\varkappa} A_{\varkappa 4}^2}=\frac{A}{\sum\limits_{\varkappa} A_{\varkappa 4}^2}.$$

(Die zwei letzten Gleichungen entstehen durch entsprechende Umformungen).

Es besteht weiterhin (wegen $A_{44}=0$) die folgende Identität:

$$(7)\qquad A_{14}L_1(P)+A_{24}L_2(P)+A_{34}L_3(P)\equiv\sum_{\varkappa} A_{\varkappa 4}a_{\varkappa 4}=A.$$

Betrachten wir jetzt die drei Ebenen:

1. Die zur X-Achse konjugierte Durchmesserebene

$$L_1(\xi,\eta,\zeta)=a_{11}\xi+a_{12}\eta+a_{13}\zeta+a_{14}=0.$$

2. Die zur Y-Achse konjugierte Durchmesserebene

$$L_2(\xi,\eta,\zeta)=a_{21}\xi+a_{22}\eta+a_{23}\zeta+a_{24}=0.$$

Die zur Z-Achse konjugierte Durchmesserebene

$$L_3(\xi,\eta,\zeta)=a_{31}\xi+a_{32}\eta+a_{33}\zeta+a_{34}=0.$$

Wir wollen die relative Lage der Paraboloidachse in Bezug auf diese drei Durchmesserebenen bestimmen.

Wir schneiden die Ebenen $L_1=0, L_2=0, L_3=0$ durch eine gemeinsame Normalebene. Die Schnittpunkte dieser Normalebene mit den Schnittgeraden $L_2xL_3, L_3xL_1, L_1xL_2$ bzw. mit der Paraboloidachse seien $P_1(\xi_1\eta_1\zeta_1)$, $P_2(\xi_2\eta_2\zeta_2)$, $P_3(\xi_3\eta_3\zeta_3)$ bzw. $P_0(\xi_0\eta_0\zeta_0)$.

Wenn mann die evidenten Relationen

$$L_i(P_k)=0 \quad \text{für} \quad i \neq k; \quad i,k=1,2,3$$

beachtet, so folgt aus (6) und (7) unmittelbar

$$\frac{L_k(P_0)}{L_k(P_k)}=A_{k4}\frac{A}{\sum\limits_{\varkappa} A_{\varkappa 4}^2}:\frac{A}{A_{k4}}=\frac{A_{k4}^2}{\sum\limits_{\varkappa} A_{\varkappa 4}^2}=\frac{\alpha_{KK}}{\alpha_{\mathrm{I}\,\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}\,\mathrm{II}}+\alpha_{\mathrm{III}\,\mathrm{III}}} \qquad (k,\, K=1,2,3).$$

Diese Gleichungen bedeuten, daß ein Normalschnittdreieck (also auch irgendein Schnittdreieck) des durch die Ebenen $L_1=0, L_2=0, L_3=0$ gebildeten Dreikants durch seinen Schnittpunkt P_0 mit der Paraboloidachse in Teildreiecke geteilt wird, deren Flächeninhalte sich wie

$$\alpha_{\mathrm{I}\,\mathrm{I}}:\alpha_{\mathrm{II}\,\mathrm{II}}:\alpha_{\mathrm{III}\,\mathrm{III}}$$

verhalten. Mit anderen Worten: Der Schnittpunkt P_0 der Paraboloidachse mit einem Dreieck, dessen Ecken P_1, P_2, P_3 auf den Geraden $L_2 x L_3$, $L_3 x L_1$, $L_1 x L_2$ liegen, hat die baryzentrischen Koordinaten

$$\alpha_{\mathrm{I}\,\mathrm{I}},\ \alpha_{\mathrm{II}\,\mathrm{II}},\ \alpha_{\mathrm{III}\,\mathrm{III}}.$$

Symbolisch:

$$P_0=\frac{\alpha_{\mathrm{I}\,\mathrm{I}}P_1+\alpha_{\mathrm{II}\,\mathrm{II}}P_2+\alpha_{\mathrm{III}\,\mathrm{III}}P_3}{\alpha_{\mathrm{I}\,\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}\,\mathrm{II}}+\alpha_{\mathrm{III}\,\mathrm{III}}}. \tag{8}$$

Man wählt am einfachsten für P_1, P_2 bzw. P_3 die Schnittpunkte der Geraden $L_2 x L_3$, $L_3 x L_1$ bzw, $L_1 x L_2$ mit den Koordinatenebenen YZ, ZX bzw. XY (d. h. die immer reellen Mittelpunkte der Kegelschnitte, welche auf den Koordinatenebenen durch das Paraboloid ausgeschnitten werden). Für den Schnittpunkt P_1 der Geraden $L_2 x L_3$ mit der YZ Ebene erhält man

$$\begin{aligned}\xi_1&=0\\ L_2(P_1)&=a_{22}\eta_1+a_{23}\zeta_1+a_{24}=0\\ L_3(P_1)&=a_{32}\eta_1+a_{33}\zeta_1+a_{34}=0\end{aligned}$$

also

$$\xi_1:\eta_1:\zeta_1:1=0:\alpha_{13}:-\alpha_{12}:\alpha_{\mathrm{I}\,\mathrm{I}}.$$

Ähnlich ergibt sich für P_2 und P_3

$$\xi_2:\eta_2:\zeta_2:1=-\alpha_{\mathrm{II}\,3}:0:\alpha_{\mathrm{II}\,1}:\alpha_{\mathrm{II}\,\mathrm{II}}$$

$$\xi_3:\eta_3:\zeta_3:1=\alpha_{\mathrm{III}\,2}:\ -\alpha_{\mathrm{III}\,1}:0:\alpha_{\mathrm{III}\,\mathrm{III}}.$$

Man erhält also, bei Benützung der symbolischen Gleichung (8) für die Koordinaten eines Punktes der Paraboloidachse folgende einfache Formeln:

$$\text{(9)} \qquad \boxed{\xi:\eta:\zeta:1=\alpha_{\mathrm{III}2}-\alpha_{\mathrm{II}3}:\alpha_{13}-\alpha_{\mathrm{III}1}:\alpha_{\mathrm{II}1}-\alpha_{12}:\alpha_{11}+\alpha_{\mathrm{II}\,\mathrm{II}}+\alpha_{\mathrm{III}\,\mathrm{III}}}$$

wo die Größen α_{pq} die in (3′), (3″) prezisierte Unterdeterminante zweiter Ordnung bedeuten.

Zusatz. In der obigen Diskussion haben wir stillschweigend angenommen, daß wir mit dem allgemeinen Fall zu tun haben, daß also keiner der vorkommenden Nennern verschwindet. Wir verdanken dem Herrn G. Hajós die Bemerkung, daß man die Formeln (8) auch für den Fall von ev. verschwindender Nenner mit Hilfe einer Identität beweisen kann: Schreibt man nämlich die Gleichung (5) der Parabelachse in der Form

$$a_{11}\xi+a_{12}\eta+a_{13}+\lambda A_{13}=0$$
$$a_{21}\xi+a_{22}\eta+a_{23}+\lambda A_{23}=0,$$

wo λ einen unbestimmten Proprotionalitätsfaktor bedeutet, so werden diese Gleichungen durch die Werte (8) von ξ und η und durch $\lambda=(a_{11}+a_{22})^{-1}$ identisch befriedigt.

Nachher hat es sich herausgestellt, daß man auch die Formel (9) mit Hilfe einer analogen Identität beweisen kann.

(Eingegangen am 27. Oktober 1958.)