Über die Iteration reeller Funktionen I.

Herrn Ottó Varga anlässlich seines 50. Geburtstages mit herzlicher Freundschaft zugeeignet.

Von BÉLA BARNA (Debrecen).

Die systematische Untersuchung der Iteration analytischer Funktionen komplexer Veränderlicher — denen das Bestreben nach den Lösungsmethoden gewisser Funktionengleichungen zugrunde lagen — begann noch in dem letzten Drittel des vorigen Jahrhunderts [1]); um die Jahrhundertwende wurde sie ein selbstständiges Forschungsgebiet [2]), während die in der letzten Zeit erreichten Ergebnisse einzelner wesentlicher Problemenkreise schon einen abschließenden Charakter haben. [3])

Die allgemeine Begründung der Iterationstheorie der reellen Funktionen relativ zu dieser Entwicklung scheint nicht einmal im Anfangsstadium zu sein. Die Abhandlungen über dieses Thema — abgesehen von dem Gebiet der praktischen Anwendungen — behandeln hauptsächlich die Lösungen einiger wichtiger und interessanter Einzelfragen. [4]) Nach unserem Wissen sind Abhandlungen von breiteren Stoffkreisen, und mit Erörterungen allgemeiner und grundlegender Art, nicht erschienen. Die Ursache dieser Rückständigkeit der Iterationstheorie reeller Funktionen wird in der Tatsache bestanden haben, daß — eben der vielseitigen Brauchbarkeit zufolge — fast ausschließlich die *Anwendungen* der Iteration im Vordergrund stehen, bei denen die — in der Nähe gewisser stellen, der sog. Fixpunkte bestehende — Konvergenz schon ein wirksames Hilfsmittel ist.

Im folgenden wollen wir uns gerade über diese „lokalen“ Eigenschaf-

---

[1]) S. Literatur am Schluß dieser Abhandlung. In den Arbeiten [1]—[11] handelt es sich um die Iterationsprobleme von komplexen Funktionen, in den anschließenden Arbeiten um die Iterationproblemen von reellen Funktionen.

[2]) S. insb. [1], [2], [3], [4], [7].

[3]) S. insb. [8], [10], [11].

[4]) Bei einiger dieser Fragen werden die Resultate der Iterationstheorie der komplexen analytischen Funktionen angewandt, z. B. [17], [22].

ten hinaus mit einigen Fragen der Iteration reellen Funktionen mit einer Veränderliche beschäftigen, ohne nach Vollständigkeit und Ausführlichkeit zu bestreben.

§ 1.

Es sei $f(x)$ eine, in dem geschlossenem Intervall $I=[a,b]$ $(a<b)$ definierte, und den folgenden Bedingungen genügende eindeutige, reelle Funktion:

A) $f(x)$ ist in jedem inneren Punkte von I (und in den Endpunkten a und b rechts-, bzw. linksseitig) stetig;

B) die Werte von $f(x)$ liegen in I;

C) es gibt kein Intervall in I, in dem $f(x)=\text{const.}$ ist.[5]

Wir werden mit ε immer positive Zahlen bezeichnen, und wir verstehen unter einer *Umgebung* des Punktes $c(\in I)$ ein Intervall[6] $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$; eine *Linksumgebung (Rechtsumgebung)* von c ist ein Intervall $(c-\varepsilon, c)$ $((c, c+\varepsilon))$.

Die Funktion $f(x)$ wird (iterative) *Grundfunktion* genannt; es ist weiter für jedes x

$$f_0(x)=x,\ f_1(x)=f(x),\ f_{n+1}(x)=f[f_n(x)] \qquad (n=0,1,2,\ldots);$$

hier ist $f_n(x)$ *die n-te Iterierte* von $f(x)$, oder die *Iterierte n-ter Ordnung*. Es gilt

$$f_{n+m}(x)=f_n[f_m(x)]=f_m[f_n(x)] \qquad (n,m=0,1,2,\ldots).$$

Die Funktionenfolge $f_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ ist die *Iterationsfolge* von $f(x)$. Man folgert aus A) und B), daß jedes Element dieser Folge eine in I stetige Funktion ist, und aus $x_0\in I$ folgt: $x_n=f_n(x_0)\in I$. Es existiert also die *Iterationsfolge*[7])

$$x_0, x_1, x_2, \ldots$$

jedes *Anfangspunktes* $x_0\in I$. Die Elemente dieser Punktfolge sind *die Iterierten,* oder *die Nachfolger* des Punktes x_0.

Ist Δx ein Intervall in I, so bilden die Punkte $x_1=f(x), x\in\Delta x$ auch ein Intervall, dessen Endpunkte $\inf f(x)$ und $\sup f(x), x\in\Delta x$ sind. (Nach C) sind diese Punkte voneinander verschieden.) Dies ist *das* erste *iterierte Inter-*

---

5) Von den hiesigen verschiedene Bedingungen treten bei S. P. Pulkin auf ([19]). Siehe noch die Arbeit von V. M. Dubrowski ([14]), insb. p. 132—133.

6) Die offenen und geschlossenen Intervalle werden — wie gewöhnlich — mit runden, bzw. eckigen Klammern bezeichnet.

7) Die nach lateinischen und griechischen kleinen Buchstaben, oder nach Klammerausdrücken stehenden Indizes sind Iterationsindizes; nur die nach großen Buchstaben stehenden Indizes und solche die anderen Indizes angehängt sind, werden in dem gewöhnlichen, unterscheidenden Sinne verwendet.

vall $(\Delta x)_1$ von Δx. Allgemein wird das n-te iterierte Intervall von Δx durch

$$(\Delta x)_n = ((\Delta x)_{n-1})_1$$

definiert. Es ist leicht einzusehen, daß in I kein Intervall existiert, in dem $f_n(x) = \text{const.}$ ist.

Die Punkte x', deren Iterationsfolge den Punkt x enthält, sind *die invers-iterierten Punkte*, oder *die Vorgänger* des Punktes x; ist n die kleinste natürliche Zahl, für welche $f_n(x') = x$ gilt, so ist x' ein Vorgänger *n-ter Ordnung:* $x' = x_{-n}$.

In dem Fall $f(\xi) = \xi$ ist ξ ein *Fixpunkt erster Ordnung* der Funktion $f(x)$. Gilt $f_k(\eta) \neq \eta$, $k = 1, 2, \ldots, \nu - 1$, und $f_\nu(\eta) = \eta$, so ist der Punkt η ein *Fixpunkt ν-ter Ordnung*. Dann sind auch die Punkte $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\nu-1}$ (paarweise) verschiedene Fixpunkte ν-ter Ordnung; die Punkte $\eta, \eta_1, \ldots, \eta_{\nu-1}$ bilden einen *Zyklus* ν-ter Ordnung, die Elemente des Zyklus nennen wir *konjugierte* Fixpunkte. Die Iterationsfolge des Punktes η entsteht durch periodische Wiederholung der konjugierten Fixpunkte; so enthält sie nur ν verschiedene Punkte. Die Fixpunkte erster Ordnung spielen bei der Konvergenz iterativer Punktfolgen eine wichtige Rolle. Es gilt nämlich:

Ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \gamma$, *so ist der Punkt* γ *ein Fixpunkt erster Ordnung*. Die Richtigkeit dieses Satzes folgt aus den Gleichungen:

$$\gamma = \lim x_n = \lim x_{n+1} = \lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(\gamma).$$

Die Tatsache $\lim x_n = \gamma$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ wird schlechthin durch „x_0 gehört zu γ“ ausgedrückt. Es ist offensichtlich, daß dann die Vorgänger und die Nachfolger von x_0 zu γ gehören. Wir nennen einen Punkt x_0 einen *Konvergenzpunkt,* wenn $\lim x_n$ existiert; in jedem anderen Fall ist er ein *Divergenzpunkt*. Nach dem vorigen Satz sind die Konvergenzpunkte die zu den Fixpunkten erster Ordnung gehörigen Punkte. Ein Intervall, dessen jeder Punkt Konvergenzpunkt ist, nennt man ein *Konvergenzintervall*. Dies ist *vollständig,* wenn es kein eigentlicher Teil eines Konvergenzintervalls ist.

§ 2.

Wir beschäftigen uns in diesem § nur mit Fixpunkten erster Ordnung, deshalb können wir das Attribut „erster Ordnung“ fallen lassen.

Man wird den Fixpunkt ξ einen *anziehenden* Fixpunkt nennen, wenn er eine, nur zu ihm gehörige Punkte enthaltende Umgebung besitzt; ξ ist *linksanziehend (rechtsanziehend)* wenn er kein anziehender Fixpunkt ist, und eine Linksumgebung (Rechtsumgebung) hat, deren jeder Punkt zu ihm gehört; die links- und rechtsanziehenden Fixpunkte zusammen sind die *halbanziehen-*

den Fixpunkte; der Fixpunkt ξ ist *abstoßend,* wenn es außer ξ und seinen Vorgängern keinen zu ihm gehörigen Punkt gibt; alle anderen (nicht aufgezählten) Fixpunkte werden als *gemischt* bezeichnet.[8])

Satz 1. *Bezeichnen D^-, d^-, D^+, d^+ die Ableitungszahlen*[9]) *von $f(x)$ im Fixpunkt ξ und gilt $D^-, D^+, d^- \cdot d^+ < 1$, so ist ξ ein anziehender Fixpunkt.*

Beweis. Aus $D^-, D^+ < 1$ folgt, daß ξ ein isolierter Fixpunkt ist, und daß in seiner genügend kleinen Links- und Rechtsumgebung $x < f(x)$, bzw. $x > f(x)$ gilt. Es existieren weiter zu ε die Zahlen $h^-(\varepsilon) > 0$, $h^+(\varepsilon) > 0$ so, daß

$$(1) \qquad d^- - \varepsilon < \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \quad \text{für} \quad \xi - h^- < x < \xi,$$

$$(2) \qquad d^+ - \varepsilon < \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \quad \text{für} \quad \xi < x < \xi + h^+$$

gilt. Wählen wir ε so, daß für die Zahlen $\delta^- = d^- - \varepsilon$, $\delta^+ = d^+ - \varepsilon$ die Ungleichung

$$(3) \qquad \delta^- \cdot \delta^+ < 1$$

besteht (was wegen $d^- d^+ < 1$ möglich ist), und die positive Zahl

$$h \leqq \min \{h^-(\varepsilon), h^+(\varepsilon)\}$$

so, daß ξ im Intervall $(\xi - h, \xi + h)$ der einzige Fixpunkt ist. Dann erhalten wir aus (1) und (2):

$$(4) \qquad x < f(x) < \delta^-(x - \xi) + \xi, \quad x \in (\xi - h, \xi),$$

$$(5) \qquad \delta^+(x - \xi) + \xi < f(x) < x, \quad x \in (\xi, \xi + h).$$

Zuerst betrachten wir den Fall

$$(6) \qquad \delta^-, \delta^+ < 0,$$

und es sei z. B.

$$(7) \qquad |\delta^-| \leqq |\delta^+|.$$

Dann ist — wegen $|\delta^-|^2 < |\delta^- \delta^+| < 1$ —

$$(8) \qquad |\delta^-| < 1.$$

---

[8]) Vgl. [18], p. 70.

