Eine axiomatische Theorie der Dieudonnéschen Determinanten.

Herrn Professor Ottó Varga zur Gelegenheit seines fünfzigsten Geburtstages gewidmet.

Von JULIUS GÁSPÁR (Miskolc).

Der Begriff der Determinante wurde von J. DIEUDONNÉ [1] auf die quadratischen Matrizen über einem Schiefkörper verallgemeinert. In dieser Abhandlung wollen wir eine axiomatische Einführung dieser Verallgemeinerung geben.

Im folgenden bezeichnen $K=\{a, b, \dots\}$ einen beliebigen Schiefkörper, K^* die multiplikative Gruppe von K, C die Kommutatorgruppe von K^*, K^*/C die Faktorkommutatorgruppe, $M_n=\{A, B, \dots\}$ die multiplikative Gruppe der invertierbaren Matrizen n-ter Ordnung über K, $E_{ik}(t)\in M_n$ eine Matrix, die aus der Einheitsmatrix $E=(\delta_{lm})$ durch Ersetzung von δ_{ik} mit $t\in K$ ensteht, C_n die Gruppe[1]), die durch die Matrizen $P_{ik}=E_{ik}(1)\,E_{ki}(-1)\,E_{ik}(1)$ erzeugt ist, M_n/C_n die Faktorgruppe von M_n nach C_n.

Zwecks Beweis des Isomorphismus $M_n/C_n\approx K^*/C$ gab J. DIEUDONNÉ [1] die folgende rekursive Definition der Abbildung

$$X\rightarrow \Delta_n(X),\ (X=(x_{ik})\in M_n;\ \Delta_n(X)\in K^*/C;\ n\geqq 1):$$
$$\Delta_n(X)=\varphi_1\,[(-1)^{i+1}x_{i1}]\,\Delta_{n-1}(X'),\ (n>1),\ \Delta_1(x)=\varphi_1(x),\ (x_{i1}\neq 0).$$

In dieser Definition bedeutet $\varphi_1(y)$ jenes Element von K^*/C, in welchem das Element $y\in K^*$ enthalten ist, und die Matrix X' von der Ordnung $n-1$ entsteht aus der Matrix X von der Ordnung n folgendermaßen: wenn $x_{j1}=0$, $j\neq i$ ist, so lassen wir die erste Spalte und die i-te Zeile der Matrix X weg; wenn $x_{j1}\neq 0$, $j\neq i$ ist, so multiplizieren wir (links) die i-te Zeile der Matrix X mit einem solchen Element $t_j\in K^*$, daß das j-te Element der ersten Spalte Null werde, wenn wir diese multiplizierte i-te Zeile aus der j-ten Zeile

[1]) Diese Gruppe ist die Kommutatorgruppe von M_n ausgenommen den Fall, in dem K nur zwei Elemente hat und $n=2$ ist. (S. [1], S. 32.)

subtrahieren; erledigen wir diese Multiplikationen und Subtraktionen für alle Elemente $x_{j1} \neq 0$, $j \neq i$, so erhalten wir eine Matrix X_1, welche in der ersten Spalte nur ein von Null verschiedenes Element hat, nämlich das Element x_{i1}, und dann lassen wir die erste Spalte und die i-te Zeile der Matrix X_1 weg.

Fügen wir der Gruppe K^*/C ein neues Element σ_0 mit der Multiplikationsvorschrift $\sigma_0\sigma_0 = \sigma_0$, $\sigma_0\sigma = \sigma\sigma_0 = \sigma_0$ $[\sigma \in K^*/C]$ zu, so können wir diese Definition auf nichtinvertierbare Matrizen erweitern: $\Delta_n(X) = \sigma_0$, wobei X eine nichtinvertierbare Matrix n-ter Ordnung über K ist.

$\Delta_n(X)$ nennen wir die Dieudonnésche Determinante von X.

