Einfache Herstellung einer Klasse von nirgends differenzierbaren stetigen Funktionen auf Grund eines elementaren Satzes der analytischen Geometrie.

Otto Varga zum 50. Geburtstag gewidmet.

Von PAUL SZÁSZ (Budapest).

1. Im folgenden werde nach dem Vorgange von J. L. W. V. JENSEN [1] eine eindeutige reelle Funktion $f(x)$ in einem Intervall $a \leqq x \leqq b$ in üblicher Weise *nicht-konvex* genannt, wenn daselbst stets

$$2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geqq f(x_1)+f(x_2)$$
$$(a \leqq x_1 < x_2 \leqq b)$$

ausfällt. Daraus folgt bekanntlich im Falle einer in diesem Intervall stetigen Funktion $f(x)$ die allgemeinere Ungleichung

$$f(x_1+\vartheta(x_2-x_1)) \geqq f(x_1)+\vartheta[f(x_2)-f(x_1)]$$
$$(a \leqq x_1 < x_2 \leqq b,\ 0<\vartheta<1)$$

d. h. für $a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ liegt keiner der Punkte der stetigen Kurve $y=f(x)$ unterhalb derjenigen Sehne, die die Kurvenpunkte von den Abszissen x_1, x_2 verbindet.

M. MIKOLÁS [2] hat auf diesem Begriff fußend, eine bemerkenswerte einfache Klasse von nirgends differenzierbaren stetigen Funktionen hergestellt, nämlich durch den Beweis des folgenden Satzes:

Es sei $\varphi(x)$ eine stetige, nach $p>0$ periodische Funktion, die im Intervall $0 \leqq x \leqq p$ nicht-konvex ist und für die $\varphi\left(\frac{p}{2}\right)>0$ ausfällt, ferner sei $\nu_1<\nu_2<\cdots$ eine Folge von positiven ganzen Zahlen in der jede Zahl ν_n in der ihr folgenden ν_{n+1} aufgeht. Ist nun $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe von positiven Gliedern und gibt es eine positive Zahl ϱ derart, daß $\nu_n c_n \geqq \varrho>0$ für jeden

Index n gilt, so stellt die Reihe von Funktionen

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi(\nu_n x) \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

eine durchweg stetige nirgends differenzierbare Funktion dar.

Das berühmte Beispiel von B. L. VAN DER WAERDEN [3], d. h. die Funktion

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((10^n x))}{10^n}$$

wobei $((x))$ den Abstand der reellen Zahl x von der zu ihr nächstliegenden ganzen Zahl bedeutet, sowie die Funktionen

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n ((b^n x))$$

$$(0 < \alpha < 1, \ b > 0 \text{ ganz}, \ \alpha b \geqq 1)$$

und

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n |\sin(b^n \pi x)|$$

$$(0 < \alpha < 1, \ b > 0 \text{ ganz}, \ \alpha b \geqq 1)$$

erfüllen die Bedingungen dieses Satzes von M. MIKOLÁS. Die zwei letzteren waren unter der stärkeren Einschränkung $\alpha b > 4$ resp. $\alpha b > 1 + \frac{3}{2}\pi$, schon von K. KNOPP [4] angegeben worden. (Es ist hier jedoch zu bemerken, daß K. KNOPP für diese Funktionen auch viel mehr, nämlich die Nichtexistenz einer endlichen oder bestimmt unendlichen Ableitung bewiesen hat.)

In vorliegender Note wird ein viel allgemeiner Satz einfacher, und man kann sagen, ohne Rechnung bewiesen. Diese Verallgemeinerung liegt in einer anderen Richtung als die von M. MIKOLÁS selbst a. a. O. durchgeführte. Unsere Beweisführung gründet sich auf dem folgenden elementaren Satz der analytischen Geometrie, der dem Wesen nach auch dem Beweise von M. MIKOLÁS zugrunde liegt:

Fundamentallemma. *Haben in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Punkte P_1, P_2 die Abszissen $p_1 < p_2$ und wird vom Mittelpunkt M der Strecke $\overline{P_1 P_2}$ aus in der Richtung der Ordinatenachse eine Strecke $\overline{MS} > 0$ abgetragen, so sind die Richtungsfaktoren der Geraden $P_1 S$, $P_2 S$ mit dem Richtungsfaktor m der Geraden $P_1 P_2$ ausgedrückt*

$$\{P_1 S\} = m + \mu, \quad \{P_2 S\} = m - \mu \tag{1}$$

wobei

$$\mu = \frac{2}{p_2 - p_1} \overline{MS} \tag{2}$$

ist (Fig. 1).