[9]) Es ist also

$$\underline{\lim} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \begin{cases} d^-, & x < \xi, \\ d^+, & x > \xi, \end{cases} \qquad \overline{\lim} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \begin{cases} D^-, & x < \xi, \\ D^+, & x > \xi. \end{cases}$$

Wir beschränken uns natürlich auf Ableitungszahlen mit endlichen Werten.

Wir beweisen: aus $x_0 \in (\xi - h, \xi)$ folgt,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \xi. \tag{9}$$

Ist x_0 ein Vorgänger des Punktes ξ, so ist (9) gültig. Nehmen wir also an, daß $x_n \neq \xi$ (für jedes n) gilt. Liegt jeder Punkt der Folge (x_n) links von ξ, so ist nach (4) $x_n < f(x_n) = x_{n+1}$ $(n = 0, 1, \ldots)$, die Folge ist also eine beschränkte und monoton wachsende Iterationsfolge, woraus (9) folgt. Wir nehmen also an, daß es rechts von ξ liegende x_n-Punkte gibt. Wir unterscheiden die links, und die rechts von ξ liegenden Elemente von (x_n) durch das Unterstreichen der letzteren:

$$x_0, x_1, \ldots, x_i, \underline{x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_j}, x_{j+1}, \ldots, x_{i_1}, \underline{x_{i_1+1}, \ldots, x_{j_1}}, x_{j_1+1}, \ldots \tag{10}$$

Die Punkte x_n, die von den unmittelbaren Vorgängern durch ξ getrennt werden, nennen wir „überspringende Punkte". Diese sind rechts von ξ: $x_{i+1}, x_{i_1+1}, x_{i_2+1}, \ldots$, links von ihm: $x_{j+1}, x_{j_1+1}, x_{j_2+1}, \ldots$. Aus (4) und (5) folgt jetzt, daß in (10) die unterstrichenen Segmente monoton fallende, die andere monoton wachsende Teilfolgen sind. Wir zeigen daß die Folge sämtlicher links von ξ liegenden Punkte monoton wächst. Aus $x_i \in (\xi - h, \xi)$ folgt nämlich nach (4)

$$\xi < x_{i+1} < \delta^-(x_i - \xi) + \xi, \tag{11}$$

also, durch Anwendung der wegen (6) und (8) bestehenden Relationen $\delta^-(x_i - \xi) = |\delta^-|(\xi - x_i) < h$, bekommen wir

$$\xi < x_{i+1} < \xi + h, \tag{12}$$

sodaß man auf den Punkt $x = x_{i+1}$ (5) anwenden kann:

$$\xi < x_j < x_{j-1} < \cdots < x_{i+1} < \xi + h.$$

So ist nach (11) $\xi < x_j < \delta^-(x_i - \xi) + \xi$, d. h.

$$0 < x_j - \xi < \delta^-(x_i - \xi) = |\delta^-|(\xi - x_i). \tag{13}$$

Es sei jetzt in (5) $x = x_j$, so folgt aus $\delta^+(x_j - \xi) + \xi < x_{j+1}$, durch Anwendung von (13) und (6): $0 < \xi - x_{j+1} < |\delta^- \delta^+|(\xi - x_i)$, woraus man einerseits (wegen $|\delta^- \delta^+| < 1$) die Ungleichung

$$x_i < x_{j+1}, \tag{14}$$

anderseits (wegen $x_{j+1} < x_{i_1}$) die Relationen

$$0 < \xi - x_{i_1} < |\delta^- \delta^+|(\xi - x_i) \tag{15}$$

herleiten kann, d. h. es gilt $x_i < x_{i_1}$. Durch vollständige Induktion sind die

Verallgemeinerungen von (12), (14) und (15)

$$\xi < x_{i_k+1} < \xi + h, \tag{16}$$

$$x_{i_k} < x_{j_k+1}, \tag{17}$$

$$0 < \xi - x_{i_{k+1}} < |\delta^- \delta^+|(\xi - x_{i_k}) \tag{18}$$

für jedes k beweisbar. Die Ungleichung (17) zeigt, daß sämtliche nicht unterstrichenen Elemente in (10) eine monoton wachsende Folge bilden. Wenn es also in der Folge (x_n) nur endlich viele überspringende Punkte gibt, dann bilden die Punkte x_n von einem gewissen Index an entweder im Intervall $(\xi - h, \xi)$ eine monoton zunehmende, oder in $(\xi, \xi + h)$ eine fallende unendliche Iterationsfolge, woraus (9) folgt. Gibt es aber unendlich viele überspringende Punkte, dann bilden die links von ξ liegenden x_n-Punkte eine monoton zunehmende unendliche Folge, die also konvergiert. Durch Anwendung (18) für $k = 0, 1, 2, \ldots$ erhält man

$$0 < \xi - x_{i_k} < |\delta^- \delta^+|^k (\xi - x_i), \qquad (i_0 = i)$$

woraus $\lim\limits_{k \to \infty} x_{i_k} = \xi$ folgt. Deshalb konvergiert die Folge der links von ξ liegenden x_n-Punkte zu ξ. Aus den Gleichungen

$$\lim_{k \to \infty} x_{i_k+1} = \lim_{k \to \infty} f(x_{i_k}) = f(\lim x_{i_k}) = f(\xi) = \xi$$

folgert man nur sehr einfach, daß auch die Folge der rechts von ξ liegenden Punkte nach ξ strebt. Somit ist (9) (im Fall $x_0 \in (\xi - h, \xi)$) bewiesen.

Es sei jetzt der Punkt x_0 *rechts* von ξ, und zwar im Intervall $(\xi, \xi + \bar{h})$, wo $\bar{h} = h/\max\{1, |\delta^+|\}$ ist. Dann gilt auch (9). Im Falle $\xi < x_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ist nämlich — wegen $\bar{h} \leqq h$ — (5) gültig, und so nimmt (x_n) monoton ab, also $x_n \to \xi$. Gibt es aber überspringende Punkte, z. B. $x_{i+1} < \xi < x_i$, so ist $\delta^+(x_i - \xi) + \xi < x_{i+1}$, d. h. $(\xi - x_{i+1}) < |\delta^+|(x_i - \xi)$, und wegen $x_i - \xi < \bar{h}$ folgt $\xi - x_{i+1} < |\delta^+| \bar{h} \leqq h$. Dies bedeutet: $x_{i+1} \in (\xi - h, \xi)$, und so folgt aus den vorigen (9).

Wir können durch ein analoges Verfahren die Behauptung des Satzes auch dann beweisen, wenn statt (7) die Ungleichung $|\delta^-| > |\delta^+|$ gilt.

Ist nur eine der Ungleichungen (6) richtig, gilt z. B.

$$\delta^- \geqq 0, \ \delta^+ < 0,$$

so gibt es keinen überspringenden Punkt, falls $x_0 < \xi$ ist. Die Folge (x_n) wächst monoton, und es ergibt sich (9). Ebenso folgt die Behauptung im Fall $\xi < x_0$, wenn es keinen überspringenden Punkt gibt. Gibt es einen solchen, so ist dieser eindeutig bestimmt und liegt links von ξ, also nach den vorigen gilt (9).

Noch einfacher ist der Beweis im Falle

$$\delta^- \geqq 0, \ \delta^+ \geqq 0;$$

dann gibt es nämlich keinen überspringenden Punkt.

Bemerkung. Die Bedingungen des Satzes 1 sind für den anziehenden Charakter des Fixpunktes nicht notwendig. Dies zeigt das Beispiel $f(x) = \sin x$, $I = \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$. In dem einzigen Fixpunkt $\xi = 0$ gilt $d^- = D^- = d^+ = D^+ = 1$, doch er ist anziehend.

Satz 2. *Die inneren Punkte von I, welche zu einem anziehenden Fixpunkt gehören, bilden eine offene Menge.*

Beweis. Ist ξ ein anziehender Fixpunkt, so hat er eine Umgebung $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$, deren Punkte zu ihm gehören. Es sei $x' \in (a, b)$ ein beliebiger, zu ξ gehöriger Punkt. Wegen $\lim_{n \to \infty} x'_n = \xi$ gibt es eine natürliche Zahl $N = N(\varepsilon)$ so, daß

$$|x'_n - \xi| = |f_n(x') - \xi| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{gilt, wenn} \quad n > N(\varepsilon) \text{ ist.}$$

Es ist anderseits $f_n(x)$ in x' stetig, und so gibt es zu ε ein $\delta(\varepsilon) > 0$ derart, daß

$$|f_n(x) - f_n(x')| = |x_n - x'_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ist, falls nur } |x - x'| < \delta \text{ gilt.}$$

Für jeden Punkt $x \in (x' - \delta, x' + \delta)$ gilt also

$$|x_n - \xi| \leqq |x'_n - \xi| + |x_n - x'_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

und dies bedeutet, daß jeder Punkt des Intervalls $(x' - \delta, x' + \delta)$ zu ξ gehört.

Das längste, den anziehenden Fixpunkt ξ enthaltende Intervall $\varDelta\xi$, dessen sämtliche Punkte zu ξ gehören, nennt man *das unmittelbare Konvergenzintervall* des anziehenden Fixpunktes. Die Grenzpunkte desselben werden mit α und β $(\alpha < \beta)$ bezeichnet. Aus dem Satz 2 folgt, daß die Menge der zu ξ gehörigen Punkte $x \in (a, b)$ die Vereinigung abzählbarer, offener, disjunkter Intervalle ist. Gilt also $a < \alpha$ und $\beta < b$, dann ist $\varDelta\xi$ ein offenes Intervall. Es können aber Fälle vorkommen, in denen einer, oder beide der Punkte α, β mit a, resp. b zusammenfallen. Dann kann $\varDelta\xi$ ein halboffenes, oder geschlossenes Intervall sein.