Satz. *Ist φ eine Abbildung von M_n in K^*/C, die den Axiomen*

$$\text{(a)} \qquad \varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B),$$

$$\text{(b)} \qquad \varphi(A^{(t)}) = \varphi_1(t)\varphi(A), \qquad (t \in K^*)$$

genügt, wobei $A^{(t)}$ in (b) *eine solche Matrix bezeichnet, die aus A ensteht, wenn wir eine Zeile von A mit einem Element $t \in K^*$ multiplizieren, während $\varphi_1(t)$ die kanonische Abbildung*[2]) *von K^* auf K^*/C bezeichnet, so ist $\varphi(A)$ die Dieudonnésche Determinante von A.*

Corollarium. *Ist K ein Körper, so ist $\varphi(A)$ die (gew.) Determinante von A, wenn man auch den Isomorphismus $K^*/C \approx K^*$ beachtet.*

Im folgenden wird für die Ordnung von M_n $n > 1$ vorausgesetzt. Das ist erlaubt, da in dem Falle $n = 1$ die Richtigkeit unseres Satzes umittelbar zu sehen ist.

Wir beginnen mit der folgenden Behauptung:

$$(1) \qquad \varphi[E_{ik}(t)] = \varepsilon, \qquad (i \neq k),$$

wobei ε das Einheitselement von K^*/C bedeutet. (Man kann auch $\varepsilon = \varphi_1(1)$ schreiben.)

Ist $t = 0$, so folgt (1) aus (a): $\varphi(E) = \varphi(EE) = \varphi(E)\varphi(E)$, also $\varphi(E) = \varepsilon$.

Es sei nun $t \neq 0$. In diesem Falle gilt die Faktorisation

$$E_{ik}(t) = E_{ii}(t^{-1})E_{ii}(t)E_{ik}(t).$$

Es folgt nach (a) und wegen der Kummutativität von K^*/C:[3])

$$\varphi(E_{ik}(t)) = \varphi(E_{ii}(t^{-1}))\varphi(E_{ii}(t))\varphi(E_{ik}(t)) =$$
$$= \varphi(E_{ii}(t^{-1}))\varphi(E_{ik}(t))\varphi(E_{ii}(t)) = \varphi(E_{ik}(1)) = \sigma.$$

[2]) $\varphi_1(t)$ bezeichnet also die Abbildung, die zu jedem Elemente t jene Nebenklasse nach C ordnet, die das Element t enthält.

[3]) Diese Verkürzung des Beweises danke ich Herrn Dr. M. Hosszú.

Hat der Körper K mehr als zwei Elemente, so kann man $t', t'', t'+t'' \neq 0$ setzen. In diesem Falle erhalten wir wegen $E_{ik}(t')\, E_{ik}(t'') = E_{ik}(t'+t'')$ und (a):

$$\varphi(E_{ik}(t'))\,\varphi(E_{ik}(t'')) = \varphi(E_{ik}(t'+t'')),$$

also $\sigma^2 = \sigma$, $\sigma = \varepsilon$. Hat der Körper K nur zwei Elemente, so hat die Gruppe K^* nur das Einheitselement, also ist unsere Behauptung trivial.

Wir beachten nun, daß jede matrix $A \in M_n$ sich folgendermaßen faktorisieren läßt[4]):

$$A = BD(v), \tag{2}$$

wobei die Matrix B ein Produkt von Matrizen $E_{ik}(t)$ ist und $D(v) = (v_{ik})$, ($v_{ii} = 1$ für $1 \leqq i \leqq n-1$ und $v_{nn} = v \in K^*$) eine Diagonalmatrix ist.

Die Anwendung von (a) und (b) auf $A = BD(v)$ ergibt nach (1):

$$\varphi(A) = \varphi(D(v)) = \varphi_1(v)\varphi(E) = \varphi_1(v).$$

Es braucht nur noch bewiesen zu werden, daß dieses Ergebnis von der Faktorisation unabhängig ist: wenn $A = BD(v) = B'D(w)$ ist, so gilt $\varphi_1(v) = \varphi_1(w)$, also $v \equiv w \pmod{C}$; zu beweisen ist ferner, daß diese Abbildung φ eben die Dieudonnésche Determinante ist. Wir werden diese letztere Behauptung beweisen, da die Eindeutigkeit nach einem Satz von J. DIEUDONNÉ schon folgt.[5])