Um das einzusehen, bezeichne N den Schnittpunkt der Geraden MS mit dem durch P_1 gelegten und gleichsinnig orientierten Parallelen zur Abszissenachse. So gilt unter Beachtung der Vorzeichen

$$\{P_1 S\} = \frac{\overline{NS}}{\overline{P_1 N}} = \frac{\overline{NM}}{\overline{P_1 N}} + \frac{\overline{MS}}{\overline{P_1 N}}$$

und hier sind

$$\frac{\overline{NM}}{\overline{P_1 N}} = m, \quad \overline{P_1 N} = \frac{p_2 - p_1}{2},$$

also mit der Bezeichnung (2) besteht in der Tat die erste Formel unter (1). Die zweite ist schon eine Folge davon, da bei Umkehrung des Richtungssinnes der Abszissenachse die Richtungsfaktoren mit -1 multipliziert werden, also für $P_2 S$ ergibt sich durch Anwendung dieser schon bewiesenen Formel, im neuen System der Richtungsfaktor $-m+\mu$, und somit wird dieser im ursprünglichen $m-\mu$.

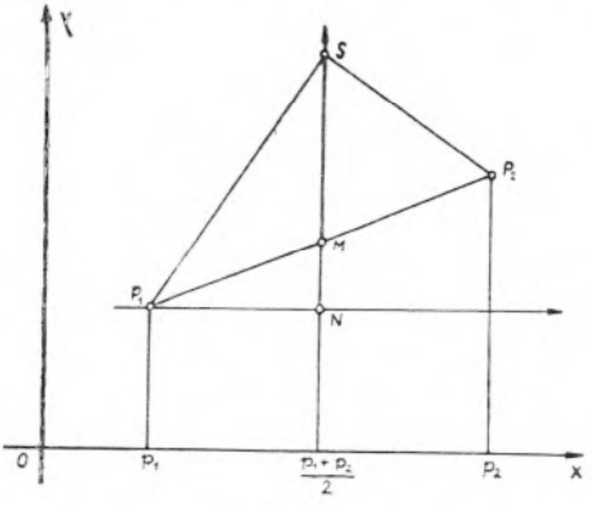

Fig. 1.

Bevor wir den zu beweisenden Satz formulieren, seien von den Prämissen desselben die folgenden vorangeschickt.

Das Intervall (a, b) *werde bei jedem positiv ganzzahligen Wert von* n *durch gewisse Zwischenpunkte*

$$a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_{i-1}^{(n)} < x_i^{(n)} < \cdots < x_{\nu_n - 1}^{(n)} < x_{\nu_n}^{(n)} = b \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3}$$

in ν_n *Teile geteilt (die nicht untereinander gleich zu sein brauchen) derart, daß für jeden* n *die Zwischenpunkte unter* (3) *auch solche der dem Wert* $n+1$ *entsprechenden Einteilung sind. Es sei ferner bei jedem* n $\varphi_n(x)$ *eine für* $a \leqq x \leqq b$ *stetige und in jedem Teilintervall* $x_{i-1}^{(n)} \leqq x \leqq x_i^{(n)}$ *nicht-konvexe Funktion, die der Bedingung*

$$\varphi_n(x_{i-1}^{(n)}) = \varphi_n(x_i^{(n)}) = 0, \quad \varphi_n\left(\frac{x_{i-1}^{(n)} + x_i^{(n)}}{2}\right) = c > 0 \tag{4}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, \nu_n; \quad n = 1, 2, 3, \ldots)$$

genügt, wobei die positive Zahl c *von* n *unabhängig ist* (Fig. 2).