Satz 3. *Ist $\varDelta\xi$ das unmittelbare Konvergenzintervall des anziehenden Fixpunktes ξ, dann liegen sämtliche Nachfolger eines beliebigen Punktes $x \in \varDelta\xi$ in diesem Intervall.*

BEWEIS. Es genügt nachzuweisen, daß mit $x_0 \in \varDelta\xi$ auch $x_1 \in \varDelta\xi$ besteht. Dies können wir so einsehen: Wäre z. B. $f(x_0) > \beta$, dann könnte man in dem durch ξ und x_0 begrenzten geschlossenen Intervall (wegen $f(x) = \xi < \beta$) einen Punkt x' finden, in dem $f(x') = \beta$ gilt. Wenn β nicht zu ξ gehört, so ist $x' = \beta_{-1}$ auch ein nicht zu ξ gehöriger Punkt, und dies ist, wegen $x' \in \varDelta\xi$ unmöglich. Der Fall $f(x_0) = \beta$ führt ebenso zu einem Widerspruch. Gehört β zu ξ, so ist $\beta = b$, und aus B) folgt: $f(x_1) \leqq \beta$. Ein analoger Gedankengang beweist, daß $x_1 > \alpha$, oder $x_1 \geqq \alpha$ gilt, je nachdem, ob $\varDelta\xi$ von unten offen, oder geschlossen ist.

Aus diesem Beweis ergibt sich, daß im Fall $\varDelta\xi = (\alpha, \beta)$ dieses Intervalls durch $f(x)$ auf sich selbst abgebildet wird. Deshalb folgt aus der Stetigkeit der Abbildung, daß nur die Fälle $f(\alpha) = \alpha, \beta$, $f(\beta) = \alpha, \beta$ auftreten können, es gibt also für die Grenzpunkte des Intervalls die vier Möglichkeiten: $\alpha_1 = \alpha, \beta_1 = \beta$; $\alpha_1 = \beta, \beta_1 = \beta$; $\alpha_1 = \alpha, \beta_1 = \alpha$; $\alpha_1 = \beta, \beta_1 = \alpha$. Die Funktionen $f(x) = x^3, x^2, -x^2, -x^3$ bieten Beispiele für diese Möglichkeiten mit gemeinsamen $I = [-1, +1], \xi = 0, \alpha = -1, \beta = +1$. Geschlossen ist das $\varDelta\xi$ z. B. bei der Funktion $f(x) = \sin x$, $I = [a, b], a < 0, b > 0 : \varDelta\xi = [a, b]$.

Satz 4. *Bestehen in dem Fixpunkt ξ die Ungleichungen*

a) $$d^-, d^+ > 1,$$

oder

b) $$D^-, D^+ < 0, \quad D^- \cdot D^+ > 1,$$

so ist ξ ein abstoßender Fixpunkt.

BEWEIS. *a)* Es ergibt sich aus der Voraussetzung die Existenz einer Zahl ε', für welche der Fällen $\begin{matrix} x \in [\xi - \varepsilon', \xi) \\ x \in (\xi, \xi + \varepsilon'] \end{matrix}$ die Ungleichungen $\begin{matrix} f(x) < x \\ f(x) > x \end{matrix}$ entsprechen. Gehört x_0 zu ξ, dann gibt es zu $\varepsilon \leqq \varepsilon'$ eine positive ganze Zahl $N = N(\varepsilon)$ so, daß $x_{N+k} \in [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$ gilt. Wir zeigen, daß $x_N = \xi$ ist. Es sei nämlich z. B. $x_N \in (\xi, \xi + \varepsilon]$. Wäre jetzt x_{N+k} für jedes k in diesem Intervall, so würde aus der Monotonität $x_{N+k} < f(x_{N+k}) = x_{N+k+1}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, $\lim\limits_{k \to \infty} x_{N+k} > \xi$ folgen. Es gibt also außer dem Intervall $(\xi, \xi + \varepsilon]$ x_{N+k}-Punkte; ist x_m der erste solche Punkt, dann folgt aus $x_n < f(x_n)$ $(n = N, N+1, \ldots, m-1)$ die Ungleichung $\xi + \varepsilon < x_m$, der Punkt x_m liegt also nicht im Intervall $[\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$, im Gegensatz zu $m > N$. Analog beweist man, daß $x_N \notin [\xi - \varepsilon, \xi)$ gilt. Es ist also $x_N = \xi$.

b) Es ergeben sich nach der Voraussetzung zu dem beliebigen $\delta > 0$ die Zahlen $\varepsilon^- = \varepsilon^-(\delta)$, $\varepsilon^+ = \varepsilon^+(\delta)$, für welche den Fällen $\begin{matrix} x \in (\xi - \varepsilon^-, \xi) \\ x \in (\xi, \xi + \varepsilon^+) \end{matrix}$ die

Ungleichungen $\begin{matrix} \xi-(D^-+\delta)(\xi-x)<f(x) \\ f(x)<\xi+(D^++\delta)(x-\xi) \end{matrix}$ entsprechen. Wegen $D^-D^+>1$ kann δ so gewählt werden, daß die Relationen

$$-\Delta^-=D^-+\delta<0,\ -\Delta^+=D^++\delta<0,\ \Delta^-\cdot\Delta^+>1$$

gelten; es sei noch $\varepsilon'=\min\{\varepsilon^-,\varepsilon^+\}$, so folgt aus $x\in(\xi-\varepsilon',\xi)$ die Ungleichung

$$\xi+\Delta^-(\xi-x)<f(x), \tag{19}$$

und aus $x\in(\xi,\xi+\varepsilon')$:

$$f(x)<\xi-\Delta^+(x-\xi). \tag{20}$$

Gehört x_0 zu ξ, so gibt es zu dem beliebigen $\varepsilon\leqq\varepsilon'$ eine gewisse natürliche Zahl $N=N(\varepsilon)$, für welche

$$x_{N+k}\in(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon), \qquad k=0,1,2,\dots . \tag{21}$$

gilt. Wir zeigen: $x_N=\xi$. Wäre nämlich z. B. $x_N<\xi$, so ergäbe sich aus (19) $\Delta^-(\xi-x_N)<x_{N+1}-\xi$, also $\xi<x_{N+1}<\xi+\varepsilon$, und so, nach (20): $\Delta^+(x_{N+1}-\xi)<$ $<\xi-x_{N+2}$, d. h.

$$\Delta^-\Delta^+(\xi-x_N)<\xi-x_{N+2};$$

man gewinnt im allgemeinen:

$$(\Delta^-\Delta^+)^k(\xi-x_N)<\xi-x_{N+2k}.$$

Dies ist aber unmöglich, denn die linke Seite wächst mit k über alle Grenze, die Rechte Seite bleibt aber nach (21) kleiner als ε. Analog beweist man, daß $x_N\notin(\xi,\xi+\varepsilon)$ gilt. Es ist also $x_N=\xi$.

Bemerkung. Die Bedingungen des Satzes 4 sind für den abstoßenden Charakter des Fixpunktes nicht notwendig. Dies zeigt das Beispiel $f(x)=x$, $I=[0,1]$; hier ist in jedem Punkt $\xi\in(0,1): d^-=d^+(=D^-=D^+)=1$, und ξ ist abstoßend. Gleicherweise ist bei $f(x)=1-x$, $I=[0,1]$ in $\xi=\frac{1}{2}: D^-=$ $=D^+=-1$, also $D^-D^+=1$, ξ ist jedoch auch hier ein abstoßender Fixpunkt.

Die zu anziehenden Fixpunkten gehörigen Punkte bilden — wie dies oben dargelegt wurde — gewisse Teilintervalle von I. Es kann einfach bewiesen werden, daß auch in der Menge der zu einem halbanziehenden[10]) Fixpunkt gehörigen Punkte Intervalle gibt. Das folgende Beispiel zeigt, daß dieser Fall auch bei gemischten Fixpunkten vorkommen kann.

---

[10]) Wir wollen hier ein Kriterium für die halbanziehenden Fixpunkte ohne Beweis mitteilen: Ist der Fixpunkt ξ nicht anziehend, und gibt es eine Linksumgebung (Rechtsumgebung), in der $x<f(x)\leqq\xi$ $(\xi\leqq f(x)<x)$ gilt, dann, und nur dann ist ξ ein linksanziehender (rechtsanziehender) Fixpunkt.

Es sei $\xi=\frac{1}{2}$, $c=\frac{3}{4}$, $0<p<1$, $-1<q<0$, $0=u_0<v_0<(1-p)\xi$, und wir bilden die unendliche Folgen

$$u_{n+1}=pu_n+(1-p)\xi, \quad v_{n+1}=pv_n+(1-p)\xi; \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

dann gilt: $u_0<v_0<u_1<v_1<\cdots<u_n<v_n<\cdots<\xi$, $\lim u_n=\lim v_n=\xi$. Es sei noch $W_n=\frac{1}{2}(v_n+u_{n+1})$. Wir definieren jetzt in $I=[0,1]$ die Grundfunktion folgenderweise (s. Figur 1):

$$f(x)=\begin{cases} px+(1-p)\xi, & \text{für} \quad u_n\leqq x\leqq v_n, \\ qx+(1-q)\xi, & \text{für} \quad x=W_n, \\ \dfrac{f(v_n)-f(W_n)}{v_n-W_n}(x-v_n)+f(v_n), & v_n<x<W_n, \\ \dfrac{f(W_n)-f(u_{n+1})}{W_n-u_{n+1}}(x-W_n)+f(W_n), & W_n<x<u_{n+1}, \\ \xi, \quad \text{für} \quad x=\xi, \\ 2x-\dfrac{1}{2}, \quad \xi<x\leqq c, \\ -4x+4, \quad c<x\leqq 1. \end{cases}$$

Diese Funktion hat zwei Fixpunkte: $\xi=\frac{1}{2}$, und $\eta=\frac{4}{5}$. Der Fixpunkt ξ ist nicht abstoßend, da die Punkte der Intervalle $(\Delta u)_n$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ $\Delta u_0=[u_0, v_0])$ zu ihm gehören. (Es gibt in jeder Links- und Rechtsumgebung von ξ solche Intervalle.) Anderseits liegen in jeder Linksumgebung von ξ Intervalle Δx, in denen $f(x)>\xi$ ist; die Intervalle $(\Delta x)_1$ bilden also je eine Rechtsumgebung von ξ, in $(\xi, \xi+\varepsilon)$ liegen aber für (beliebiges ε) unendlich viele η_{-n}-Punkte; ξ ist also ein gemischter Fixpunkt.

§ 3.

Aus der Definition der Fixpunkte höherer Ordnung folgt, daß ein Fixpunkt ν-ter Ordnung von $f(x)$ ein Fixpunkt erster Ordnung der Funktion $f_\nu(x)$ ist. Diese Tatsache gibt Anlaß zur folgenden Klassifizierung: Wir werden dem Fixpunkt η ν-ter Ordnung von $f(x)$ denselben *Typ* zusprechen, zu welchem der Fixpunkt η erster Ordnung der Funktion $f_\nu(x)$ gehört.

