Verallgemeinerte Addition von Dichten.

Herrn Professor Otto Varga zum 50. Geburtstag mit Freundschaft gewidmet.

Von J. ACZÉL (Debrecen).

Eine (gewöhnliche) Dichte $\mathfrak{g} \neq 0$ vom Gewichte p ist ein geometrisches Objekt mit einer Komponenten im n-dimensionalen Raume, das bei einer Transformation

$$\bar{\xi}^{\varkappa} = \varphi^{\varkappa}(\xi^{k}), \qquad (k, \varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

der Koordinaten mittels der Formel

$$\bar{\mathfrak{g}} = \frac{\mathfrak{g}}{|J|^{p}} \operatorname{sg} J \tag{1}$$

transformiert wird, wo

$$J \stackrel{\text{def}}{=} \det\left(\frac{\partial \bar{\xi}^{\varkappa}}{d \xi^{k}}\right) \neq 0$$

die Funktionaldeterminante der Koordinatentransformation ist, und wie üblich

$$\operatorname{sg} t = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t = 0, \\ -1 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

geschrieben wurde.

Es ist wohlbekannt und man sieht auch aus (1) sofort, dass die Summe von zwei Dichten nur dann wieder eine Dichte ist, falls sie von gleichem Gewichte sind, dagegen ist das Produkt einer Dichte vom Gewichte p mit einer anderen vom Gewichte q immer eine Dichte vom Gewichte $p+q$ falls man sich auf positive J beschränkt. ST. GOŁĄB—H. PIDEK ŁOPUSZAŃSKA 1958 (S. Literaturverzeichnis) werfen davon ausgehend das Problem auf, wann die mit der eindeutig umkehrbaren, derivierbaren Funktion F gebildete „Quasisumme"

$$F[F^{-1}(\mathfrak{g}_1) + F^{-1}(\mathfrak{g}_2)] \tag{2}$$

von Dichten oder allgemeiner von *G-Objekten* mit der Transformationsformel

$$\bar{\mathfrak{g}}_i = \theta_i[\theta_i^{-1}(\mathfrak{g}_i) J], \qquad (i = 1, 2) \tag{3}$$

wieder ein G-Objekt ist. Die $\theta_i(t)$ sind für $t \neq 0$ *eindeutig umkehrbare meßbare* Funktionen, in (1) ist speziell $\theta_1(t) = |t|^{-p} \operatorname{sg} t$. — Die G-Objekte sind mit den gewöhnlichen Dichten (vom Gewichte —1) *äquivalent*, in (3) wird diese Äquivalenz durch θ_i *erzeugt*.

Diese Frage wollen wir in dieser Arbeit statt für (2) gleich für die allgemeinere Operation

$$F_3[F_1^{-1}(\mathfrak{g}_1) + F_2^{-1}(\mathfrak{g}_2)] \tag{4}$$

und ohne Derivierbarkeitsvoraussetzungen lösen (F_1, F_2, F_3 sind *eindeutig umkehrbare messbare* Funktionen). — Die analytische Fassung und gewisse Lösungsschritte unseres Problems sind denen von B. DE FINETTI 1931, G. H. HARDY—J. E. LITTLEWOOD—G. PÓLYA 1934, I. J. GOOD 1950, J. ACZÉL 1955, 1958 und ST. GOŁĄB—S. ŁOJASIEWICZ 1956 gewissermaßen verwandt.

Es sollen also $\mathfrak{g}_i$ $(i = 1, 2)$ laut (3) transformiert werden, während ihre „verallgemeinerte Summe"

$$\mathfrak{g}_3 = F_3[F_1^{-1}(\mathfrak{g}_1) + F_2^{-1}(\mathfrak{g}_2)], \tag{5}$$

wo F_1, F_2 und F_3 eindeutig umkehrbare meßbare Funktionen sind und (5) in jedem Koordinatensystem gültig ist, laut

$$\bar{\mathfrak{g}}_3 = \theta_3[\theta_3^{-1}(\mathfrak{g}_3)J] \tag{6}$$

transformiert wird (auch θ_3 ist meßbar und eindeutig umkehrbar). Unser Ziel ist, bei gegebener Operation (4) (d. h. bei gegebenen F_1, F_2, F_3) jene G-Objekte $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ (d. h. jene Funktionen θ_1, θ_2) zu bestimmen, deren verallgemeinerte Summe (5) wieder ein G-Objekt ist, und dann die Transformationsformel dieses resultierenden Objektes (oder, was gleichbedeutend ist, die Funktion θ_3) festzustellen. Wir sagen in diesem Falle, daß $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ *die verallgemeinerte Addition* (4) *zulassen*.