Nunmehr beweisen wir als eine Verallgemeinerung des zitierten Satzes von M. Mikolás den folgenden

Satz. *Ist* $\psi(x)$ *eine im Intervall* $a \leqq x \leqq b$ *stetige und nicht-konvexe Funktion und wird die Einteilungsfolge* (3) *so gewählt, daß*

1° $\max(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) \leqq c_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

ausfällt wobei

2° $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *eine konvergente Reihe von positiven Gliedern ist,*

so stellt die Reihe von Funktionen

$$\Phi(x) = \psi(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{5}$$

eine nirgends differenzierbare stetige Funktion in diesem Intervall dar.

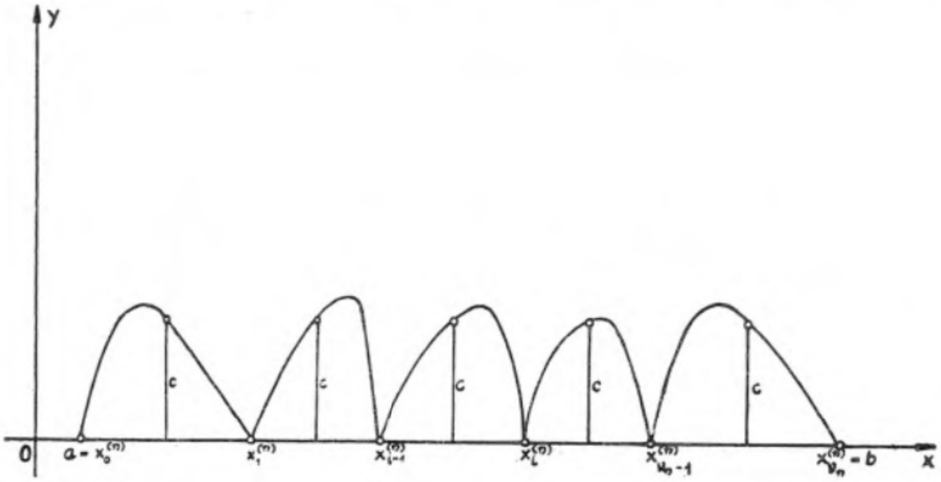

Fig. 2.

Der obige Satz von M. Mikolás ist (wenn $\varphi(0) = 0$ vorausgesetzt wird, was offenbar keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet) derjenige Spezialfall dieses allgemeineren Satzes, in welchem man als (a, b) das Intervall $(0, p)$, ferner $\psi(x) \equiv 0$ und $\varphi_n(x) = \varphi(\nu_n x)$ wählt.

2. Dem Beweis schicken wir zwei Hilfssätze voran, von denen der erste eine Folge des Begriffes der Nichtkonvexität, der zweite eine Konsequenz dieses Begriffes und des obigen Fundamentallemmas ist.

Hilfssatz I. *Ist* $f(x)$ *eine im Intervall* $p \leqq x \leqq q$ *stetige nicht-konvexe Funktion für die*

$$f(p) = f(q) = 0, \quad f\left(\frac{p+q}{2}\right) = c > 0$$

ausfällt, so gilt

$$0 \leqq f(x) < 2c \qquad (p \leqq x \leqq q).$$

Das wird an Hand der Figur 3 sogleich evident, da doch infolge der Nichtkonvexität kein Punkt der Kurve $y = f(x)$ vor bzw. nach dem Punkte C oberhalb derjenigen Geraden liegt, die C mit dem Punkt der Abszissenachse von der Abszisse q, resp. p verbindet.

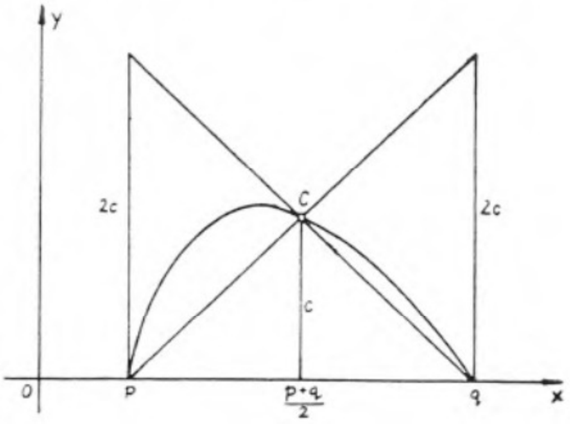

Fig. 3.