Satz 5. *Die Konjugierten eines Fixpunktes höherer Ordnung sind von demselben Typ, wie der Fixpunkt selbst.*

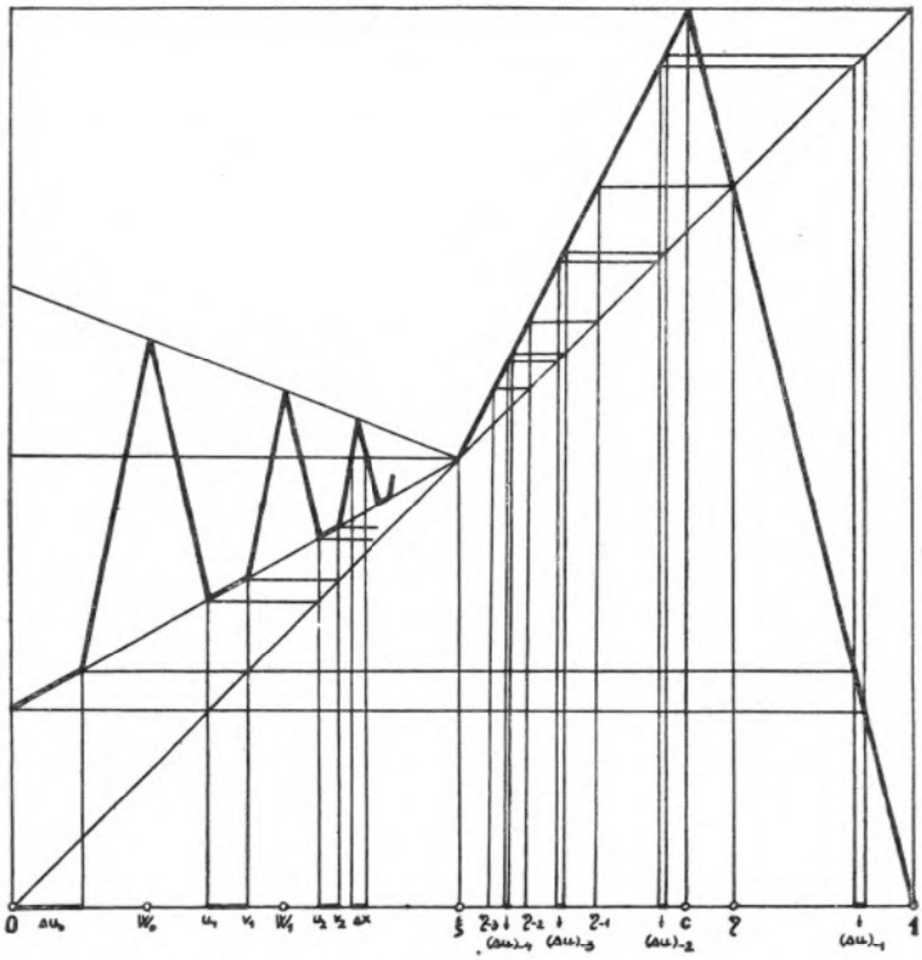

Fig. 1.

Beweis. Es sei zuerst η ein anziehender Fixpunkt ν-ter Ordnung. Dann gibt es ein ε so, daß die mit $g(x)=f_\nu(x)$ gebildete Iterationsfolge eines jeden Punktes des Intervalls $(\eta-\varepsilon, \eta+\varepsilon)$ zu η konvergiert. Aus den Gleichungen $f(\eta_{\nu-1})=\eta_\nu=\eta$ folgt weiter — zufolge der Stetigkeit von $f(x)$ — die Existenz einer Zahl $\delta>0$, für die $\eta-\varepsilon<f(x)=x_1<\eta+\varepsilon$ besteht, falls $\eta_{\nu-1}-\delta<x_0<\eta_{\nu-1}+\delta$ gilt. Jeder solcher Punkt x_1 gehört (bezüglich der Funktion $g(x)$) zu η, d. h. es ist

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x_1)=\lim_{n\to\infty} f_{n\nu+1}(x_0)=\lim_{n\to\infty} x_{n\nu+1}=\eta.$$

Daraus folgt aber

$$\lim_{n\to\infty} f_{\nu-1}(x_{n\nu+1})=\lim_{n\to\infty} x_{\nu(n+1)}=f_{\nu-1}(\eta)=\eta_{\nu-1},$$

d. h.

$$\lim_{n\to\infty} x_{n\nu}=\eta_{\nu-1}.$$

Die Folge $(x_{n\nu})$ ist aber die mit $g(x)$ gebildete Iterationsfolge des Punktes $x_0 \in (\eta_{\nu-1} - \delta, \eta_{\nu+1} + \delta)$, es gibt also eine Umgebung des Punktes $\eta_{\nu-1}$, deren jeder Punkt — bezüglich der Grundfunktion $g(x)$ — zu diesem Punkt gehört. Indem wir nun dieses Verfahren statt η der Reihe nach auf die Punkte $\eta_{\nu-1}, \eta_{\nu-2}, \ldots, \eta_2$ anwenden, gelangen wir zum Resultat, daß sämtliche Konjugierten von η anziehende Fixpunkte sind.

Es sei jetzt η ein halbanziehender Fixpunkt ν-ter Ordnung. Dann gibt es ein Links-, oder Rechtsumgebung $\Delta\eta$ des Punktes so, daß $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n\nu} = \eta$ gilt, falls $x_0 \in \Delta\eta$ ist. Ist $(\Delta\eta)_1$ das (mit $f(x)$ gebildete) erste iterierte Intervall von $\Delta\eta$, so gilt also

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x_1) = \lim_{n\to\infty} x_{n\nu+1} = f(\eta) = \eta_1, \quad x_1 \in (\Delta\eta)_1. \tag{22}$$

Der Punkt η_1 ist ein Grenzpunkt von $(\Delta\eta)_1$; wäre nämlich η_1 ein innerer Punkt in $(\Delta\eta)_1$, d. h. η_1 ein anziehender Fixpunkt von $f(x)$, dann müßte nach dem vorigen auch η ein anziehender Fixpunkt sein, entgegen der Voraussetzung. Es ist also η_1 ein Anfangspunkt, oder ein Endpunkt des Intervalls $(\Delta\eta)_1$, also wegen (22) ein halbanziehender Fixpunkt. Wiederholt man dieses Verfahren auf die Konjugierten von η, so erhält man den halbanziehenden Charakter der Punkte $\eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_{\nu-1}$.

Ist der Fixpunkt η abstoßend, dann ist auch η_1 ein solcher Punkt. Wenn nämlich für die mit $g(x)$ gebildete Iterationsfolge des Punktes x_0:

$$x_0, x_\nu, x_{2\nu}, \ldots \to \eta_1$$

gilt, so besteht auch

$$x_{\nu-1}, x_{2\nu-1}, x_{3\nu-1}, \ldots \to f_{\nu-1}(\eta_1) = \eta,$$

also gehört $x_{\nu-1}$ zu η. Es existiert also ein positives ganzes k, für welches $(x_{\nu-1})_{k\nu} = \eta$ gilt; dann ist aber $(x_\nu)_{k\nu} = \eta_1$, d. h. $f_{(k+1)\nu}(x_0) = g_{k+1}(x_0) = \eta_1$. Man bekommt ganz ähnlich, daß auch die Punkte $\eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_{\nu-1}$ abstoßende Fixpunkte sind.

Es sei noch η ein gemischter Fixpunkt. Dann sind auch die Konjugierten solche Punkte. Wäre nämlich z. B. η_1 von einem anderen Typ, so müßte η, als Konjugierte dieses Punktes zu demselben Typ gehören, also nicht gemischt sein.

Damit haben wir den Beweis des Satzes vollendet.

Dieser Satz gibt Möglichkeit einer zweckmäßigen Klassifizierung der Zyklen der Fixpunkte höherer Ordnung. Wir sprechen über *anziehende, halbanziehende, abstoßende,* oder *gemischte Zyklen* je nach dem Typus der betreffenden Fixpunkte.

§ 4.

Die Punkte des Intervalles I werden nach ihren Iterationsfolgen folgenderweise klassifiziert: Der Punkt x_0 ist ein *singulärer* Punkt, wenn seine Iterationsfolge nur endlich viele verschiedene Punkte hat, x_0 ist ein *regulärer* Punkt, wenn die Folge (x_n) nur (paarweise) verschiedene Punkte, und nur endlich viele Häufungsstellen hat; besitzt die Folge (x_n) unendlich viele Häufungsstellen, so nennen wir x_0 einen *irregulären* Punkt.

Die Vorgänger und die Nachfolger des Punktes x_0 gehören mit diesem Punkt selbst zu derselben Klasse.

Die singulären Punkte sind die Fixpunkte [11]) *und ihre Vorgänger.* Ist x_0 ein Punkt, dessen Iterationsfolge nur endlich viele verschiedene Punkte hat, so gibt es einen Iterierte x_μ, für welche $x_\mu = x_{\mu+\nu}$ gilt. Ist ν die kleinste solche natürliche Zahl, so folgt aus $x_\mu = f_\nu(x_\mu)$, daß x_μ ein Fixpunkt ν-ter Ordnung, und x_0 ein Vorgänger dieses Punktes ist.

Satz 6. *Ist x_0 ein regulärer Punkt, und hat seine Iterationsfolge ν Häufungpunkte, so bilden sie einen Zyklus ν-ter Ordnung.*

Der Beweis wird sich sehr einfach aus dem folgenden *Hilfssatz* ergeben: *Ist x_0 ein regulärer Punkt, und hat die Folge (x_n) einen Fixpunkt η als Häufungspunkt, so bilden sämtliche Häufungsstellen den Zyklus von η.* Es sei η ein Fixpunkt ν-ter Ordnung und zugleich ein Häufungspunkt der Folge (x_n). Aus der Stetigkeit von $f(x)$ folgt dann, daß auch die Punkte $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\nu-1}$ Häufungsstellen sind. Wir überdecken *sämtliche* Häufungstellen der Folge (x_n) mit offenen Intervallen deren Länge je 2ε beträgt, und deren Halbierungspunkte mit den Häufungspunkten zusammenfallen. Dabei sei ε so klein gewählt, daß diese Intervalle paarweise fremd ausfallen. Insbesondere sind die die Punkte $\eta_0 = \eta, \eta_1, \ldots, \eta_{\nu-1}$ überdeckenden Intervalle

$$(\eta_k - \varepsilon, \eta_k + \varepsilon) = L_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1).$$

Wir schreiben die in L_0 liegenden Punkte von (x_n) in die unendliche Teilfolge

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_p}, \ldots \qquad (n_1 < n_2 < \cdots < n_p < \cdots) \tag{23}$$

Diese hat also nur einen Häufungspunkt, den Punkt η_0, so, daß $\lim\limits_{p\to\infty} x_{n_p} = \eta_0$ ist. Es gilt deshalb

$$x_{n_1+k}, x_{n_2+k}, \ldots, x_{n_p+k}, \ldots \to \eta_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1, \nu)$$

Die Elemente dieser Folgen, abgesehen von endlich vielen Punkten, liegen

[11]) Unter „Fixpunkten" schlechthin werden wir im folgenden Fixpunkte jeder Ordnung verstehen.