Da (5) als in jedem Koordinatensystem gültig vorausgesetzt wurde, gilt auch

$$\bar{\mathfrak{g}}_3 = F_3[F_1^{-1}(\bar{\mathfrak{g}}_1) + F_2^{-1}(\bar{\mathfrak{g}}_2)].$$

Wenn wir hier (3), (6) und (5) einsetzen, gelangen wir zur Funktionalgleichung

$$\begin{aligned} &\theta_3(\theta_3^{-1}\{F_3[F_1^{-1}(\mathfrak{g}_1) + F_2^{-1}(\mathfrak{g}_2)]\}J) = \\ &= F_3(F_1^{-1}\{\theta_1[\theta_1^{-1}(\mathfrak{g}_1)J]\} + F_2^{-1}\{\theta_2[\theta_1^{-1}(\mathfrak{g}_2)J]\}), \end{aligned} \tag{7}$$

die mit den Bezeichnungen

$$x_i \overset{\text{def}}{=} \theta_i^{-1}(\mathfrak{g}_i), \quad \mathfrak{g}_i = \theta_i(x_i), \qquad (i = 1, 2),$$

$$f_i(x) \overset{\text{def}}{=} F_i^{-1}[\theta_i(x)], \qquad (i = 1, 2), \tag{8}$$

$$f_3(x) \overset{\text{def}}{=} F_3^{-1}[\theta_3(x)] \tag{9}$$

in

$$f_3^{-1}[f_1(x_1J)+f_2(x_2J)]=f_3^{-1}[f_1(x_1)+f_2(x_2)]J \tag{10}$$

übergeht.

Um diese Funktionalgleichung zu lösen, halten wir J vorläufig fest und schreiben

$$\varphi_j(t)\overset{\text{def}}{=}f_j[Jf_j^{-1}(t)],\qquad (j=1,2,3). \tag{11}$$

So wird aus (10) mit

$$t_i\overset{\text{def}}{=}f_i(x_i),\qquad (i=1,2)$$

endlich

$$\varphi_1(t_1)+\varphi_2(t_2)=\varphi_3(t_1+t_2).$$

Das allgemeine Lösungssystem dieser Funktionalgleichung (vgl. H. W. PEXIDER 1903), die durch Einsetzen von $t_1=0$ bzw. $t_2=0$ auf die Grundgleichung (A. L. CAUCHY 1821)

$$\varphi(t_1)+\varphi(t_2)=\varphi(t_1+t_2)$$

zurückgeführt werden kann, lautet aber unter Voraussetzung der Messbarkeit von $\varphi_3(t)$

$$\varphi_1(t)=ct+c_1,$$
$$\varphi_2(t)=ct+c_2,$$
$$\varphi_3(t)=ct+c_1+c_2,$$

wo c_1, c_2 und c drei Konstanten sind, die aber von der provisorisch festgehaltenen Veränderlichen J noch abhängen. So gilt [vgl. (11)]

$$f_j[Jf_j^{-1}(t)]=\varphi_j(t)=c(J)t+c_j(J),\qquad (j=1,2,3;\ c_3=c_1+c_2)$$

oder, was dasselbe ist,

$$f_j(Jx)=c(J)f_j(x)+c_j(J),\qquad (j=1,2,3;\ c_3=c_1+c_2). \tag{12}$$

Um diese Funktionalgleichungen zu lösen, setzen wir $x=1$ ein und erhalten

$$f_j(J)=c(J)f_j(1)+c_j(J),\qquad (j=1,2,3)$$

oder wenn wir dies aus (12) subtrahieren und

$$h_j(x)\overset{\text{def}}{=}f_j(x)-f_j(1),\qquad (j=1,2,3) \tag{13}$$

einführen:

$$h_j(Jx)=c(J)h_j(x)+h_j(J),\qquad (j=1,2,3). \tag{14}$$

Aus Symmetriegründen folgt weiter

$$h_j(Jx) = c(x)h_j(J) + h_j(x)$$

und durch Vergleich der beiden letzten Gleichungen

$$h_j(x)[c(J)-1] = h_j(J)[c(x)-1]. \tag{15}$$

Zwei Fälle müssen jetzt unterschieden werden:

$$\text{A)} \quad c(t) \not\equiv 1 \quad \text{und} \quad \text{B)} \quad c(t) \equiv 1.$$