Hilfssatz II. *Werden die Punkte P_1, P_2 von den Abszissen $p_1 < p_2$ mit einem nicht konvexen Kurvenstück verbindet und wird von dem der Abszisse $\frac{p_1 + p_2}{2}$ entsprechenden Punkte R desselben aus in der Richtung der Ordinatenachse eine Strecke $\overline{RS} > 0$ abgetragen* (Fig. 4), *so gilt für die Richtungsfaktoren der Geraden P_1S, P_1P_2 und P_2S*

$$\{P_1S\} = \{P_1P_2\} + \mu,$$
$$\{P_2S\} = \{P_1P_2\} - \mu$$

wobei

$$\mu \geqq \frac{2}{p_2 - p_1} \overline{RS}$$

ausfällt.

Der Punkt R liegt nämlich infolge der Nichtkonvexität nicht unterhalb dem Punkt M der die Strecke $\overline{P_1P_2}$ halbiert, und daher wird $\overline{MS} \geqq \overline{RS}$, also ist die Behauptung eine Folge des Fundamentallemmas.

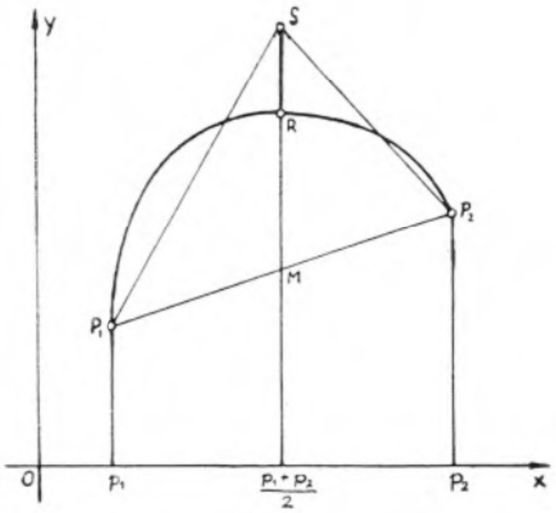

Fig. 4.

Wir wenden uns nach dieser Vorbereitung dem Beweis des oben formulierten Satzes zu.

Nach Hilfssatz I ist

$$0 \leqq \varphi_n(x) < 2c \qquad (a \leqq x \leqq b\,;\; n = 1, 2, 3, \ldots)$$

also hat die Reihe von Funktionen $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ die Majorante $\sum_{n=1}^{\infty} 2cc_n$, die wegen der Voraussetzung 2° konvergent ausfällt. Demzufolge ist diese Reihe von Funktionen im Intervall $a \leqq x \leqq b$ gleichmäßig konvergent, also hat sie daselbst eine stetige Summe, da doch ihre Glieder stetig sind. Nach Voraussetzung ist aber auch $\psi(x)$ stetig, also stellt die Formel (5) in diesem Intervall eine stetige Funktion $\Phi(x)$ dar.

Wir müssen uns noch davon überzeugen, daß für $a \leqq \xi \leqq b$ diese Funktion $\Phi(x)$ an der Stelle ξ nicht differenzierbar ist (an der Stelle a existiert für sie keine rechtsseitige, an b keine linksseitige endliche Ableitung).

Es seien zu diesem Zweck die Funktionen

$$s_n(x) = \psi(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

betrachtet. Für einen fixierten Index n sei in Bezug auf die Einteilung (3)

$$x_{i_n-1}^{(n)} \leqq \xi \leqq x_{i_n}^{(n)}. \tag{6}$$

(Fällt ξ mit einem inneren Zwischenpunkt zusammen, so gibt es zwei solche Indizes i_n für die (6) besteht, einer von denen soll nach Belieben gewählt werden.) Die Kurve

$$y = s_{n-1}(x) = \psi(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_{n-1}\varphi_{n-1}(x) \tag{7}$$

ist in diesem, ξ enthaltenden Teilintervalle $x_{i_n-1}^{(n)} \leqq x \leqq x_{i_n}^{(n)}$ nicht-konvex, da doch dieses Intervall nach der Wahl der Einteilungsfolge (3) in einem der Teilintervalle jeder vorherigen Einteilung