der Reihe nach in den Intervallen $L_0, L_1, L_2, \ldots, L_{\nu-1}, L_\nu = L_0$. Es bedeute i eine so große natürliche Zahl, daß

$$x_{n_j+k}, x_{n_{j+1}+k}, x_{n_{j+2}+k}, \ldots \in L_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu-1, \nu)$$

gilt, falls $j \geqq i$ ist. Dann folgt aus $x_{n_j+\nu} \in L_0$, daß der Punkt $x_{n_j+\nu}$ ein Element der Folge (23) ist. Es sei z. B. $x_{n_j+\nu} = x_{n_p}$, d. h. $n_j + \nu = n_p$. Es ist also $n_p > n_j$, und folglich fällt der Index n_p mit einem der Zahlen $n_{j+1}, n_{j+2}, n_{j+3}, \ldots$ zusammen. Es ist aber $n_{j+m+1} - n_{j+m} \geqq 1$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, daher gilt $n_{j+\nu} \geqq \geqq n_j + \nu$, also fällt $n_j + \nu = n_p$ mit einem der Zahlen $n_{j+1}, n_{j+2}, n_{j+3}, \ldots, n_{j+\nu}$ zusammen. Wir beweisen, daß

$$n_j + \nu = n_{j+1} \tag{25}$$

ist. Wäre nämlich $n_{j+1} \leqq n_j + \nu - 1$, so würden hiervon, wegen $n_{j+1} \geqq n_j + 1$, die Ungleichungen

$$n_j + 1 \leqq n_{j+1} \leqq n_j + \nu - 1$$

folgen. Dies ist aber unmöglich, denn nach (24) liegen die Punkte $x_{n_j+1}, x_{n_j+2}, \ldots, x_{n_j+\nu-1}$ der Reiche nach in den Intervallen $L_1, L_2, \ldots, L_{\nu-1}$, $x_{n_{j+1}}$ ist aber ein Punkt von L_0. Es gilt also (25), d. h. $x_{n_{j+1}} = x_{n_j+\nu}$, und wir können im allgemeinen die Elemente der Folge (23) in Gestalt

$$x_{n_{j+m}} = x_{n_j+m\nu} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

schreiben. Daraus folgt aber

$$x_{n_j+m\nu+k} \in L_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1).$$

Die Folge (x_n) verteilt sich also von einem genügend großen Index an auf konvergente, aequidistante Elemente enthaltende Teilfolgen, deren Grenzwerte, und nur diese, die Häufungsstellen der Folge sind, wie der Hilfssatz behauptet.

Der Beweis des Satzes wird jetzt sehr einfach. Es seien die Häufungspunkte die Folge (x_n) $T_0, T_1, \ldots, T_{\nu-1}$, und $\lim\limits_{i\to\infty} x_{n_i} = T_0$. Daraus folgt, daß alle Iterierten des Punktes T_0 Häufungspunkte sind. Es gibt aber nur ν Häufungpunkte, deshalb hat die Iterationsfolge von T_0 nur endlich viele verschiedene Punkte, d. h. T_0 ist ein *singulärer* Punkt. Es gibt also einen Fixpunkt η, für welchen $f_m(T_0) = \eta$ $(m \geqq 0)$ gilt. Aus dem Hilfssatz folgt jetzt, daß der Zyklus dieses Fixpunktes aus sämtlichen Häufungspunkten der Folge (x_n) besteht.

Als Verallgemeinerung des Ausdrucks „x_0 gehört zu ξ", den wir im Fall $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = \xi$ gebraucht haben, sagen wir über einen Punkt x_0, dessen Iterationsfolge auf endlich viele, je zu einem Fixpunkt eines Zyklus konvergierende Teilfolgen zerfällt, daß x_0 zu diesem Zyklus „gehört". Sämtliche solche Punkte sind die Fixpunkte höherer Ordnung, die Vorgänger derselben, und die regulären Punkte.[12])

Wir wollen uns im folgenden mit einigen Fragen beschäftigen, die sich auf die Verteilung der singulären, regulären und irregulären Punkte beziehen.

Eine Frage solcher Art ist: Gibt es Funktionen $f(x)$, bei denen die Menge der singulären Punkte ein Intervall enthält? Solche Intervalle werden als „singuläre Intervalle" bezeichnet; in ähnlichem Sinn sprechen wir über „reguläre" und „irreguläre" Intervalle. Eine solche Funktion ist z. B. $f(x) = x$, $I = [a, b]$ (a und b beliebig). Hier ist jeder Punkt von I (abstoßender) Fixpunkt erster Ordnung. Weitere Beispiele sind noch $f(x) = 1 - x$ ($I = [0, 1]$) und $f(x) = \frac{1}{x}\left(I = \left[a, \frac{1}{a}\right], 0 < a < 1\right)$, wobei alle Punkte der Intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, bzw. $[a, 1), \left(1, \frac{1}{a}\right]$ Fixpunkte zweiter Ordnung sind. Als Verallgemeinerung erwähnen wir, daß Fixpunkte jeder Ordnung Intervalle ausfüllen können, genauer: *Wir können zu ν vorgegebenen, disjunkten und geschlossenen Intervallen (unendlich viele) solche Funktionen finden, für welche alle Punkte dieser Intervalle Fixpunkte ν-ter Ordnung sind.*[13]) Wir wollen hier eine einfache Konstruktion solcher Funktionen $f(x)$ zeigen. Die gegebenen Intervalle seien $[A_k, B_k]$ $(k = 0, 1, \ldots, \nu - 1)$, die von einem geschlossenen Intervall I enthalten sind, und $f(x)$ sei eine, abgesehen von $[A_{\nu-1}, B_{\nu-1}]$ in I überall definierte, beliebige, stetige Funktion, deren Werte zu I gehören, und von welcher $[A_k, B_k]$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 2)$ umkehrbahr eindeutig auf $[A_{k+1}, B_{k+1}]$ abgebildet wird. So entspricht einem beliebigen Punkt $x \in [A_{\nu-1}, B_{\nu-1}]$ ein Punkt x_{-1} in $[A_{\nu-2}, B_{\nu-2}]$, ein Punkt x_{-2} in $[A_{\nu-3}, B_{\nu-3}]$, usw. ..., ein Punkt $x_{-(\nu-1)}$ in $[A_0, B_0]$. Es sei nun $f(x) = x_{-(\nu-1)}$ für $x \in [A_{\nu-1}, B_{\nu-1}]$. Bei dieser Funktion sind sämtliche Punkte der gegebenen Intervalle Fixpunkte ν-ter Ordnung. Z. B. es sei $I = [0, 1]$, und die Zahlen c, d seien so gewählt, daß

$$(26) \qquad [c, d], [\sqrt{c}, \sqrt{d}], [\sqrt[4]{c}, \sqrt[4]{d}]$$

als im innern von I liegende, disjunkte Intervalle ausfallen. Ist jetzt $f(x)$ eine

---

[12]) Wenn also x_0 kein irregulärer Punkt ist, so gibt es eine natürliche Zahl ν derart, daß dieser Punkt bezüglich der Funktion $f_\nu(x)$ ein Konvergenzpunkt ist.

[13]) Dies steht in enger Beziehung zu der Auflösung der Funktionalgleichung $f_\nu(x) = x$. Mit der Veraligemeinerung dieses Problems beschäftigt sich in einer Arbeit S. Łojasiewicz, Solution générale de l'equation fonctionnelle $f(f(\ldots(f(x))\ldots)) = g(x)$. *Ann. Soc. Polon. Math.* **24** (1952), 88-91. — Siehe noch G. M. Ewing—W. R. Utz, Continuous solutions of the functional equation $f^n(x) = f(x)$. *Canad. J. Math.* **5** (1953), 101—103.

Funktion, die in $[0, \sqrt{d}]$ mit $\sqrt{x}$, in $[\sqrt{c}, 1]$ mit x^4 übereinstimmt, so sind die Punkte der Intervalle (26) Fixpunkte dritter Ordnung.

Wir kennen nicht die Antwort auf die Frage, ob es singuläre Intervalle gibt, deren jeder Punkt Häufungsstelle von Fixpunkten *verschiedener Ordnung* ist.

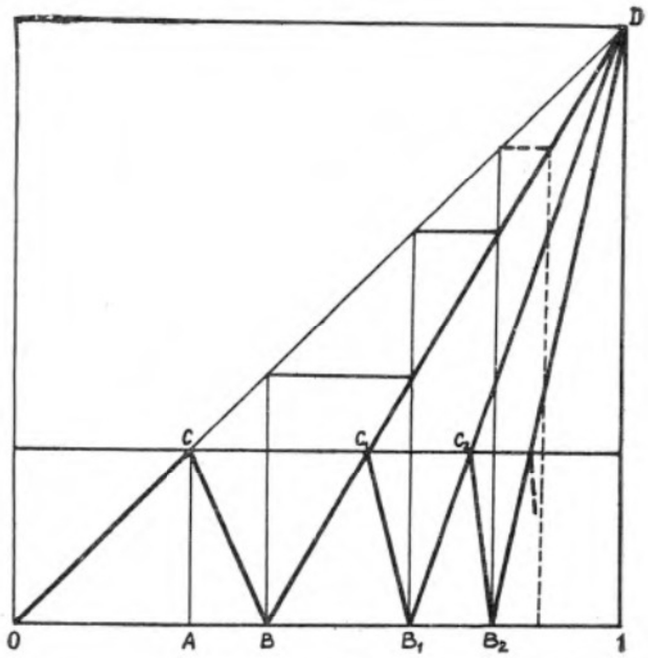

Fig. 2.

In Betreff der Anwendungen der Iterationstheorie ist die Konvergenz die Hauptfrage. Konvergenzpunkte sind die zu einem Fixpunkt erster Ordnung gehörigen (regulären und singulären) Punkte. In der Menge der Konvergenzpunkte können Intervalle auftreten, die nur reguläre Punkte enthalten (z. B. in Fall eines anziehenden Fixpunktes), aber singuläre Punkte können auch Konvergenzintervalle bilden, wie $f(x) = x$ lehrt. Die folgende Funktion gibt ein etwas kompliziertes Beispiel, wobei das Intervall $I = [0, 1]$ ein, nur singuläre Punkte enthaltendes Konvergenzintervall ist. Es sei $0 < A < B < 1$, und wir definieren die Funktion $f(x)$ folgenderweise (s. Figur 2):

$$f(x) = \begin{cases} x, \quad \text{für} \quad x \in [0, A), \\ \dfrac{A}{A-B}(x-A)+A, \; x \in [A, B], \\ \dfrac{1}{1-B}(x-B), \; x \in [B, 1]. \end{cases}$$

In der Figur ist $f(B) = 0$, $f(B_1) = B$, $f(B_2) = B_1$, ..., und

das Bild von $f_1(x)$ ist die gebrochene Linie $0CBD$,
das Bild von $f_2(x)$ ist die gebrochene Linie $0CBC_1B_1D$,
das Bild von $f_3(x)$ ist die gebrochene Linie $0CBC_1B_1C_2B_2D$,
....