Es gilt

$$\Delta_1(a) = \varphi_1(a), \qquad (a \in K^*).$$

Wir setzen voraus, daß

$$\varphi(A') = \Delta_{n-1}(A'),\ (A' \in M_{n-1})$$

ist, und beweisen

$$\varphi(A) = \Delta_n(A), \qquad (A \in M_n).$$

Die invertierbare Matrix $A = (a_{ik})$ hat in der ersten Spalte ein von Null verschiedenes Element a_{i1}. Wenn nötig, können wir links und rechts die Matrix A mit Matrizen $E_{ik}(t)$ multiplizieren und so die Matrix

$$B_1 A B_2 = A_1 = \begin{bmatrix} 0 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a'_{i-1,2} & \cdots & a'_{i-1,n} \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a'_{i+1,2} & \cdots & a'_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix}$$

bekommen, wobei B_1, B_2 die Produkte der $E_{ik}(t)$ bezeichnen.

---

[4]) S. [1], S. 30.

[5]) S. [1], S. 33.

Es gilt aus (a) und (1):

$$\varphi(A_1) = \varphi(B_1 A B_2) = \varphi(A). \tag{3}$$

Wir können die Matrix A_1 mit Hilfe der Matrizen $P_{ik} = E_{ik}(1) E_{ki}(-1) E_{ik}(1)$ folgendermaßen transformieren:

$$P_{12} \cdots P_{i-2,i-1} P_{i-1,i} A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} (-1)^{i-1} a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 0 & a'_{i-1,2} & \cdots & a'_{i-1,n} \\ 0 & a'_{i+1,2} & \cdots & a'_{i+1,n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix}.$$

Es folgt aus (a) und (1):

$$\varphi(A_2) = \varphi(P_{12} \cdots P_{i-2,i-1} P_{i-1,i} A_1) = \varphi(A_1), \tag{4}$$

also nach (3): $\varphi(A_2) = \varphi(A)$.

Wir schreiben die Matrix A_2 in der Form

$$A_2 = \begin{bmatrix} (-1)^{i+1} a_{i1} & 0 \\ 0 & A' \end{bmatrix},$$

wobei

$$A' = \begin{bmatrix} a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a'_{i-1,2} & \cdots & a'_{i-1,n} \\ a'_{i+1,2} & \cdots & a'_{i+1,n} \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix}$$

ist und die Nullen Nullmatrizen von geeigneten Tipus bezeichnen.

Es folgt in diesem Falle nach (b):

$$\varphi(A_2) = \varphi_1[(-1)^{i+1} a_{i1}] \varphi(A_3),$$

wobei

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A' \end{bmatrix}$$

ist.

Nun nehmen wir die Faktorisation $A_3 = B_3 D(v)$ nach (2). Dann können wir dieser eine Faktorisation $A' = B' D'(v')$ zuordnen, in der Weise, daß jeder Matrix $E_{ik}(t)$, $(i, k > 1)$ im Produkt B_3, eine Matrix $E'_{i-1,k-1}(t)$ in B' entspricht. In diesem Falle folgt $v = v'$, es gilt also nach (a), (1) und (b):

$$\varphi(A_3) = \varphi(D(v)) = \varphi_1(v),$$
$$\Delta_{n-1}(A') = \Delta_{n-1}(D'(v')) = \varphi_1(v') = \varphi_1(v).$$

Endlich bekommen wir:

$$\varphi(A) = \varphi_1[(-1)^{i+1}a_{i1}]\Delta_{n-1}(A') = \Delta_n(A),$$

w. z. b. w.

Ist K ein Körper, so folgt nach dem Isomorphismus $K^*/C \approx K^*$, daß $\Delta_n(A)$ (bis auf einen Isomorphismus) die (gew.) Determinante von A ist.

Die Erweiterung dieses Begriffes auf eine nichtinvertierbare Matrix haben wir schon erwähnt.

Literatur.

[1] J. Dieudonné, Les déterminants sur un corps non commutatif, *Bull. Soc. Math. France* **71** (1943), 27—45.

(Eingegangen am 26. November 1958.)