$$a = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < \cdots < x_{\nu_k-1}^{(k)} < x_{\nu_k}^{(k)} = b \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

enthalten ist, und so sind nach Voraussetzung die Glieder an der rechten Seite von (7) in diesem Intervall sämtlich nicht-konvex. Die Punkte der Kurve (7) mit den Abszissen $x_{i_n-1}^{(n)}$, $x_{i_n}^{(n)}$ seien P_1, P_2 (die oberen Indizes werden der Kürze wegen weggelassen). Die sind auch Punkte der Kurve der Funktion $\Phi(x)$ unter (5). Diese $x_{i_n-1}^{(n)}$ und $x_{i_n}^{(n)}$ sind nämlich nach der Konstruktion der Einteilungsfolge (3) auch Zwischenpunkte bei jeder weiteren Einteilung, und wir haben somit im Sinne von (4)

$$\varphi_k(x_{i_n-1}^{(n)}) = 0, \quad \varphi_k(x_{i_n}^{(n)}) = 0 \qquad (k = n, n+1, \ldots),$$

also ist mit Rücksicht auf (5) und (7) in der Tat

$$s_{n-1}(x_{i_n-1}^{(n)}) = \Phi(x_{i_n-1}^{(n)}), \quad s_{n-1}(x_{i_n}^{(n)}) = \Phi(x_{i_n}^{(n)}).$$

Wir bezeichnen (Fig. 5) mit S den Punkt der Kurve der Funktion $\Phi(x)$ von der Abszisse $\dfrac{x_{i_n-1}^{(n)} + x_{i_n}^{(n)}}{2}$, mit R bzw. Q den Punkt der Kurve (7) resp.

$$y = s_n(x) = s_{n-1}(x) + c_n\varphi_n(x) \tag{8}$$

von derselben Abszisse. Da infolge der Voraussetzung $c_n\varphi_n(x) \geqq 0$ ausfällt, so ist mit Rücksicht auf (8)

(9) $$s_1(x) \leqq \cdots \leqq s_{n-1}(x) \leqq s_n(x) \leqq \cdots \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

also gilt für die Funktion $\Phi(x)$ unter (5), d. h. für $\Phi(x) = \lim s_n(x)$ die Ungleichung

$$\Phi(x) \geqq s_n(x),$$

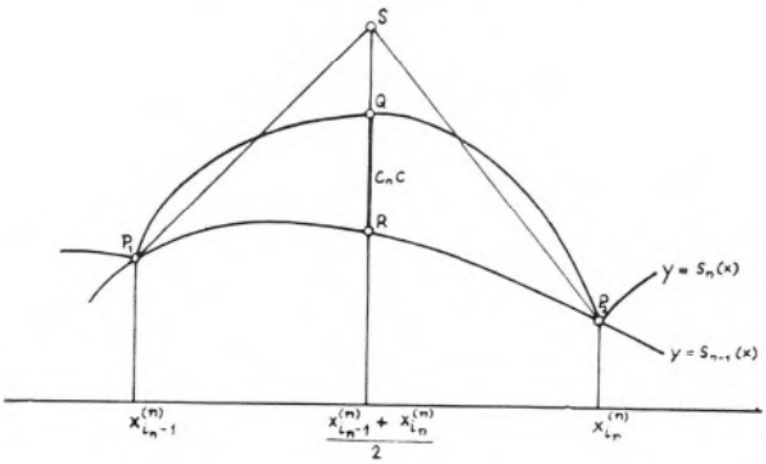

Fig. 5.

und der Punkt S liegt daher nicht unterhalb Q. Letzterer liegt wieder auf Grund von (9) nicht unterhalb R. Deshalb ist

$$\overline{RS} \geqq \overline{RQ} = c_n\varphi_n\left(\frac{x^{(n)}_{i_n-1} + x^{(n)}_{i_n}}{2}\right)$$

oder mit Rücksicht auf (4)