Es ist leicht einzusehen, daß in jedem Punkt $x \in I$ die Funktion $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = h(x)$ existiert. (Das graphische Bild von $h(x)$ ist $0CBC_1B_1 \ldots C_iB_i \ldots$ für

$0 \leqq x < 1$, und es gilt $h(1) = 1$.) Diese Funktion ist, abgesehen von Punkt $x = 1$, in I stetig, und für $n \geqq 1$ gilt $h_n(x) = h(x)$.

Dieses Beispiel (wie auch $f(x) = x$) zeigt, daß im Fall der Existenz eines singulären Konvergenzintervalls ein Teilintervall von I existiert, in welchem[14]) $f(x) = x$ gilt; diese Beispiele sind keine besonderen Fälle. Dies folgt aus dem

Satz 7. *Gibt es in I ein singuläres Intervall, dessen jeder Punkt Konvergenzpunkt ist, so gibt es ein solches Intervall (in I), in dem $f(x) = x$ ist.*

Beweis. Es sei jeder Punkt $x \in [c, d]$ ein Konvergenzpunkt und zugleich singulär. (Die Annahme der Geschlossenheit dieses Intervalles bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit.) Die Punkte von $[c, d]$ sind also Fixpunkte erster Ordnung, oder Vorgänger solcher Punkte; alle anderen singulären Punkte sind nämlich Divergenzpunkte.

Wir bezeichnen mit $\{\xi\}$ die Menge der Fixpunkte (erster Ordnung) im Intervall $[c, d]$, und im allgemeinen ist $\{\xi\}_{-n}$ die Menge derjenige Punkte x von $[c, d]$, für welche n die kleinste natürliche Zahl ist, wofür x_n als Fixpunkt ausfällt.

Wir beweisen: Gibt es ein Intervall $\Delta x \subseteq [c, d]$, in welchem wenigstens eine der Menge

$$\{\xi\}, \{\xi\}_{-1}, \{\xi\}_{-2}, \ldots \tag{27}$$

eine dichte Punktmenge ist, so existiert in I ein Intervall, in dem $f(x) = x$ gilt. Es sei z. B. $\{\xi\}_{-n}$ — für ein gewisses n — dicht im Intervall $\Delta x \subseteq [c, d]$. Es gilt für jeden invers-iterierten Punkt ξ_{-n} eines Fixpunktes ξ:

$$f_{n+1}(\xi_{-n}) - f_n(\xi_{-n}) = f[f_n(\xi_{-n})] - f_n(\xi_{-n}) = f(\xi) - \xi = 0,$$

und so besteht auf der Menge der Punkte $\xi_{-n} \in \Delta x$:

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = 0 \quad (x = \xi_{-n} \in \Delta x),$$

woraus — wegen der Stetigkeit von $f(x)$ —

$$f_{n+1}(x) = f_n(x), \quad x \in \Delta x$$

folgt. Dann gilt aber — wegen $f_n(x) = x_n \in (\Delta x)_n$ —

$$f(x_n) = x_n, \quad x_n \in (\Delta x)_n,$$

d. h. $f(x) = x$ besteht im jedem Punkt $x \in (\Delta x)_n$. Gibt es also ein Intervall Δx, so ist in seinem n-ten iterierten Intervall $f(x) = x$.

---

14) In diesem Intervall gilt also $\lim f_n(x) = h(x) = x$. Die Frage, wann für eine gegebene Funktion $h(x)$ ($\neq$ const.) eine Grundfunktion $f(x)$ existiert, für welche $\lim f_n(x) = h(x)$ gilt, ist von R. Schauffler ([20], p. 61.) beantwortet worden.

Nun beweisen wir, daß ein Intervall Δx existiert. Der Gegensatz dieser Behauptung ist: In keinem Teilintervall von $[c, d]$ ist irgendeine der Menge (27) eine dichte Punktmenge. Daraus folgt die Existenz eines Intervalls $[C_0, D_0] \subseteq [c, d]$, welches keinen Punkt von $\{\xi\}$ enthält. Betrachter wir die Menge derjenige Punkte von $\{\xi\}_{-1}$, die in $[C_0, D_0]$ liegen. Nachdem $\{\xi\}_{-1}$ nirgends dicht ist, gibt es ein Intervall $[C_1, D_1] \subseteq [C_0, D_0]$, welches keinen Punkt der Menge $\{\xi\}_{-1}$ enthält. Man bekommt ähnlicherweise ein Intervall $[C_2, D_2] \subseteq \subseteq [C_1, D_1]$, in welchem kein Punkt von $\{\xi\}_{-2}$ liegt, u. s. f. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhalten wir eine unendliche Folge der Intervalle $[C_n, D_n]$, mit der Eigenschaft:

$$[c, d] \supseteq [C_0, D_0] \supseteq [C_1, D_1] \supseteq \cdots$$

Diese Intervalle haben einen nicht-leeren Durchschnitt, und e sei ein Punkt desselben. Aus der Konstruktion der Intervalle $[C_n, D_n]$ folgt, daß e in den Mengen (27) nicht vorkommt. Der Punkt ist also kein singulärer Punkt. Dies steht aber in Gegensatz zu dem singulären Charakter des Intervalles $[c, d]$. Es gibt also in (27) eine, in einem Intervall $\Delta x \subseteq [c, d]$ dichte Menge, und so folgt die Behauptung des Satzes.

Satz 8. *Die Menge sämtlicher, zu den anziehenden Fixpunkten (erster Ordnung), und zu den anziehenden Zyklen gehörigen, im innern von I liegenden Punkte ist offen.*

BEWEIS. Nach Satz 2 bilden die zu einem anziehenden Fixpunkt gehörigen Konvergenzpunkte $x \in (a, b)$ eine offen Menge. Dieselbe Behauptung gilt für die zu einem anziehenden Zyklus gehörigen Punkte, da diese als die zu den anziehenden Fixpunkten erster Ordnung der Funktion $g(x) = f_\nu(x)$ gehörigen Punkte angesehen werden können, falls der Zyklus die Ordnungszahl ν hat. Die Behauptung des Satzes folgt jetzt einfach aus der Tatsache, daß die Summe von (endlich, oder unendlich vielen) offenen Mengen auch eine offene Menge ist.

Intervalle können in der Menge der Konvergenzpunkte auch im Fall eines gemischten Fixpunktes vorkommen, wie das Beispiel der Seite 25 zeigt, doch tritt auch der entgegengesetzte Fall auf, wie beim folgenden Beispiel. Es seien $\xi = 1$, $\eta = \frac{3}{2}$, p und q beliebige Zahlen, für die $0 < p < 1 < q$, $\frac{p^2 + p}{1-p} < q < \frac{p^2 + p + 1}{1-p}$ gelten. Wir bilden aus dem Punkt $u_0 = 0$ ausgehend die unendlich Folge

$$u_{n+1} = p u_n + (1-p) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

diese ist monoton wachsend, und strebt nach $\xi = 1$. Es sei noch

$$V_n = \frac{q(u_n + u_{n+1}) - u_{n+1} + u_{n+2}}{2q} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Es gilt für jedes $n: u_n < V_n < u_{n+1}$. Wir definieren jetzt in dem Intervall $I = [0, \eta]$ die folgende Grundfunktion (s. Figur 3):

$$f(x) = \begin{cases} q(x-u_n)+u_{n+1}, & x \in [u_n, V_n); \\ -q(x-u_{n+1})+u_{n+2}, & x \in [V_n, u_{n+1}); \\ \xi, \text{ wenn } x = \xi \text{ ist}; \end{cases}$$

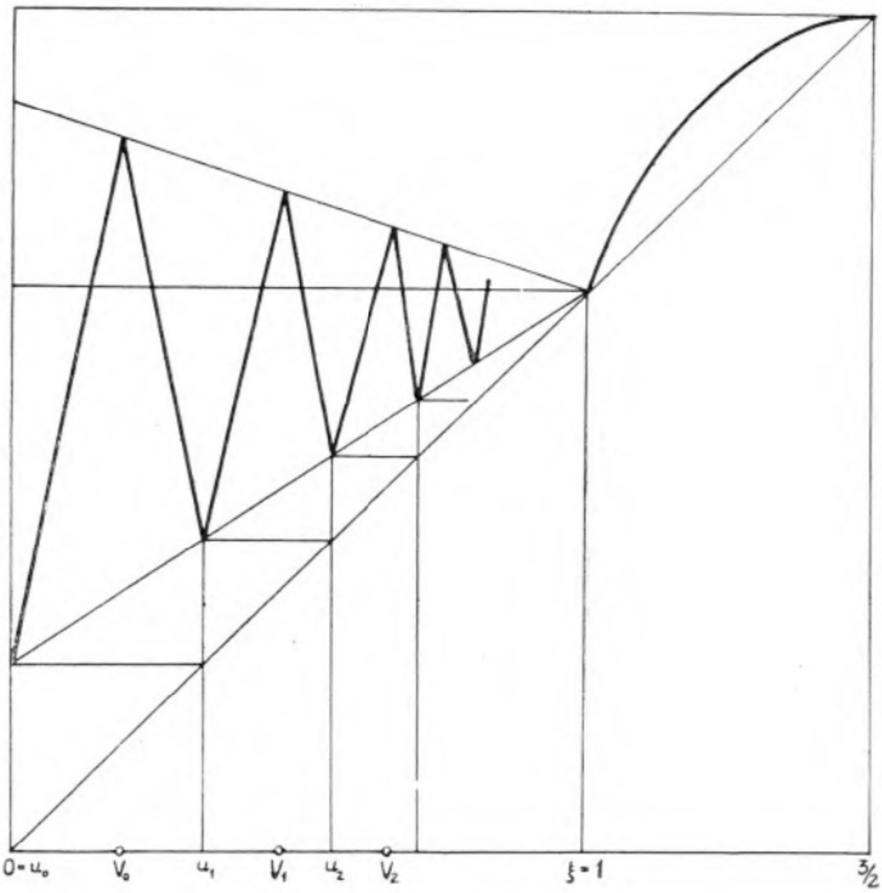

Fig. 3.

im Intervall $(1, \eta)$ sei $f(x)$ eine beliebige, stetige Funktion mit der Eigenschaft $x < f(x) < \eta$, und es sei $f(\eta) = \eta$. Diese Funktion hat in ξ einen gemischten, in η einen linksanziehenden Fixpunkt. Es ist nämlich $\lim_{n\to\infty} V_n = \xi$, und diese Punkte gehören wegen $f(V_n) > \xi$ zu η, während u_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ zu ξ gehörige Punkte sind.