Im ersten Falle A) gibt es ein t_0 derart, daß $c(t_0) \neq 1$ ist und aus (15) bekommen wir mit

$$J = t_0, \quad k_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{h_j(t_0)}{c(t_0)-1}$$

die Lösung

$$h_j(x) = k_j[c(x)-1], \qquad (j = 1, 2, 3). \tag{16}$$

Setzen wir dies in (14) ein, so erhalten wir

$$k_j c(Jx) = k_j c(J) c(x). \tag{17}$$

Wäre ein $k_j = 0$, so würde aus (16) $h_j(x) = 0$ folgen und wegen (13) wäre das entsprechende $f_j(x)$ konstant, was aber den Definitionen (8), (9) und der vorausgesetzten eindeutigen Umkehrbarkeit der Funktionen F_j und θ_j widersprechen würde. Also ist $k_j \neq 0$ $(j = 1, 2, 3)$ und (17) geht in

$$c(Jx) = c(J)c(x)$$

über. — Die meßbaren Lösungen dieser Gleichung [wegen (8), (9), (13) und (16) ist mit F_j, θ_j, f_j, h_j auch $c(x)$ *eindeutig umkehrbar und meßbar*] sind aber die folgenden und nur diese (s. R. SCHIMMACK 1908, J. ACZÉL 1958)

$$c(x) = 0, \quad c(x) = \operatorname{sg} x, \tag{18}$$

$$c(x) = |x|^a, \tag{19}$$

$$c(x) = |x|^a \operatorname{sg} x, \qquad (a \neq 0). \tag{20}$$

(18) und (19) sind nicht eindeutig umkehrbare Funktionen, so kommt für unser Problem nur (20) in Frage. [Falls immer $x > 0$ wäre, würde auch (19) taugen, in diesem Falle fällt aber (19) mit (20) zusammen.] Dann ist aber aus (16) und (13)

$$f_j(x) = k_j|x|^a \operatorname{sg} x + K_j, \qquad (j = 1, 2, 3;\ k_j \neq 0,\ a \neq 0), \tag{21}$$

($K_j \stackrel{\text{def}}{=} f_j(1) - k_j$ konstant).

Setzen wir dies endlich in (12) ein, so erhalten wir

$$c_j(J) = K_j(1 - |J|^a \operatorname{sg} J) \quad \text{und} \quad c_3 = c_1 + c_2,$$

so daß

$$K_3 = K_1 + K_2 \tag{22}$$

ist. Also ist im Falle A) wegen (8), (9) und (21), (22)

$$\theta_i(x) = F_i(k_i |x|^a \operatorname{sg} x + K_i), \qquad (i = 1, 2;\ k_i \neq 0,\ a \neq 0), \tag{23}$$

$$\theta_3(x) = F_3(k_3 |x|^a \operatorname{sg} x + K_1 + K_2), \qquad (k_3 \neq 0) \tag{24}$$

die allgemeine meßbare und eindeutig umkehrbare Lösung der Funktionalgleichung (7). (Das Einsetzen zeigt nämlich auch, daß (23) und (24) die Gleichung (7) erfüllen.)

Im Falle B) reduziert sich wegen $c(t) \equiv 1$ die Gleichung (12) auf

$$f_j(Jx) = f_j(x) + c_j(J), \qquad (j = 1, 2, 3;\ c_3 = c_1 + c_2). \tag{25}$$

Setzen wir hier (vgl. H. PEXIDER 1903) $x = 1$ ein, so erhalten wir einen Zusammenhang zwischen f_j und c_j:

$$f_j(J) = f_j(1) + c_j(J), \qquad (j = 1, 2, 3;\ c_3 = c_1 + c_2), \tag{26}$$

welcher in (25) eingesetzt

$$c_j(Jx) = c_j(x) + c_j(J)$$

ergibt. Die allgemeine messbare Lösung (wegen (8), (9) und (26) ist mit F_j, θ_j und f_j auch $c_j(t)$ *eindeutig umkehrbar und meßbar*) dieser Gleichung ist aber (s. R. SCHIMMACK 1908, J. ACZÉL 1958)

$$c_j(x) = k_j \log |x|,$$

was aber nur dann eindeutig umkehrbar ist, falls $x > 0$,

$$c_j(x) = k_j \log x, \quad k_j \neq 0$$

ist. (26) ergibt dann $\left(K_j \overset{\text{def}}{=} f_j(1)\text{ ist konstant}\right)$

$$f_j(x) = k_j \log x + K_j, \quad (j = 1, 2, 3;\ k_j \neq 0) \text{ und } k_3 = k_1 + k_2.$$