(10) $$\overline{RS} \geqq c_n c.$$

Im Sinne des Hilfssatzes II ist aber

(11) $$\{P_1S\} = \{P_1P_2\} + \mu_n, \quad \{P_2S\} = \{P_1P_2\} - \mu_n$$

wobei

$$\mu_n \geqq \frac{2}{x^{(n)}_{i_n} - x^{(n)}_{i_n-1}}\overline{RS}$$

ausfällt. Nach (10) ist also a fortiori

$$\mu_n \geqq \frac{2c_n c}{x^{(n)}_{i_n} - x^{(n)}_{i_n-1}}$$

und auf Grund der Voraussetzung 1° umsomehr

(12) $$\mu_n \geqq 2c > 0.$$

Existierte nun $\Phi'(\xi)$ als endlicher Wert, so wäre nach der bekannten Bemerkung von T. J. STIELTJES [5] der Grenzwert

$$\Phi'(\xi) = \lim \frac{\Phi(q) - \Phi(p)}{q - p} \qquad (p \leqq \xi \leqq q,\ p \to \xi,\ q \to \xi)$$

endlich. Da aber infolge (6) entweder

$$x_{i_n-1}^{(n)} \leqq \xi \leqq \frac{x_{i_n-1}^{(n)} + x_{i_n}^{(n)}}{2}$$

oder

$$\frac{x_{i_n-1}^{(n)} + x_{i_n}^{(n)}}{2} \leqq \xi \leqq x_{i_n}^{(n)}$$

besteht und diese Schranken für $n \to +\infty$ auf Grund der Voraussetzungen 1° und 2° (welche letztere $c_n \to 0$ nach sich zieht) gegen ξ streben, so müßten entweder die Richtungsfaktoren von P_1S und P_1P_2 oder die von P_2S und P_1P_2 den Wert $\Phi'(\xi)$ beliebig approximieren, wenn nur n gehörig groß ist. Das ist aber unmöglich, da wegen (11) und (12) die Differenz dieser Richtungsfaktoren in beiden Fällen beständig größer bleibt als eine bestimmte positive Zahl. Also existiert $\Phi'(\xi)$ als endlicher Wert nicht, d. h. die Funktion $\Phi(x)$ ist an der Stelle ξ nicht differenzierbar. W. z. b. w.

Aus diesem Satze folgt z. B. als eine unmittelbare Verallgemeinerung des zitierten Satzes von M. MIKOLÁS, der folgende:

Sind

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x), \ldots$$

stetige, nach $p > 0$ periodische und im Intervall $0 \leqq x \leqq p$ nicht-konvexe Funktionen die der Bedingung

$$\psi_n(0) = 0, \quad \psi_n\left(\frac{p}{2}\right) = c > 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

genügen, wobei c von n unabhängig ist, sind ferner $\nu_1 < \nu_2 < \cdots$ positive ganze Zahlen unter denen jede Zahl ν_n in der ihr folgenden ν_{n+1} aufgeht, so stellt die Reihe von Funktionen

$$\Phi(x) = c_1\psi_1(\nu_1 x) + c_2\psi_2(\nu_2 x) + \cdots + c_n\psi_n(\nu_n x) + \cdots$$
$$(-\infty < x < +\infty)$$

eine durchweg stetige nirgends differenzierbare Funktion dar, sobald $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe von positiven Gliedern ist und eine positive Zahl ϱ existiert, für die $\nu_n c_n \geqq \varrho > 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ausfällt.

Literatur.

[1] J. L. W. V. Jensen, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, *Acta Math.* **30** (1906), 175–193.

[2] M. Mikolás, Construction des familles de fonctions partout continues non dérivables, *Acta Sci. Math.* Szeged **17** (1956), 49—62, insb. 54—56.

[3] B. L. van der Waerden, Ein einfaches Beispiel einer nichtdifferenzierbaren stetigen Funktion, *Math. Z.* **32** (1930), 474—475.

[4] K. Knopp, Ein einfaches Verfahren zur Bildung stetiger nirgends differenzierbarer Funktionen, *Math. Z.* **2** (1918), 1—26, insb. 16—20.

[5] T. J. Stieltjes, Quelques remarques à propos des dérivées d'une fonction d'une seule variable (traduction), *Oevres complètes I* (Groningen, 1914), 67—72, insb. 68—69.

(Eingegangen am 11. Dezember, 1958.)