Wir beweisen, daß kein u_n-Punkt eine, aus lauter zu ξ gehörigen Punkten bestehende Umgebung haben kann. Es gibt nämlich in jeder Rechtsumgebung von u_0 zu η gehörige Punkte. Dies können wir so einsehen: gegeben sei das Intervall $(0, \varepsilon) = (u_0, \varepsilon) = \Delta u$, wo ε so klein ist, daß für $x \in \Delta u$ auch $f(x) \leqq \xi$ gilt. Dann erhält man für die Länge des Intervalls $(\Delta u)_1$ mit einfacher Rechnung: $|(\Delta u)_1| = \varepsilon q$ und im allgemeinen: $|(\Delta u)_n| = \varepsilon q^n$, *falls nur* der Endpunkt des iterierten Intervalls $(\Delta u)_n$ nicht rechts von V_n liegt. (Der Anfangspunkt dieses Intervalls ist u_n). Es gibt aber wegen $q > 1$ und $V_n < 1$ einen solchen Iterationsindex m, wofür der Endpunkt von $(\Delta u)_m$ rechts von V_m liegt, d. h. $(\Delta u)_m$ zu η gehörige Punkte enthält. Dann liegen aber auch in Δu solche Punkte, wie klein man ε auch wählen mag. Daraus folgt, daß in jeder Rechstumgebung eines beliebigen Punktes u_n nicht zu ξ gehörige Punkte liegen. Gäbe es nun in einer Linksumgebung eines Punktes u_n nicht zu η gehörige Punkte, so könnte kein solcher Punkt in der Rechtsumgebung von u_{n+1} sein, was zum soeben gesagten im Wiederspruch steht. Jeder Punkt u_n ist also ein Häufungspunkt der nicht zu ξ gehörigen Punkte. Daraus folgt aber: In der Menge der zu ξ gehörigen Punkte gibt es kein Intervall. Wäre nämlich jeder Punkt des Intervalls Δx zu ξ gehörig, so könnten die Intervalle $(\Delta x)_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ in gewissen Intervallen (u_n, V_n), oder (V_n, u_{n+1}) liegen, wo noch $f(x) < \xi$ gilt, und so könnte man (wie vorher im Fall des Δu-Intervalls) folgern: $|(\Delta x)_n| = q^n |(\Delta x)|$. Dies ist aber unmöglich, denn es gilt für $n \to \infty$: $q^n \to \infty$, $(V_n - u_n), (u_{n+1} - V_n) \to 0$.

Es gibt aber Funktionen, bei denen kein regulärer Konvergenzpunkt, ja sogar *kein regulärer Punkt existiert*. Wir wollen hier ein einfaches Beispiel erörtern. Es sei im Intervall $I = [0, 1]$ (s. Figur 4):

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{für} \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ -2x + 2, & \text{für} \quad x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Diese Funktion hat zwei Fixpunkte erster Ordnung: $\xi = 0$, $\xi' = \frac{2}{3}$. Alle beide sind abstoßend; in $\xi = 0$ (im Anfangspunkt von I) gilt $d^+ = D^+ = 2$, woraus man den abstoßenden Charakter sehr einfach herleiten kann, für $\xi' = \frac{2}{3}$ haben alle vier Ableitungszahlen den Wert -2, und so folgt aus dem Satz 4 (Fall a)) die Behauptung. Da ferner die Ableitungszahlen von $f_n(x)$ in allen Punkten, wo $f_n(x) \neq 0{,}1$ ist, die gleichen Werte 2^n, oder -2^n haben, folgt aus demselben Satz, daß alle Fixpunkte höherer Ordnung abstoßend sind. Es gibt also keinen Zyklus, zu welchem reguläre Punkte gehören können.

Es ist leicht bei dieser Funktion auch die Verteilung der irregulären Punkte eingehender zu erörtern. Da es abzählbar unendlich viele Fixpunkte

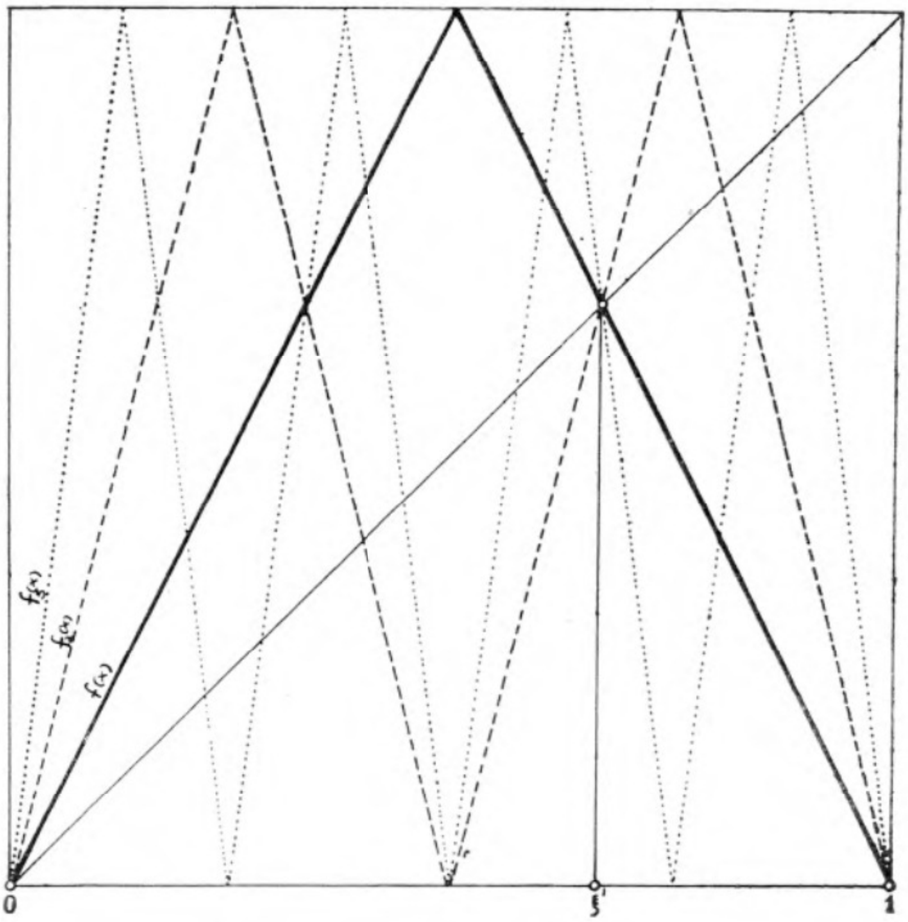

Fig. 4.

gibt, und da jeder dieser Punkte nur abzählbare Vorgänger hat, ist die Menge der singulären Punkte abzählbar. Daraus folgt, daß diese Menge kein Intervall besitzt, ferner, daß die Menge der irregulären Punkte die Mächtigkeit des Kontinuums hat. Doch gibt es auch in dieser Menge kein Intervall. Um dies einzusehen beachten wir, daß die Nullstellen von $f_n(x)$ die Punkte

$$\frac{k}{2^n} \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, 2^{n-1})$$

sind, die sämtliche Nullstellen (für $n=1, 2, 3, \ldots$) also eine (in I) dichte Menge bilden. Da aber die Gleichung $f_n(x)-x=0$ zwischen zwei nebeneinander liegenden Nullstellen von $f_n(x)$ zwei Wurzeln hat, so ist auch die Menge dieser Wurzeln eine dichte Menge. Alle dieser Wurzeln sind aber Fixpunkte, d. h. jeder Punkt von I, also auch jeder irreguläre Punkt, ist eine

Häufungsstelle der singulären Punkte. Es gibt also bei dieser Funktion in der Menge der irregulären Punkte kein Intervall.[15])

Die Frage, ob es überhaupt eine Funktion $f(x)$ gibt, bei der die Menge der irregulären Punkte ein Intervall besitzt, scheint ziemlich schwer zu sein.

Bei dem vorigen Beispiel hat die Menge der Divergenzpunkte ein positives Maß (im *Lebesgue*schen Sinn; das Maß hat nämlich den Wer 1). Das folgende Beispiel beweist die Möglichkeit des entgegengesetzten Falles, nämlich desjenigen, daß die Menge der Divergenzpunkte, zwar von der Mächtigkeit des Kontinuums ist, aber das Maß 0 hat.

Es bezeichnen A_i, B_i $(i=1, 2, 3)$ und ξ beliebige Zahlen, welche die Ungleichungen

$$0<A_1<B_1<A_2<B_2<\xi<A_3<B_3<1$$

genügen, $f(x)$ sei eine beliebige stetige Funktion, für welche die Relationen

$$\min f(x)=f(B_1)=f(A_2)=B_3,\ \max f(x)=1,\ x\in[B_1, A_1],$$

$$\min f(x)=f(1)=0,\ \max f(x)=A_1,\ x\in[B_3, 1],$$

$$\min f(x)>B_2,\ \max f(x)=f(A_1)=A_3,\ x\in[0, A_1],$$

$$\min f(x)=f(A_3)=B_2,\ \max f(x)=f(B_2)=A_3,\ x\in[B_2, A_3]$$

gelten, und der Punkt ξ sei ein anziehender Fixpunkt, mit (B_2, A_3) als unmittelbares Konvergenzintervall. Es sei ferner im Intervall (A_i, B_i)

$$f(x)=\frac{f(A_1)-f(B_i)}{A_i-B_i}(x-A_i)+f(A_i).$$

Die so definierte Funktion (s. Figur 5) ist in $I=[0, 1]$ stetig, und dieses Intervall wird von ihr auf sich selbst abgebildet. Sämtliche Konvergenzpunkte gehören zu ξ, und die Intervalle

$$[0, A_1),\ (B_1, A_2)=\Delta x,\ (B_2, A_3),\ (B_3, 1] \tag{28}$$

sind vollständige Konvergenzintervalle. Sämtliche anderen vollständige Konvergenzintervalle liegen im innern der Intervalle $[A_i, B_i]=V_i$ $(i=1, 2, 3)$. Für jedes solche Konvergenzintervall (u, v) gibt es einen Iterationsindex n so, daß $(u, v)_n=\Delta x$ gilt, und die Punkte u_n und v_n je mit einem der Punkte B_1, A_2 zusammenfallen.[16]) Es kann also jedes vollständige Konvergenzintervall in V_i in Form $(\Delta x)_{-n}$ geschrieben werden. Die Punkte von den Intervallen $(\Delta x)_{-n}$, und nur diese, gehören in V_i $(i=1, 2, 3)$ zu ξ.

[15]) D. h. sie ist eine „diskontinuierliche" Menge.

[16]) Dies folgt einfach aus der Monotonität der Grundfunktion in den Intervallen V_i.

Wir beweisen, daß die Längen der in V_i liegenden sämtlichen Konvergenzintervalle $(\Delta x)_{-n}$ zusammen die Länge von V_i ausmachen.