Also ist im Falle B) wegen (8) und (9)

$$\theta_i(x) = F_i(k_i \log x + K_i), \quad (i = 1, 2,\ k_i \neq 0,\ x > 0). \tag{27}$$

$$\theta_3(x) = F_3[(k_1 + k_2) \log x + K_3], \qquad (k_1 + k_2 \neq 0) \tag{28}$$

die allgemeine meßbare und eindeutig umkehrbare Lösung der Funktionalgleichung (7) für positive J. Das Einsetzen zeigt nämlich, daß (7) durch (27), (28) für $J > 0$ erfüllt wird.

Zusammenfassend haben wir den

Satz. *Die Funktionalgleichung* (7) *hat bei Zulassen von beliebigen J das Lösungssystem* (23), (24), *bei Beschränkung auf positive J auch noch* (27), (28), *es gibt aber keine weitere messbare und eindeutig umkehrbare Lösungen.*

Zwei G-Objekte lassen eine verallgemeinerte Addition (4) *dann und nur dann zu, wenn die Funktionen die ihre Äquivalenz mit einer gewöhnlichen Dichte vom Gewichte* —1 *erzeugen, von der Gestalt* (23) *oder* (27) *sind (letztere nur falls man sich auf Koordinatentransformationen mit positiver Funktionaldeterminante beschränkt). Dann ist auch das resultierende Objekt mit einer solchen Dichte äquivalent und die Äquivalenz wird durch die Funktion* (24) *bzw.* (28) *erzeugt.*

Unser Satz enthält u. a. die folgenden schon erwähnten Spezialfälle: Die gewöhnliche Summe von zwei gewöhnlichen Dichten ist genau dann ein G-Objekt, falls sie von gleichem Gewichte sind. Das Produkt zweier gewöhnlichen Dichten mit beliebigen Gewichten ist immer auch selbst eine gewöhnliche Dichte, falls man sich auf Koordinatentransformationen mit $J > 0$ beschränkt. Wir bemerken, dass $\mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_2$ nur für positive $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ eine verallgemeinerte Addition (4) ist. — Man kann übrigens mit unserer Methode auch für die „verallgemeinerte Multiplikation" $F_3[F_1^{-1}(\mathfrak{g}_1) \cdot F_2^{-1}(\mathfrak{g}_2)]$ von G-Objekten und auch für W-Objekte mit

$$\overline{\mathfrak{w}_j} = \theta_j[\theta_j^{-1}(\mathfrak{w}_j)|J|]$$

($j = 1$ oder 2 oder 3) statt (3), (6) einen ähnlichen Satz beweisen, dies ergibt aber im wesentlichen nichts neues.

Die Forderung der Messbarkeit kann durch schwächere Forderungen ersetzt werden (z. B. durch *Majorisierbarkeit mit einer messbaren Funktion auf einer Menge von positivem Maß*, vgl. J. Aczél 1958).

Literaturverzeichnis.

J. Aczél 1955 A solution of some problems of K. Borsuk and L. Jánossy, *Acta Physica Acad. Sci. Hung.* **4**, 351—362.

J. Aczél 1958 Miszellen über Funktionalgleichungen. I., *Math. Nachrichten* **19**, 87—99.

A. L. Cauchy 1821 Cours d'analyse de l'École Polytechnique. 1. Analyse algébrique. *Paris.* Chap. V. § 1.

B. de Finetti 1931 Sul concetto di media, *Giornale dell'Ist. Ital. d. Attuarii* **2**, 369—396.

St. Gołąb—S. Łojasiewicz 1956 Un théorème sur la valeur moyenne θ dans la formule des acroissements finis, *Annales pol. math.* **3**, 118—125.

St. Gołąb—H. Pidek Łopuszańska 1958 Sur l'algèbre des objets géométriques de première classe à une composante, *Annales pol. math.* **4**, 226—248.

I. J. Good 1950 Probability and the weighing of evidence, *London*, Appendix III.

G. H. Hardy—J. E. Littlewood—G. Pólya 1934 Inequalities, *Cambridge.* Chap. III. § 33.

H. W. Pexider 1903 Notiz über Funktionaltheoreme, *Monatsh. f. Math. u. Physik* **14**, 293—301.

R. Schimmack 1908 Axiomatische Untersuchungen über die Vektoraddition, (Dissertation) *Halle.*

(Eingegangen am 17. Dezember 1958.)