Es bezeichne Q_i $(i=1,2,3)$ den absoluten Wert von

$$(A_i-B_i):(f(A_i)-f(B_i)).$$

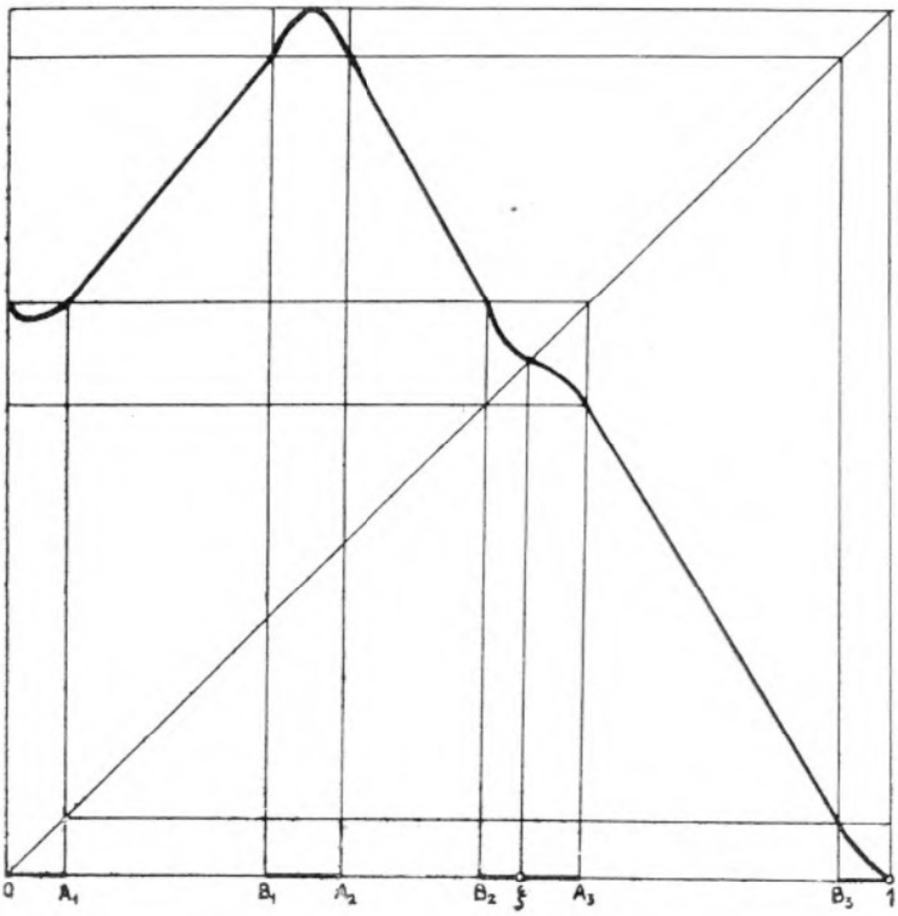

Fig. 5.

Jedes Intervall $(\Delta x)_{-n}\subset V_3$ hat zwei invers-iterierte Intervalle (erster Ordnung) $(\Delta x)_{-(n+1)}$, (d. h. es gilt $((\Delta x)_{-(n+1)})_1=(\Delta x)_{-n}$), je eines in V_1 und in V_2. Man erhält für die Länge dieser Intervalle mit einfacher Rechnung der Reihe nach

$$|(\Delta x)_{-(n+1)}|=Q_1|(\Delta x)_{-n}|,\quad |(\Delta x)_{-(n+1)}|=Q_2|(\Delta x)_{-n}|.$$

Ist W_i die Gesamtlänge der Konvergenzintervalle $(\Delta x)_{-n}\subset V_i$, so folgt nach den vorigen Gleichungen aus der Tatsache, daß jedes Konvergenzintervall in V_1 und V_2 ein invers-iteriertes Intervall (erster Ordnung) eines Konvergenz-intervalles in V_3 ist,

$$W_1 = Q_1 W_3, \quad W_2 = Q_2 W_3.$$

Es ist ferner jedes Konvergenzintervall $(\Delta x)_{-(n+1)} \subset V_3$ ein erstes invers-iteriertes Intervall entweder eines Intervalles $(\Delta x)_{-n} \subset V_1$, oder eines solchen in V_2, oder — schließlich — des Intervalles Δx; jedenfalls gilt für die Längen dieser Intervalle

$$|(\Delta x)_{-(n+1)}| = Q_3 |(\Delta x)_{-n}|,$$

also ergibt sich

$$W_3 = Q_3(W_1 + W_2 + |\Delta x|).$$

Zusammenfassend:

$$\begin{aligned} &W_1 = Q_1 W_3 \\ (29) \qquad &W_2 = Q_2 W_3 \\ &W_3 = Q_3(W_1 + W_2 + |\Delta x|). \end{aligned}$$

Wir betrachten hier W_1, W_2 und W_3 als die Unbekannten dieses inhomogenen linearen Gleichungssystems. Für den Wert der Determinante ergibt sich

$$1 - (Q_1 + Q_2) Q_3 = 1 - \frac{|V_1| + |V_2|}{|V_1| + |V_2| + |\Delta x|} > 0,$$

wo die einfach beweisbaren Formeln

$$(30) \qquad Q_1 = \frac{|V_1|}{|V_3|}, \quad Q_2 = \frac{|V_2|}{|V_3|}, \quad Q_3 = \frac{|V_3|}{|V_1| + |V_2| + |\Delta x|}$$

in Betracht gezogen wurden. Die Gleichungen (29) haben also nur *ein* Lösungssystem. Das ist — wie aus (30) folgt — $|V_1|, |V_2|, |V_3|$, es ist also $W_i = |V_i|$, w. z. b. w.

Für das Maß der Menge $\mathfrak{K}$ der Konvergenzpunkte ergibt sich:

$$(31) \qquad |\mathfrak{K}| = A_1 + (B_1 - A_1) + (A_3 - B_2) + (1 - B_3) + |V_1| + |V_2| + |V_3| = 1.$$

Die Menge der Divergenzpunkte wird von denjenigen Punkten gebildet, die in I zurückbleiben, wenn man die Intervalle (28) und die $(\Delta x)_{-n}$ aus I herausnimmt. Nach einem bekannten Satz der Mengenlehre ist die Restmenge perfekt, also hat sie die Mächtigkeit des Kontinuums. Sie ist ferner nach (31) eine Nullmenge. Damit ist gezeigt, daß die Menge der irregulären Punkte auch hier eine diskontinuierliche Menge ist.[17])

[17]) Eine nähere Untersuchung zeigt, daß es keinen nicht zu ξ gehörigen regulären Punkt gibt. Die Fixpunkte höherer Ordnung — die eine abzählbare Menge bilden — sind nämlich abstoßend, die Menge der singulären Punkte ist abzählbar. Deshalb hat die Menge der irregulären Punkte auch bei diesem Beispiel die Mächtigkeit des Kontinuums.

BEMERKUNG: Die vorige einfache Rechnung, mit welcher das Maß der Menge der Konvergenzpunkte berechnet wurde, bildet den Ausgangspunkt einer Methode, mit welcher wir bei gewissen komplizierteren, aber stetige erste Ableitung besitzenden Grundfunktionen beweisen können, daß die Menge der Divergenzpunkte (oder die der irregulären Punkte) eine Nullmenge ist. Dieses Problem führt zu der Iteration differenzierbarer Funktionen, womit wir uns in einem weiteren Teil dieser Arbeit beschäftigen wollen.

Literatur.

[1] E. BÖTTCHER, Beiträge zu der Theorie der Iterationsrechnung, *Diss. Leipzig*, 1898.

[2] P. FATOU, Sur les équations fonctionnelles, *Bull. Soc. Math. France* **47** (1919), 161—271; **48** (1920), 33—94, 208—314.

[3] P. FATOU, Sur l'itération des fonctions transcendentes entières, *Acta Math.* **47** (1926), 337—370.

[4] G. JULIA, Mémoires sur l'itération des fonctions rationnelles, *J. Math. Pures. Appl.* Ser. 9. **1** (1918), 47—245.

[5] G. JULIA, Mémoire sur la convergence des séries formées avec les itérées successives d'une fraction rationnelle, *Acta Math.* **56** (1931), 149—195.

[6] G. KOENIGS, Recherches sur les équations fonctionnelles, *Ann. l'Ec. Norm.* Sup. **3**: **1** (1884).

[7] P. MONTEL, L'itération, *Univ. Nac. La Plata Publ. Fac. Ci. Fizicomat. Rev.* **3** (1940), 201—211.

[8] H. RADSTRÖM, On the iteration of analytic functions, *Math. Scand.* **1** (1953), 85—92.

[9] E. SCHRÖDER, Über iterierte Funktionen, *Math. Ann.* **3** (1871), 296—322.

[10] C. L. SIEGEL, Iteration of analytic functions, *Ann. of Math.* **43** (1942), 607—612.

[11] Д. И. Таланов, О некоторых вопросах теории итерации рациональной функции, Доклады А. Н. СССР **93** (1953), 413—416.

[12] H. A. ANTOSIEWICZ—J. M. HAMMERSLEY, The convergence of numerical iteration, *Amer. Math. Monthly* **60** (1953), 604—607.

[13] U. T. BÖDEWADT, Zur Iteration reeller Functionen, *Math. Z.* **49** (1944), 497—516.

[14] В. М. Дубровский, О методе итерации, Успехи мат. наук **9**: 3 (1954), 127—133.

[15] J. HADAMARD, Two works on iteration and related questions, *Bull. Amer. Math. Soc.* **50** (1944), 67—75.

[16] H. J. HAMILTON, Roots of equations by functional iteration, *Duke Math. J.* **13** (1946), 113—121.

[17] H. KNESER, Reelle analytische Lösungen der Gleichung $\varphi[\varphi(x)] = e^x$ und verwandter Functionalgleichungen, *J. Reine Angew. Math.* **187** (1950), 56—67.

[18] A. OSTROWSKI, Mathematische Miszellen XXV. Über das Verhalten von Iterationsfolgen im Divergenzfall, *Jber. Deutsch. Math. Verein.* **59** (1956), 69—79.

[19] С. П. Пулькин, Осцилляционные последовательности итераций, Доклады А. Н. СССР **73** (1950), 1129—1132.

[20] R. SCHAUFFLER, Über wiederholte Funktionen, *Math. Ann.* **78** (1918), 52—62.

[21] J. WEISSINGER, Zur Theorie und Anwendung des Iterationsverfahren, *Math. Nachr.* **8** (1952), 193—212.

[22] E. M. WRIGHT, Iteration of the exponential function, *Quart. J. Math.* Oxford Ser. (2) **18** (1947), 228—235.

(Eingegangen am 17. Dezember 1958.)